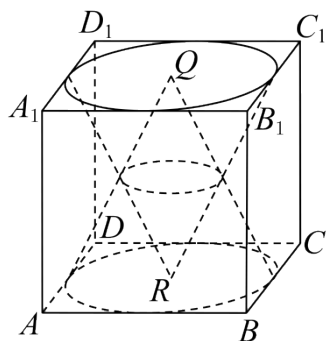


组合体的体积表面积 教师版

一、单选题

1. 如图，实心正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为4，其中上、下底面的中心分别为 Q, R 。若从该正方体中挖去两个圆锥，且其中一个圆锥以 R 为顶点，以正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的内切圆为底面，另一个圆锥以 Q 为顶点，以正方形 $ABCD$ 的内切圆为底面，则该正方体剩余部分的体积为（ ）



A. $64 - \frac{5\pi}{6}$

B. $64 - \frac{7\pi}{6}$

C. $64 - \frac{25\pi}{3}$

D. $64 - \frac{28\pi}{3}$

【答案】D

【难度】0.65

【来源】天津市南开中学 2024 届高三上学期第三次月考数学试题

【知识点】柱体体积的有关计算、求组合体的体积、台体体积的有关计算

【分析】由题意可知正方体剩余体积即为正方体体积减去两个上底重合的圆台的体积，根据圆台的体积公式可求得答案.

【详解】解：由题意可知，挖去的两个圆锥是底面圆半径相等，半径为2，高也相等的圆锥，两圆锥相交于位于正方体的高中间处的小圆，小圆半径为1，

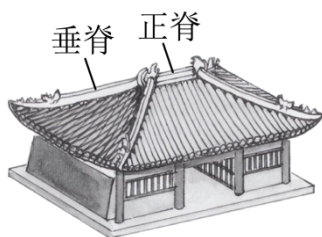
则正方体剩余的部分体积即正方体体积减去两个上底重合对在一起的圆台的体积，

$$\text{即剩余几何体的体积为 } 4^3 - 2 \times \frac{1}{3} \pi (2^2 + 1^2 + \sqrt{2^2 \times 1^2}) \times 2 = 64 - \frac{28}{3} \pi.$$

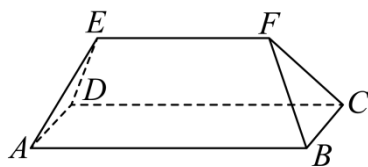
故选：D.

2. 庑殿式屋顶是中国古代建筑中等级最高的屋顶形式，分为单檐庑殿顶与重檐庑殿顶. 单檐庑殿顶主要有一条正脊和四条垂脊，前后左右都有斜坡(如图①)，类似五面体 $FE-ABCD$ 的形状(如图②)，若四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB \parallel EF$ ，且 $AB = 2EF = 2BC = 8$ ，

$EA = ED = FB = FC = 3$ ，则三棱锥 $F - ADE$ 的体积为 ()



①



②

A. $\frac{8}{3}$

B. 3

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{16}{3}$

【答案】A

【难度】0.65

【来源】天津市五区重点校联考 2023-2024 学年高三上学期期中考试数学试题

【知识点】锥体体积的有关计算、点到平面距离的向量求法

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量求出点 F 到平面 ADE 的距离，进而结合三棱锥的体积公式求解即可.

【详解】如图，在线段 CD 上取点 H, N ，使得 $DH = CN = 2$ ， $HN = 4$ ，

在线段 AB 上取点 G, M ，使得 $AG = MB = 2$ ， $GM = 4$ ，

连接 EG, EH, GH, FM, FN, MN ，设 P, Q 分别为 GH, MN 的中点，连接 EP, FQ ，

由题意可得， $EG = EH = FM = FN = \sqrt{5}$ ， $GH = MN = 4$ ， $EP = FQ$ ， $EP \perp$ 平面 $ABCD$ ，

则 $EP = FQ = 1$ ，连接 PQ ，则 $PQ \parallel AB \parallel DC$ ，

以 Q 为原点，以 QM ， QP ， QF 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

则 $F(0, 0, 1)$ ， $A(2, 6, 0)$ ， $D(-2, 6, 0)$ ， $E(0, 4, 1)$ ，

所以 $\overrightarrow{AD} = (-4, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{AE} = (-2, -2, 1)$ ， $\overrightarrow{EF} = (0, -4, 0)$ ，

设平面 ADE 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

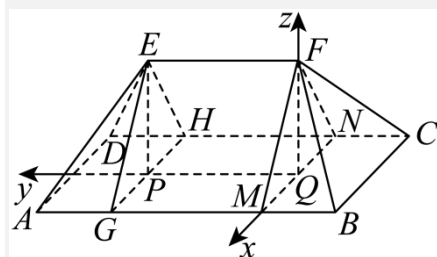
$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -4x = 0 \\ -2x - 2y + z = 0 \end{cases}, \text{ 则可取 } \vec{n} = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\text{则点 } F \text{ 到平面 } ADE \text{ 的距离为 } h = \frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{又 } S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3^2 - 2^2} = 2\sqrt{5},$$

所以三棱锥 $F-ADE$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times S_{\triangle ADE} \times h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{8}{3}$.

故选：A.



3. 若三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $PA = AB = AC = 2$ ，若该三棱锥的顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为（ ）

A. $10\sqrt{3}\pi$

B. 18π

C. 20π

D. $9\sqrt{3}\pi$

【答案】C

【难度】0.65

【来源】四川省成都经济技术开发区实验中学 2023-2024 学年高三上学期 10 月月考数学（理）试题

【知识点】多面体与球体内切外接问题、球的表面积的有关计算

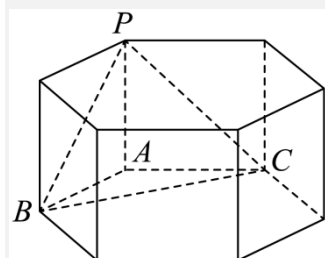
【分析】由题设知三棱锥 $P-ABC$ 是相应正六棱柱内的一个三棱锥，由此知该三棱锥的外接球即为该六棱柱的外接球，求出正六棱柱的外接球半径即可得.

