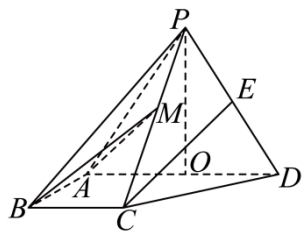


空间向量练习

一、解答题

1. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形，线段 AD 的中点为 O 且 $PO \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB = BC = \frac{1}{2}AD = 1$ ，且 $AD \parallel BC$ 且 $AB \perp AD$ ， E 是 PD 的中点.



- (1) 证明： $CE \parallel$ 平面 PAB ；
(2) 求点 E 到平面 PAB 的距离；
(3) 点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ，求平面 MAB 与平面 ABD 夹角的余弦值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

【知识点】面面角的向量求法、证明线面平行、点到平面距离的向量求法

【分析】(1) 由题意建立空间直角坐标系，求出平面 PAB 的法向量 $\vec{n}_1$ ，根据 $\vec{CE} \cdot \vec{n}_1 = 0$ 即可证明 $CE \parallel$ 平面 PAB ；

(2) 由点到平面距离的向量表示公式 $d = \frac{|\vec{EA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ ，代入数据即可求解；

(3) 由直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 可求出 $\vec{BM} = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，然后根据两平面的法向量求所成角的余弦值即可.

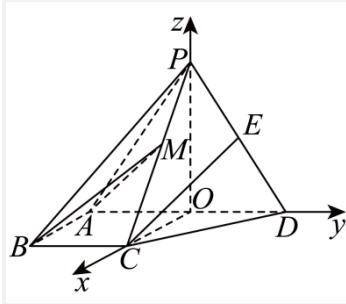
【详解】(1) 连接 OC ，

因为 $AD \parallel BC$ ， O 为线段 AD 的中点， $BC = \frac{1}{2}AD = 1$ ，

$\therefore AO \parallel BC$ ，且 $AO = BC$ ，

所以四边形 $OABC$ 为平行四边形, 所以 $OC \perp AD$,

以 O 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系:



则 $P(0, 0, \sqrt{3})$, $A(0, -1, 0)$, $B(1, -1, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$,

因为 E 是 PD 的中点, 所以 $E\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$$\overrightarrow{CE} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \overrightarrow{PA} = (0, -1, -\sqrt{3}), \quad \overrightarrow{PB} = (1, -1, -\sqrt{3}),$$

设平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ x_1 - y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } \vec{n}_1 = (0, \sqrt{3}, -1), \text{ 则 } \overrightarrow{CE} \cdot \vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

又因为 $CE \not\subset$ 平面 PAB , 所以 $CE \parallel$ 平面 PAB ;

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } E\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), A(0, -1, 0), \text{ 所以 } \overrightarrow{EA} = \left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

且平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (0, \sqrt{3}, -1)$,

$$\text{所以点 } E \text{ 到平面 } PAB \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{EA} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}_1|} = \frac{\left|0 \times 0 + \left(-\frac{3}{2}\right) \times \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-1)\right|}{\sqrt{0^2 + (\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

(3) 由题意知, 底面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

$$\text{因为 } \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{CP}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$\text{且 } \overrightarrow{BC} = (0, 1, 0), \quad \overrightarrow{CP} = (-1, 0, \sqrt{3}), \text{ 所以 } \overrightarrow{BM} = (-\lambda, 1, \sqrt{3}\lambda),$$

面 BCC_1B_1 ，利用线面垂直的性质与判定定理证明即可；法二、建立空间直角坐标系，利用空间向量证明线面垂直即可；

(2) 利用空间向量计算面面夹角即可；

(3) 利用空间向量计算点面距离，再利用锥体的体积公式计算即可。

【详解】(1) 法一、在正方形 BCC_1B_1 中，

由条件易知 $\tan \angle C_1FG = \frac{C_1G}{C_1F} = \frac{1}{2} = \frac{FB_1}{BB_1} = \tan \angle B_1BF$ ，所以 $\angle C_1FG = \angle B_1BF$ ，

