

解不等式练习

一、解答题

1. 解下列不等式:

(1) $-2x^2 + x \leq -3$;

(2) $\frac{x+1}{3x-1} > 0$;

(3) $-\frac{4}{3}x^2 + 5x - 9 < 0$.

【答案】(1) $(-\infty, -1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$

(2) $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

(3) $\mathbf{R}$

【知识点】解不含参数的一元二次不等式、分式不等式

【分析】(1) 将不等式等价变形后通过因式分解即可求得其解集;

(2) 将分式不等式化成一元二次不等式求解即得;

(3) 将不等式等价变形后, 根据对应方程的根的判别式小于零, 结合图象即得不等式解集.

【详解】(1) 因 $-2x^2 + x \leq -3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x+1) \geq 0$,

则原不等式的解集为 $(-\infty, -1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$;

(2) 因 $\frac{x+1}{3x-1} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(3x-1) > 0$,

则原不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$;

(3) 因 $-\frac{4}{3}x^2 + 5x - 9 < 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 27 > 0$,

因方程 $4x^2 - 15x + 27 = 0$ 的判别式 $\Delta = 15^2 - 4 \times 4 \times 27 < 0$, 故原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

2. 求下列不等式的解集:

(1) $x(x+2) > x(3-x)+1$;

(2) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 > 0$;

(3) $\frac{x+2}{3x-1} \geq 1$.

【答案】(1) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

(2) $\emptyset$

(3) $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$

【知识点】解不含参数的一元二次不等式、分式不等式

【分析】(1) 直接化简解出一元二次不等式即可；

(2) 根据判别式即可得到其解；

(3) 移项并通分将分式不等式转化为一元二次不等式即可求解.

【详解】(1) 将不等式 $x(x+2) > x(3-x)+1$ 化简为 $2x^2 - x - 1 > 0$ ，即 $(x-1)(2x+1) > 0$

解得 $x > 1$ 或 $x < -\frac{1}{2}$ ，则解集为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

(2) 将不等式 $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 > 0$ 化简为 $x^2 - 6x + 10 < 0$ ，

因为 $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 10 = -4 < 0$ ，

所以该不等式无实数解，即解集为 $\emptyset$.

(3) 因为 $\frac{x+2}{3x-1} \geq 1$ ，即 $\frac{x+2}{3x-1} - 1 \geq 0$ ，所以通分可得 $\frac{-2x+3}{3x-1} \geq 0$ ，

则 $\begin{cases} (-2x+3)(3x-1) \geq 0 \\ 3x-1 \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $\frac{1}{3} < x \leq \frac{3}{2}$ ，

所以解集为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

3. 解下列不等式：

(1) $4x^2 - 4x + 1 > 0$ ；

(2) $\frac{x-2}{x-1} \geq 2$

【答案】(1) $\left\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

(2) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$

【知识点】分式不等式、解不含参数的一元二次不等式

【分析】(1) 利用二次不等式的解法可得出原不等式的解集；

(2) 将所求不等式变形为 $\frac{x}{x-1} \leq 0$ ，利用分式不等式的解法可得出所求不等式的解集.

【详解】(1) 由 $4x^2 - 4x + 1 > 0$, 得 $(2x-1)^2 > 0$, 解得 $x \neq \frac{1}{2}$, 故原不等式的解集为

$$\left\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}.$$

(2) 由 $\frac{x-2}{x-1} \geq 2$ 得 $2 - \frac{x-2}{x-1} = \frac{2(x-1)-(x-2)}{x-1} = \frac{x}{x-1} \leq 0$,

等价于 $\begin{cases} x(x-1) \leq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $0 \leq x < 1$, 故原不等式的解集为 $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$.

4. 求下列关于 x 的不等式的解集.

(1) $-x^2 + 4x + 5 < 0$;

(2) $\frac{x-1}{x+2} < 0$;

(3) $x^2 - (2a+2)x + a^2 + 2a \leq 0$.

【答案】(1) $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$

(2) $\{x \mid -2 < x < 1\}$

(3) $\{x \mid a \leq x \leq a+2\}$

【知识点】分式不等式、解含有参数的一元二次不等式、解不含参数的一元二次不等式

【分析】(1) 首先移项把二次项系数化成正数再判断 $\Delta > 0$, 再求方程的两个根, 即可求解不等式;

(2) 将分式不等式转化为一元二次不等式求解;

(3) 首先分解因式, 再根据两根大小, 结合不等式的形式, 即可求解.

【详解】(1) 由 $-x^2 + 4x + 5 < 0$ 得 $x^2 - 4x - 5 > 0$,

即 $(x-5)(x+1) > 0$,

解得 $x < -1$ 或 $x > 5$,

所以不等式 $-x^2 + 4x + 5 < 0$ 的解集为 $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$;

(2) 不等式 $\frac{x-1}{x+2} < 0$ 等价于 $(x-1)(x+2) < 0$, 解得 $-2 < x < 1$,

故不等式的解集为 $\{x \mid -2 < x < 1\}$;

(3) 由 $x^2 - (2a+2)x + a^2 + 2a \leq 0$, 得 $(x-a)(x-a-2) \leq 0$,

显然 $a < a+2$ ，所以不等式解集为 $\{x | a \leq x \leq a+2\}$.