【详解】三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA \perp$ 底面 ABC ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $PA = AB = AC = 2$ ，故该三棱锥为图中正六棱柱内的三棱锥 $P-ABC$ ，所以该三棱锥的外接球即为该六棱柱的外接球，

所以外接球的直径 $2R = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ，则 $R = \sqrt{5}$ ，

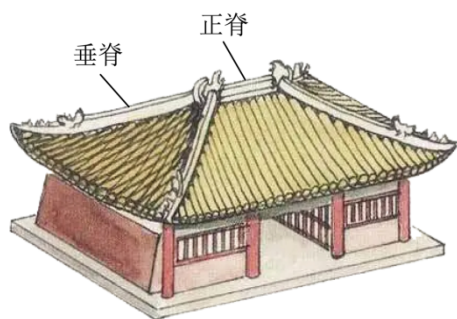
所以该球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (\sqrt{5})^2 = 20\pi$.

故选：C.

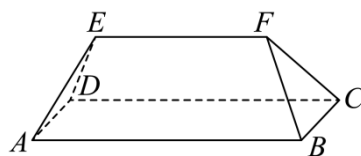


4. 庑殿式屋顶是中国古代建筑中等级最高的屋顶形式，分为单檐庑殿顶与重檐庑殿顶. 单

檐庑殿顶主要有一条正脊和四条垂脊，前后左右都有斜坡（如图①），类似五面体 $FE-ABCD$ 的形状（如图②），若四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB \parallel EF$ ，且 $AB = CD = 2EF = 2BC = 8$ ， $EA = ED = FB = FC = 3$ ，则五面体 $FE-ABCD$ 的表面积为（ ）



①



②

A. 48

B. $32\sqrt{5}$

C. $16+16\sqrt{5}$

D. $32+16\sqrt{5}$

【答案】D

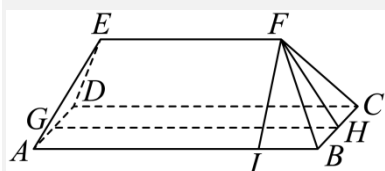
【难度】0.85

【来源】四川省成都市蓉城联盟 2023-2024 学年高三上学期入学联考文科数学试题

【知识点】求组合多面体的表面积

【分析】根据平面图形的几何性质，分别求等腰三角形和梯形的高，再求各个面的面积，即可求总面积。

【详解】分别取 AD ， BC 的中点 G ， H ，连接 GH ， FH ，



过点 F 作 AB 的垂线 FI ，垂足为 I ，

因为 $FB = FC = 3$ ， $BC = 4$ ，所以 $FH \perp BC$ ，所以 $FH = \sqrt{5}$ ，

根据对称性易得 $\triangle FBC \cong \triangle EAD$ ，

所以 $S_{\triangle FBC} = \frac{1}{2}BC \times FH = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle FBI$ 中， $BI = \frac{8-4}{2} = 2$ ，所以 $FI = \sqrt{FB^2 - BI^2} = \sqrt{5}$ ，

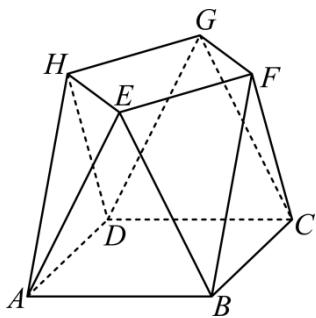
$S_{\text{梯形}FEAB} = \frac{1}{2}(EF + AB) \times FI = \frac{1}{2} \times (4 + 8) \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ ，

又 $S_{\text{矩形}ABCD} = AB \times BC = 32$ ，

所以 $S_{FE-ABCD} = 2S_{\triangle FBC} + 2S_{\text{梯形}FEAB} + S_{\text{矩形}ABCD} = 32 + 16\sqrt{5}$ 。

故选：D.

5. 某同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒，包装盒如图所示：底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $\triangle EAB$ ， $\triangle FBC$ ， $\triangle GCD$ ， $\triangle HDA$ 均为正三角形，且它们所在的平面都与平面 $ABCD$ 垂直，则该包装盒的容积为（ ）



A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{20}{3}$

C. $10\sqrt{3}$

D. 20

【答案】A

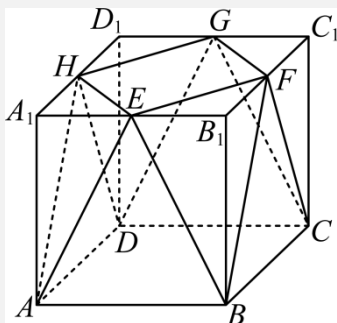
【难度】0.65

【来源】天津市滨海新区 2023 届高三三模数学试题

【知识点】柱体体积的有关计算、锥体体积的有关计算

【分析】补全图形为长方体求解即可.

【详解】



将几何体补全为长方体，如图所示，

$$A_2F = \frac{1}{2}B_1C_1 = 1,$$

$$BA_2 = \sqrt{BF^2 - A_2F^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

所以则该包装盒的容积为：

$$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} - 4V_{A-A_1EH},$$

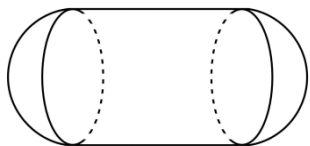
$$= 2 \times 2 \times \sqrt{3} - 4 \left[\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) \times \sqrt{3} \right],$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$= \frac{10}{3}\sqrt{3}.$$

故选：A.