则 $\angle B_1FB + \angle B_1BF = \frac{\pi}{2} = \angle C_1FG + \angle B_1FB$ ，

故 $\angle BFG = \pi - (\angle C_1FG + \angle B_1FB) = \frac{\pi}{2}$ ，即 $FG \perp BF$ ，

在正方体中，易知 $D_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，且 $EF \parallel D_1C_1$ ，

所以 $EF \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，

又 $FG \subset$ 平面 BCC_1B_1 ， $\therefore EF \perp FG$ ，

$\because EF \cap BF = F, EF, BF \subset$ 平面 BEF ， $\therefore GF \perp$ 平面 BEF ；

法二、如图以 D 为中心建立空间直角坐标系，

则 $B(4,4,0), E(2,0,4), F(2,4,4), G(0,4,3)$ ，

所以 $\overrightarrow{EF} = (0,4,0), \overrightarrow{EB} = (2,4,-4), \overrightarrow{FG} = (-2,0,-1)$ ，

设 $\vec{m} = (a,b,c)$ 是平面 BEF 的一个法向量，

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{EF} = 4b = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{EB} = 2a + 4b - 4c = 0 \end{cases}$ ，令 $a = 2$ ，则 $b = 0, c = 1$ ，所以 $\vec{m} = (2,0,1)$ ，

易知 $\overrightarrow{FG} = -\vec{m}$ ，则 $\overrightarrow{FG}$ 也是平面 BEF 的一个法向量， $\therefore GF \perp$ 平面 BEF ；

(2) 同上法二建立的空间直角坐标系，

所以 $\overrightarrow{EG} = (-2,4,-1), \overrightarrow{BG} = (-4,0,3)$ ，

由 (1) 知 $\overrightarrow{FG}$ 是平面 BEF 的一个法向量，

设平面 BEG 的一个法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$ ，所以 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = -2x + 4y - z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} = -4x + 3z = 0 \end{cases}$ ，

令 $x = 6$ ，则 $z = 8, y = 5$ ，即 $\vec{n} = (6,5,8)$ ，

设平面 BEF 与平面 BEG 的夹角为 α ,

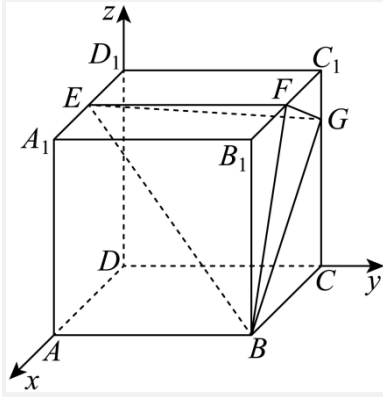
$$\text{则 } \cos \alpha = \left| \cos \langle \overrightarrow{FG}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{FG} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{FG}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{20}{\sqrt{5} \times \sqrt{125}} = \frac{4}{5};$$

(3) 由 (1) 知 $EF \perp$ 平面 BCC_1B_1 , $FB \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $\therefore EF \perp FB$,

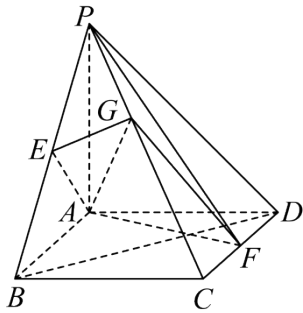
$$\text{易知 } S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} EF \cdot BF = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{4^2 + 2^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{DE} = (2, 0, 4), \text{ 则 } D \text{ 到平面 } BEF \text{ 的距离为 } d = \frac{|\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{FG}|}{|\overrightarrow{FG}|} = \frac{8}{\sqrt{5}},$$

$$\text{由棱锥的体积公式知: } V_{D-BEF} = \frac{1}{3} d \times S_{\triangle BEF} = \frac{1}{3} \times \frac{8}{\sqrt{5}} \times 4\sqrt{5} = \frac{32}{3}.$$



3. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AB = 2$, E 、 F 分别为线段 PB 、 CD 的中点, G 为线段 PC 上的动点.



(1) 证明: $EC \parallel$ 平面 PAF ;

(2) 若点 G 为 PC 的中点, 求 AG 与平面 PCD 所成角的正弦值;

(3) 若平面 $PCD \perp$ 平面 AEG , 求线段 PG 的长.