6. 如图，某种中药胶囊外形是由两个半球和一个圆柱组成的，半球的直径是6mm，圆柱高8mm，则该中药胶囊的体积为（ ）



A. $90\pi\text{mm}^3$

B. $108\pi\text{mm}^3$

C. $216\pi\text{mm}^3$

D. $360\pi\text{mm}^3$

【答案】B

【难度】0.65

【来源】天津市南开区 2023 届高三二模数学试题

【知识点】球的体积的有关计算、柱体体积的有关计算、求组合体的体积

【分析】由球的体积公式和圆柱的体积公式求解即可；

【详解】由题意得该几何体由两个半球和一个圆柱筒组成，

所以体积为一个球体体积和一个圆柱体积之和，

$$\text{由球体的体积为： } V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = \frac{108}{3}\pi\text{mm}^3 = 36\pi\text{mm}^3,$$

$$\text{圆柱体积为： } V_2 = \pi R^2 \cdot h = \pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi\text{mm}^3,$$

$$\text{所以浮球的体积为： } V = V_1 + V_2 = 36\pi + 72\pi = 108\pi\text{mm}^3.$$

故选：B.

7. 灯笼起源于中国的西汉时期，两千多年来，每逢春节人们便会挂起象征美好团圆意义的红灯笼，营造一种喜庆的氛围.如图1，某球形灯笼的轮廓由三部分组成，上下两部分是两个相同的圆柱的侧面，中间是球面的一部分(除去两个球冠).如图2，球冠是由球面被一个平面截得的，垂直于截面的直径被截得的部分叫做球冠的高，若球冠所在球的半径为 R ，球冠的高为 h ，则球冠的面积 $S = 2\pi Rh$.已知该灯笼的高为40cm，圆柱的高为4cm，圆柱的底面圆直径为24cm，则围成该灯笼所需布料的面积为（ ）

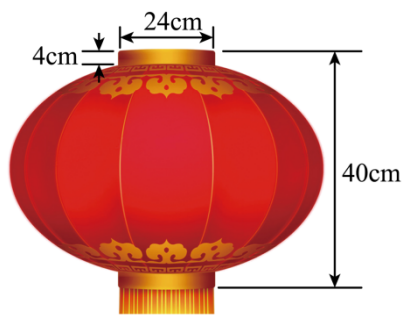


图1

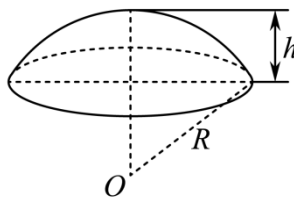


图2

A. $1536\pi\text{cm}^2$

B. $1472\pi\text{cm}^2$

C. $1824\pi\text{cm}^2$

D. $1760\pi\text{cm}^2$

【答案】B

【难度】0.65

【来源】重组卷 01

【知识点】球的截面的性质及计算、球的表面积的有关计算、圆柱表面积的有关计算

【分析】由勾股定理求出 R ，则 $h = R - 16 = 4\text{cm}$ ，分别求出两个球冠的表面积、灯笼中间球面的表面积、上下两个圆柱的侧面积即可求出围成该灯笼所需布料的面积.

【详解】由题意得圆柱的底面圆直径为 24cm ，半径为 12cm ，即球冠底面圆半径为 12cm . 已知该灯笼的高为 40cm ，圆柱的高为 4cm ，所以该灯笼去掉圆柱部分的高为 $40 - 8 = 32\text{cm}$ ，所以 $R^2 - \left(\frac{40-8}{2}\right)^2 = 12^2$ ，得 $R = 20\text{cm}$ ， $h = 20 - 16 = 4\text{cm}$ ，

所以两个球冠的表面积之和为 $2S = 4\pi Rh = 320\pi\text{cm}^2$ ，

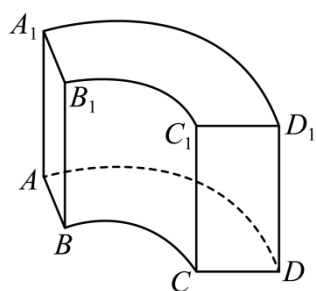
灯笼中间球面的表面积为 $4\pi R^2 - 320\pi = 1280\pi\text{cm}^2$.

因为上下两个圆柱的侧面积之和为 $2 \times 24\pi \times 4 = 192\pi\text{cm}^2$ ，

所以围成该灯笼所需布料的面积为 $1280\pi + 192\pi = 1472\pi\text{cm}^2$.

故选：B.

8. 中国古代数学的瑰宝《九章算术》中记载了一种称为“曲池”的几何体，该几何体是上、下底面均为扇环形的柱体（扇环是指圆环被扇形截得的部分）现有一个如图所示的曲池， AA_1 垂直于底面， $AA_1 = 3$ ，底面扇环所对的圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ ，弧 AD 长度是弧 BC 长度的 3 倍， $CD = 2$ ，则该曲池的体积为（ ）



A. $\frac{9\pi}{2}$

B. 5π

C. $\frac{11\pi}{2}$

D. 6π

【答案】D

【难度】0.65

【来源】专题 17 三角函数概念与诱导公式-3

【知识点】柱体体积的有关计算、弧长的有关计算

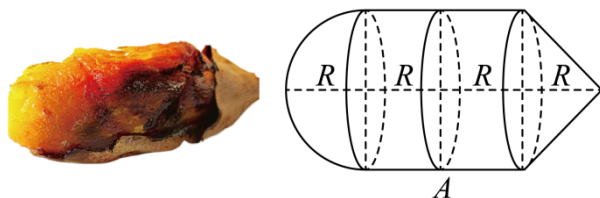
【分析】根据弧长与半径的关系，将两个弧所对应的半径求出，再根据圆柱的体积公式求出曲池的体积.

【详解】不妨设弧 AD 所在圆的半径为 R ，弧 BC 所在圆的半径为 r ，
由弧 AD 长度为弧 BC 长度的 3 倍可知 $R=3r$ ， $CD=R-r=2r=2$ ，
所以 $r=1$ ， $R=3$.

故该曲池的体积 $V = \frac{\pi}{4} \times (R^2 - r^2) \times 3 = 6\pi$.

故选：D.

9. 红薯于 1593 年被商人陈振龙引入中国，也叫甘薯、番薯等，因其生食多汁、熟食如蜜，成为人们喜爱的美食甜点.敦敦和融融在步行街买了一根香气扑鼻的烤红薯，准备分着吃.如图，该红薯可近似看作三个部分：左边部分是半径为 R 的半球；中间部分是底面半径是为 R 、高为 $2R$ 的圆柱；右边部分是底面半径为 R 、高为 R 的圆锥，若敦敦准备从中间部分的 A 处将红薯切成两块，则两块红薯体积差的绝对值为（ ）



A. $\frac{1}{3}\pi R^3$

B. $\frac{2}{3}\pi R^3$

C. $\frac{5}{6}\pi R^3$

D. πR^3

【答案】A

【难度】0.65

【来源】天津市部分区 2023 届高三二模数学试题

【知识点】求组合体的体积、球的体积的有关计算

【分析】由球和圆柱，圆锥的体积公式求解即可.

【详解】由题意可知，两块红薯体积差的绝对值为 $\left| \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} R^3 + \pi R^2 \cdot R - (\pi R^2 \cdot R + \frac{\pi}{3} R^2 \cdot R) \right|$
 $= \left| \frac{2\pi}{3} R^3 - \frac{\pi}{3} R^3 \right| = \frac{\pi}{3} R^3.$

故选：A.

10. 距今 5000 年以上的仰韶遗址表明，我们的先人们居住的是一种茅屋，如图 1 所示，该茅屋主体是一个正四棱锥，侧面是正三角形，且在茅屋的一侧建有一个入户甬道，甬道形似从一个直三棱柱上由茅屋一个侧面截取而得的几何体，一端与茅屋的这个侧面连在一起，另一端是一个等腰直角三角形. 图 2 是该茅屋主体的直观图，其中正四棱锥的侧棱长为 6m， $BC \parallel EF$ ， $AB = AC = 2\sqrt{2}\text{m}$ ， $AB \perp AC$ ，点 D 在正四棱锥的斜高 PH 上， $AD \perp$ 平面 ABC 且 $AD = 3\sqrt{2}\text{m}$. 不考虑建筑材料的厚度，则这个茅屋（含甬道）的室内容积为（ ）



图1

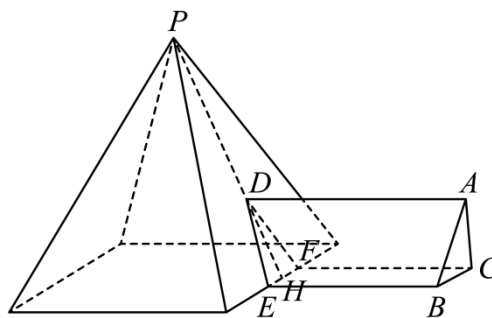


图2

- A. $\frac{137\sqrt{2}}{3}\text{m}^3$ B. $\frac{136\sqrt{2}}{3}\text{m}^3$ C. $\frac{134\sqrt{2}}{3}\text{m}^3$ D. $44\sqrt{2}\text{m}^3$

【答案】B

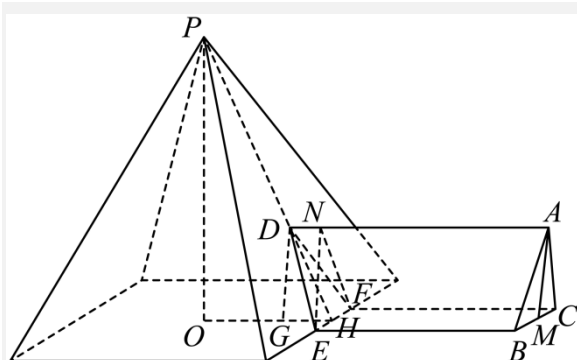
【难度】0.65

【来源】辽宁省部分高中 2023 届高三下学期普通高考模拟考试（一）数学试题

【知识点】柱体体积的有关计算、锥体体积的有关计算、正棱锥及其有关计算

【分析】根据题意问题转化为求四棱锥体积与三棱柱体积再加一个小三棱锥体积之和，运用体积公式求解即可.

【详解】设 O 为正四棱锥底面中心，连接 PO ， OH ，



则 $PH = 3\sqrt{3}, OH = 3$,

$$\therefore PO = \sqrt{PH^2 - OH^2} = 3\sqrt{2}, \therefore \tan \angle PHO = \frac{OP}{OH} = \sqrt{2},$$

取 BC 的中点 M , 连接 AM , 过 D 作 $DG \perp OH$ 于 G , 则 $DG = AM = 2$.

$$\text{在直角 } \triangle DGH \text{ 中 } GH = \frac{DG}{\tan \angle PHO} = \sqrt{2}.$$

过 E 作 $EN \parallel AB$ 交 AD 于 N 连接 NF .

$$\text{则 } AN = AD - DN = 2\sqrt{2},$$

$$\text{所求体积 } V = V_{\text{四棱锥}} + V_{ABC-NEF} + V_{D-NEF}$$

$$= \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 3\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 \times 2\sqrt{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = \frac{136}{3}\sqrt{2}(\text{m}^3)$$