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(3) \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

【知识点】面面平行证明线面平行、空间位置关系的向量证明、线面角的向量求法

【分析】(1) 取 AB 的中点 H ，根据条件先证明出平面 $CEH \parallel$ 平面 PAF ，由此可证明 $EC \parallel$ 平面 PAF ；

(2) 建立合适空间直角坐标系，然后求解出平面 PCD 的一个法向量，根据 $\overrightarrow{AG}$ 与法向量夹角的余弦值求解出 AG 与平面 PCD 所成角的正弦值；

(3) 设 $\overrightarrow{PG} = t\overrightarrow{PC} (t \in [0, 1])$ ，然后求解出平面 AEG 的一个法向量 $\vec{m}$ ，根据条件得到 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ ，由此可求 t 的值，则 PG 的长可求。

【详解】(1) 取 AB 的中点 H ，连接 EH, CE, CH ，因为 E, H 为 PB, AB 的中点，所以 $EH \parallel PA$ ，

因为 $EH \not\subset$ 平面 PAF ， $PA \subset$ 平面 PAF ，所以 $EH \parallel$ 平面 PAF ，

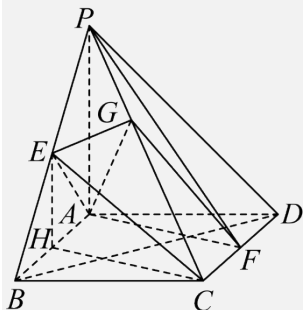
因为 H, F 为 AB, CD 的中点，且四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AH \parallel CF, AH = CF$ ，

所以四边形 $AHCF$ 是平行四边形，所以 $AF \parallel CH$ ，

因为 $CH \not\subset$ 平面 PAF ， $AF \subset$ 平面 PAF ，所以 $CH \parallel$ 平面 PAF ，

因为 $EH \cap CH = H, EH, CH \subset$ 平面 CEH ，所以平面 $CEH \parallel$ 平面 PAF ，

又因为 $EC \subset$ 平面 CEH ，所以 $EC \parallel$ 平面 PAF 。



(2) 由题意，以 A 为原点，分别以 AB, AD, AP 方向为 x, y, z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A-xyz$ ，如图所示，

因为 $A(0, 0, 0), C(2, 2, 0), D(0, 2, 0), P(0, 0, 2)$ ，所以 $G(1, 1, 1)$ ，

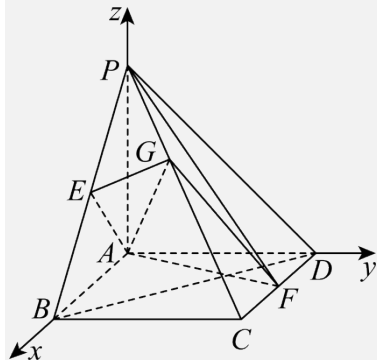
所以 $\overrightarrow{AG} = (1, 1, 1), \overrightarrow{PD} = (0, 2, -2), \overrightarrow{CD} = (-2, 0, 0)$ ，

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

所以 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 2y - 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = -2x = 0 \end{cases}$ ，取 $y = 1$ ，则 $x = 0, z = 1$ ，所以 $\vec{n} = (0, 1, 1)$ ，

设 AG 与平面 PCD 所成角为 θ ，所以 $\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AG} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AG}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{AG}|} = \frac{0+1+1}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

所以 AG 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。



(3) 设 $\overrightarrow{PG} = t\overrightarrow{PC} (t \in [0, 1])$ ，所以

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PA} = t\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} = t(2, 2, -2) - (0, 0, -2) = (2t, 2t, 2-2t),$$

因为 $P(0, 0, 2), B(2, 0, 0)$ ，所以 $E(1, 0, 1)$ ，所以 $\overrightarrow{AE} = (1, 0, 1)$ ，

设平面 AEG 的一个法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AG} = 2ta + 2tb + (2-2t)c = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = a + c = 0 \end{cases}, \text{ 取 } a = t, \text{ 则 } c = -t, b = 1-2t, \text{ 所以 } \vec{m} = (t, 1-2t, -t),$$