故选: B

11. 科技是一个国家强盛之根, 创新是一个民族进步之魂, 科技创新铸就国之重器, 极目一号 (如图 1) 是中国科学院空天信息研究院自主研发的系留浮空器. 2022 年 5 月, “极目一号”III 型浮空艇成功完成 10 次升空大气科学观测, 最高升空至 9050 米, 超过珠穆朗玛峰, 创造了浮空艇大气科学观测海拔最高的世界纪录, 彰显了中国的实力. “极目一号”III 型浮空艇长 55 米, 高 19 米, 若将它近似看作一个半球、一个圆柱和一个圆台的组合体, 正视图如图 2 所示, 则“极目一号”III 型浮空艇的体积约为 ()

(参考数据: $9.5^2 \approx 90$, $9.5^3 \approx 857$, $315 \times 1005 \approx 316600$, $\pi \approx 3.14$)



图1

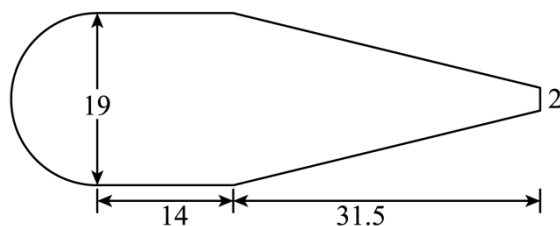


图2

A. 9064m^3

B. 9004m^3

C. 8944m^3

D. 8884m^3

【答案】A

【难度】0.65

【来源】广东省佛山市 2023 届高三二模数学试题

【知识点】求组合体的体积、柱体体积的有关计算、台体体积的有关计算、球的体积的有关计算

【分析】先根据图 2 得半球、圆柱底面和圆台一个底面的半径为 R ，而圆台一个底面的半径为 r ，再根据球、圆柱和圆台的体积公式即可求解。

【详解】由图 2 得半球、圆柱底面和圆台一个底面的半径为 $R = \frac{19}{2} = 9.5$ (m)，而圆台一个底面的半径为 $r = 1$ (m)，

$$V_{\text{半球}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 9.5^3 \approx \frac{1714}{3} \pi \text{ (m}^3\text{)},$$

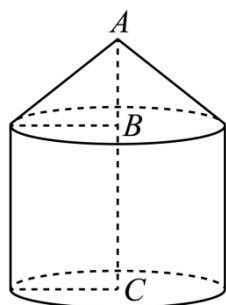
$$V_{\text{圆柱}} = \pi \times 9.5^2 \times 14 \approx 1260\pi \text{ (m}^3\text{)},$$

$$V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3} \times \left(9.5^2 \pi + \sqrt{9.5^2 \pi \times \pi} + \pi \right) \times 31.5 \approx \frac{3166}{3} \pi \text{ (m}^3\text{)},$$

$$\text{所以 } V = V_{\text{半球}} + V_{\text{圆柱}} + V_{\text{圆台}} \approx \frac{1714}{3} \pi + 1260\pi + \frac{3166}{3} \pi \approx 9064 \text{ (m}^3\text{)}.$$

故选：A.

12. 如图，几何体 Ω 为一个圆柱和圆锥的组合体，圆锥的底面和圆柱的一个底面重合，圆锥的顶点为 A ，圆柱的上、下底面的圆心分别为 B 、 C ，若该几何体 Ω 存在外接球（即圆锥的顶点与底面圆周在球面上，且圆柱的底面圆周也在球面上）。已知 $BC = 2AB = 4$ ，则该组合体的体积等于（ ）



- A. 56π B. $\frac{70}{3}\pi$ C. 48π D. 64π

【答案】A

【难度】0.65

【来源】天津市十二区重点学校 2023 届高三下学期毕业班联考（一）数学试题

【知识点】锥体体积的有关计算、多面体与球体内切外接问题

【分析】由组合体的特征确定球心在 BC 中点，再由 R 得出底面半径，进而得出组合体体积.

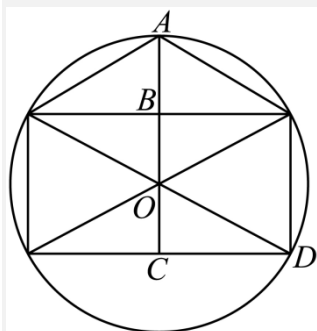
【详解】设该组合体外接球的球心为 O ，半径为 R ，易知球心在 BC 中点，则

$$R = AO = 2 + 2 = 4.$$

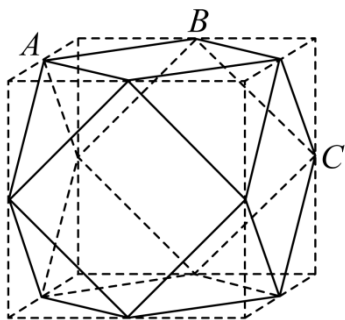
则圆柱的底面半径为 $r = \sqrt{4^2 - (4 - 2)^2} = 2\sqrt{3}$,

$$\text{则该组合体的体积等于 } V = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 \times 2 + \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 4 = 56\pi.$$

故选：A



13. “阿基米德多面体”这称为半正多面体 (semi-regular solid)，是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，它体现了数学的对称美.如图所示，将正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，共可截去八个三棱锥，得到八个面为正三角形、六个面为正方形的一种半正多面体.已知 $AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，则该半正多面体外接球的表面积为 ()



A. 18π

B. 16π

C. 14π

D. 12π

【答案】A

【难度】0.65

【来源】东北三省三校 2023 届高三第一次联合模拟考试数学试题

【知识点】多面体与球体内切外接问题、球的表面积的有关计算

【分析】根据正方体的对称性可知：该半正多面体外接球的球心为正方体的中心 O ，进而可求球的半径和表面积.

【详解】如图，在正方体 $EFGH-E_1F_1G_1H_1$ 中，取正方体、正方形 $E_1F_1G_1H_1$ 的中心 O 、 O_1 ，连接 E_1G_1, OO_1, OA, O_1A ，

$\because A, B$ 分别为 E_1H_1, H_1G_1 的中点，则 $E_1G_1 = 2AB = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 正方体的边长为 $EF = 3$ ，

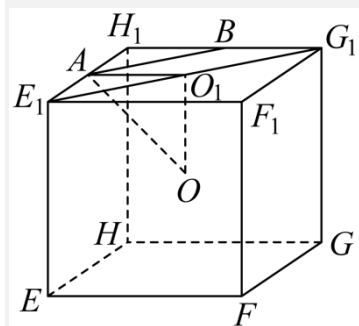
故 $OO_1 = O_1A = \frac{3}{2}$ ，可得 $OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

根据对称性可知：点 O 到该半正多面体的顶点的距离相等，则该半正多面体外接球的球心为

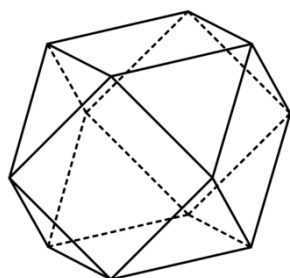
O ，半径 $R = OA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

故该半正多面体外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 18\pi$ 。

故选：A.



14. “阿基米德多面体”也称半正多面体，是由边数不全相同的正多边形围成的多面体，它体现了数学的对称美·如图是以一正方体的各条棱的中点为顶点的多面体，这是一个有八个面为正三角形，六个面为正方形的“阿基米德多面体”，若该多面体的棱长为1，则经过该多面体的各个顶点的球的体积为（ ）



A. $\frac{4}{3}\pi$

B. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

C. 4π

D. 8π

【答案】A

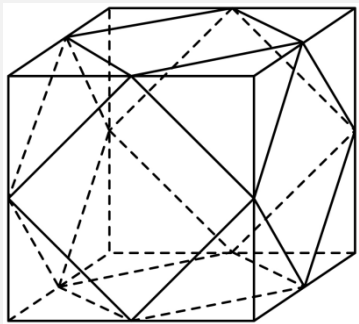
【难度】0.65

【来源】天津市静海区第一中学 2021-2022 学年高三上学期第三次阶段检测数学试题

【知识点】球的体积的有关计算、多面体与球体内切外接问题

【分析】根据给定条件，把多面体放在棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体中，结合正方体的结构特征确定球心，求出球半径作答.

【详解】把该多面体放入正方体中，如图，



由于多面体的棱长为 1，则正方体的棱长为 $\sqrt{2}$ ，

因此该多面体是由棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体连接各棱中点所得，于是得该多面体的外接球球心是正方体体对角线中点，

该多面体外接球半径 R 等于球心到一个顶点的距离，即正方体面对角线的一半，则

$$2R = \sqrt{2} \times \sqrt{2}, \text{ 解得 } R = 1,$$

所以经过该多面体的各个顶点的球的体积为 $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3}$.

故选：A

【点睛】关键点睛：解决与球有关的内切或外接问题时，关键是确定球心的位置，再利用球的截面小圆性质求解.

15. 十字歇山顶是中国古代建筑屋顶的经典样式之一，左图中的故宫角楼的顶部即为十字歇山顶.其上部可视为由两个相同的直三棱柱重叠而成的几何体（如右图）.这两个直三棱柱有一个公共侧面 $ABCD$.在底面 BCE 中，若 $BE = CE = 3, \angle BEC = 120^\circ$, 则该几何体的体积为 ()



图1

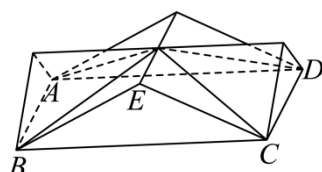


图2

A. $\frac{27}{2}$

B. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

C. 27

D. $27\sqrt{3}$

【答案】C

【难度】0.65

【来源】2022 年高考天津卷（回忆版）数学真题

【知识点】柱体体积的有关计算、求组合体的体积

【分析】根据几何体直观图，由题意结合几何体体积公式即可得组合体的体积.

【详解】如图所示，该几何体可视为直三棱柱 $BCE-ADF$ 与两个三棱锥 $S-MAB$ ， $S-NCD$ 拼接而成.

记直三棱柱 $BCD-ADF$ 的底面 BCE 的面积为 S ，高为 h ，所求几何体的体积为 V ，

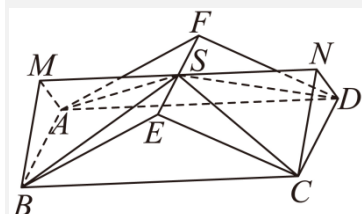
$$\text{则 } S = \frac{1}{2} BE \cdot CE \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4},$$

$$h = CD = BC = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } V = V_{\text{三棱柱 } BCE-ADF} + V_{\text{三棱锥 } S-MAB} + V_{\text{三棱锥 } S-NCD}$$

$$= Sh + \frac{1}{3} S \cdot \frac{1}{2} h + \frac{1}{3} S \cdot \frac{1}{2} h = \frac{4}{3} Sh = 27.$$

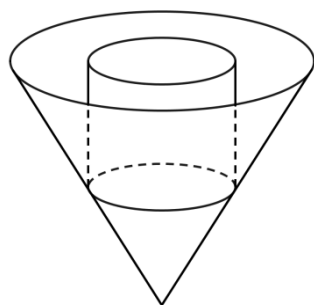
故选：C.



16. 如图，已知某圆锥形容器的轴截面是面积为 $16\sqrt{3}$ 的正三角形，在该容器内放置一个圆柱

柱，使得圆柱的上底面与圆锥的底面重合，且圆柱的高是圆锥的高的 $\frac{1}{2}$ ，则圆柱的体积为

()



A. 4π

B. 8π

C. $4\sqrt{3}\pi$

D. $8\sqrt{3}\pi$

【答案】D

【难度】0.65

【来源】天津市河西区 2022 届高三下学期总复习质量调查（二）数学试题

【知识点】柱体体积的有关计算、圆锥中截面的有关计算

【分析】根据题意，作出轴截面图，进而根据轴截面的面积得正三角形边长为 8，再结合题意得圆柱的底面半径为 2，高为 $2\sqrt{3}$ ，进而计算体积即可.

【详解】解：如图，作出轴截面，则根据题意， $\triangle ABC$ 为正三角形，且面积为 $16\sqrt{3}$ ，

所以，设正三角形的边长为 $2a$ ，则 $AB = AC = BC = 2a, OC = \sqrt{3}a$ ，

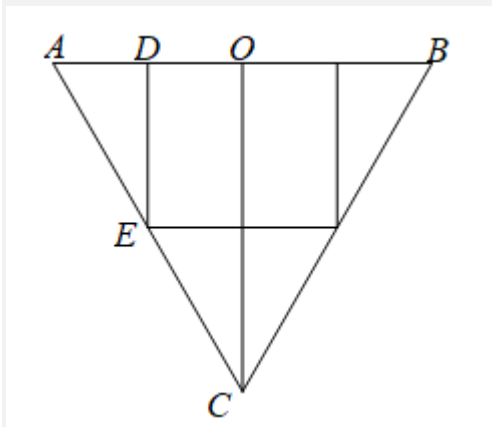
所以， $16\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 2a \times \sqrt{3}a$ ，解得 $a = 4$ ，

因为圆柱的上底面与圆锥的底面重合，且圆柱的高是圆锥的高的 $\frac{1}{2}$ ，，

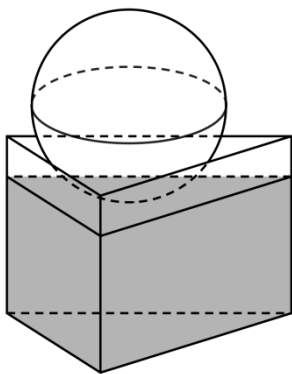
所以 $DE = \frac{1}{2}OC = 2\sqrt{3}$ ， $OD = \frac{1}{2}OA = 2$ ，即圆柱的底面半径为 2，高为 $2\sqrt{3}$ ，

所以，圆柱的体积为 $V = 4\pi \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\pi$

故选：D



17. 如图，有一个水平放置的透明无盖的正三棱柱容器，所有棱长都为 6cm，将一个球放在容器口，再向容器内注水，当球面恰好接触水面时，测得水深为 5cm，如果不计容器的厚度，则球的体积为（ ）



A. $32\pi\text{cm}^3$

B. $\frac{4}{3}\pi\text{cm}^3$

C. $\frac{169}{6}\pi\text{cm}^3$

D. $\frac{32}{3}\pi\text{cm}^3$

【答案】D

【难度】0.65

【来源】湖北省武汉市华中师范大学第一附属中学 2021-2022 学年高一下学期期中数学试题

【知识点】球的体积的有关计算、球的截面的性质及计算

【分析】根据球的截面圆即为正三棱柱底面三角形的内切圆，求得截面的半径，再利用球的截面性质求解.

【详解】解：设球的半径为 R ，球的截面圆的半径为 r ，即为正三棱柱底面三角形的内切圆的半径，

$$\text{则 } S_{\text{底}} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} r (6 + 6 + 6),$$

$$\text{解得 } r = \sqrt{3},$$

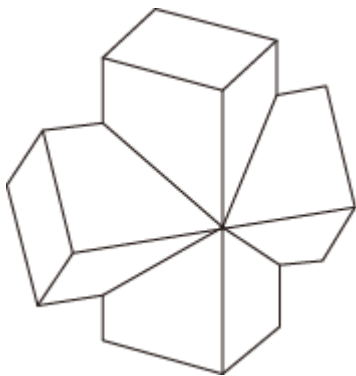
$$\text{由球的截面性质得： } R = \sqrt{3 + (R - 1)^2},$$

$$\text{解得 } R = 2,$$

$$\text{所以球的体积为 } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi,$$

故选：D

18. 如图是某机械零件的几何结构，该几何体是由两个相同的直四棱柱组合而成的，且前后、左右、上下均对称，每个四棱柱的底面都是边长为 2 的正方形，高为 4，且两个四棱柱的侧棱互相垂直，则这个几何体的体积为（ ）



A. 32

B. $32 - 8\sqrt{2}$

C. $32 - \frac{8\sqrt{2}}{3}$

D. $32 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$

【答案】D

【难度】0.65

【来源】沪教版（2020）必修第三册达标检测第11章11.2锥体

【知识点】锥体体积的有关计算、柱体体积的有关计算、求组合体的体积

【分析】该几何体的体积为两个四棱柱的体积和减去这两个四棱柱交叉部分的体积.

【详解】两个四棱柱的体积和 $=2 \times 2 \times 2 \times 4 = 32$ ，交叉部分的体积为四棱柱 $S-ABCD$ 的体积的 2 倍.

在等腰三角形 ABS 中， $SB = 2\sqrt{2}$ ，边 SB 上的高为 2，则 $SA = \sqrt{6}$.

所以，由该几何体前后、左右、上下均对称，知：四边形 $ABCD$ 为边长为 $\sqrt{6}$ 的菱形.

设 AC 的中点为 H ，连接 BH 、 SH ，由题意，得 SH 为四棱锥 $S-ABCD$ 的高.

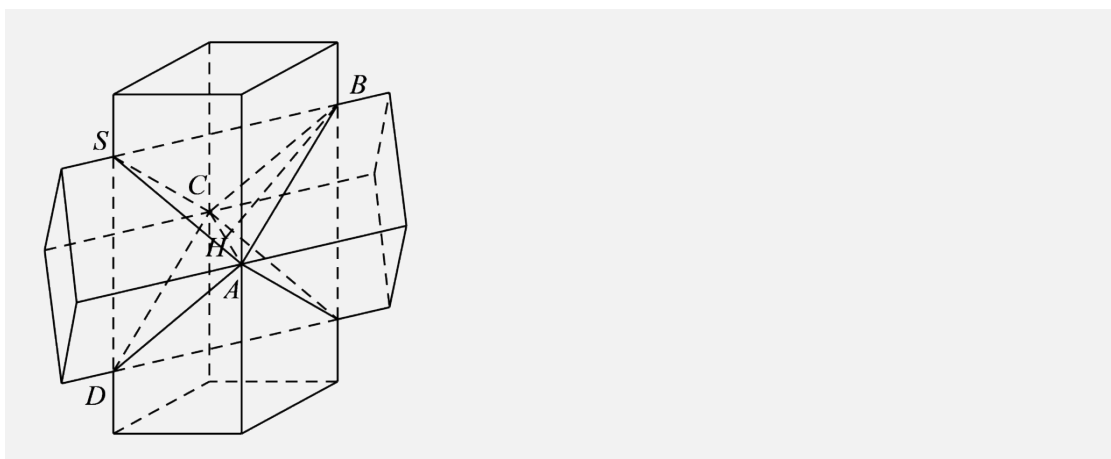
$AC = SB = 2\sqrt{2}$ ，所以 $AH = \sqrt{2}$ ，在 $Rt\triangle ABH$ 中， $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{6 - 2} = 2$.

所以 $S_{ABCD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$.

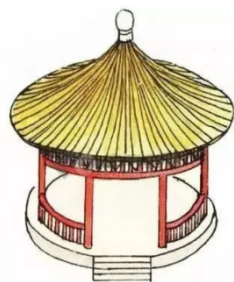
因为 $BH = SH$ ，所以 $V_{S-ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{ABCD} \times 2 = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{2} \times 2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

所以这个几何体的体积 $V = 32 - \frac{8\sqrt{2}}{3} \times 2 = 32 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$.

故选：D.



19. 攒尖是我国古代建筑中屋顶的一种结构样式，多见于亭阁式建筑、园林建筑．下面以圆形攒尖为例．如图所示的建筑屋顶可近似看作一个圆锥，其轴截面（过圆锥旋转轴的截面）是底边长为6m，顶角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的等腰三角形，则该屋顶的体积约为（ ）



A. $6\pi\text{m}^3$

B. $3\sqrt{3}\pi\text{m}^3$

C. $9\sqrt{3}\pi\text{m}^3$

D. $12\pi\text{m}^3$

【答案】B

【难度】0.65

【来源】辽宁省名校联盟 2021-2022 学年高三上学期 12 月份联合考试数学试题

【知识点】锥体体积的有关计算、圆锥的结构特征辨析

【分析】根据给定条件求出圆锥的高，再利用圆锥体积公式计算即可得解.

【详解】依题意，该圆形攒尖的底面圆半径 $r=3$ ，高 $h=r\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ ，则

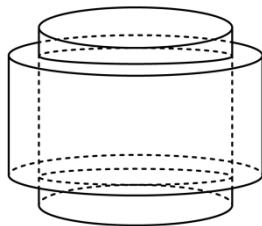
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=3\sqrt{3}\pi(\text{m}^3),$$

所以该屋顶的体积约为 $3\sqrt{3}\pi\text{m}^3$.

故选：B

20. “迪拜世博会”于 2021 年 10 月 1 日至 2022 年 3 月 31 日在迪拜举行，中国馆建筑名为“华夏之光”，外观取型中国传统灯笼，寓意希望和光明．它的形状可视为内外两个同轴圆柱，某爱好者制作了一个中国馆的实心模型，已知模型内层底面直径为 12cm，外层底面直径为

16cm，且内外层圆柱的底面圆周都在一个直径为20cm的球面上.此模型的体积为（ ）



A. $304\pi\text{cm}^3$

B. $840\pi\text{cm}^3$

C. $912\pi\text{cm}^3$

D. $984\pi\text{cm}^3$

【答案】C

【难度】0.65

【来源】山东省潍坊市 2021-2022 学年高三上学期期中数学试题

【知识点】组合体的切接问题、柱体体积的有关计算

【分析】求出内层圆柱，外层圆柱的高，该模型的体积等于外层圆柱的体积与上下面内层圆柱高出的几何体的体积之和，计算可得解.

【详解】如图，该模型内层圆柱底面直径为12cm，且其底面圆周在一个直径为20cm的球面上，

$$\text{可知内层圆柱的高 } h_1 = 2\sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2} = 16$$

同理，该模型外层圆柱底面直径为16cm，且其底面圆周在一个直径为20cm的球面上，

$$\text{可知外层圆柱的高 } h_2 = 2\sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2} = 12$$

$$\text{此模型的体积为 } V = \pi\left(\frac{16}{2}\right)^2 \times 12 + \pi\left(\frac{12}{2}\right)^2 \times (16-12) = 912\pi$$

故选：C