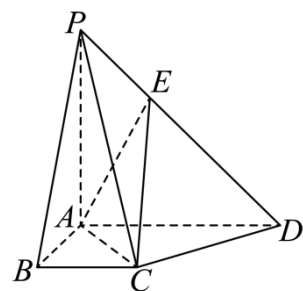
因为平面 PCD 的一个法向量 $\vec{n} = (0, 1, 1)$ ，且平面 $PCD \perp$ 平面 AEG ，

$$\text{所以 } \vec{m} \cdot \vec{n} = 1 - 2t - t = 0, \text{ 解得 } t = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } PG = \frac{1}{3}PC = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+4} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

4. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD, AB \perp AD, AD \parallel BC, AD = AP = 3$ ，

$$DE = 2EP, AB = \sqrt{3}, BC = \frac{3}{2}.$$



(1) 求证： $PB \parallel$ 平面 ACE ；

(2) 已知点 F 在棱 PD 上, 且直线 AF 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$, 求线段 AF 的值;

(3) 求三棱锥 $P-ACE$ 的体积.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{3\sqrt{10}}{4}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【知识点】锥体体积的有关计算、已知线面角求其他量、证明线面平行

【分析】(1) 证法一: 连接 BD 与 AC 交于 G , 连 EG , 由相似比与已知比例得 $EG \parallel PB$, 从而证得线面平行.

证法二: 以 A 为原点建系, 写出各点坐标, 求出平面 ACE 的法向量, 再验证 $\overrightarrow{PB}$ 与法向量垂直, 且 PB 不在面内, 从而证得线面平行.

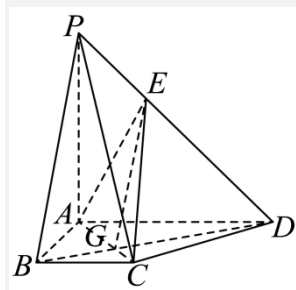
(2) 解法一: 设向量 $\overrightarrow{DF} = \lambda \overrightarrow{DP}$, 代入线面角正弦公式, 化简方程并在区间内求得 $\lambda = \frac{1}{4}$, 算出 $\overrightarrow{AF}$ 坐标, 最终求得 AF 长度.

解法二: 设向量 $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PD}$, 代入线面角正弦公式, 化简方程并在区间内求得 $\lambda = \frac{3}{4}$, 算出 $\overrightarrow{AF}$ 坐标, 最终求得 AF 长度.

(3) 解法一: 由 $DE = 2EP$ 得体积比例关系, 用棱锥体积公式直接算出 $V_{P-ACE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法二: 先在 $\triangle ACE$ 中求边长与正弦值, 再用向量求点 P 到面的距离, 代入体积公式得结果.

【详解】(1) 证法一: 连接 BD 与 AC 交于点 G , 再连接 EG ,



因为 $AD \parallel BC$, $AD = 3$, $BC = \frac{3}{2}$,

所以 $\triangle ADG \sim \triangle BCG$, $\frac{AD}{BC} = \frac{DG}{BG} = 2$

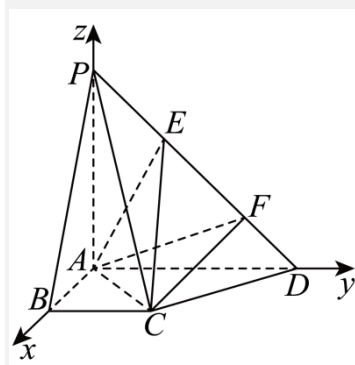
因为 $DE = 2EP$ ，所以 $\frac{AD}{BC} = \frac{DG}{BG} = \frac{DE}{EP} = 2$ ，

所以 $EG \parallel PB$ ，

又因为 $PB \not\subset$ 平面 ACE ，所以 $PB \parallel$ 平面 ACE

证法二：以 A 为原点， AB, AD, AP 所在的直线为 x 轴， y 轴， z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$ 。

则 $A(0,0,0), B(\sqrt{3},0,0), C(\sqrt{3}, \frac{3}{2}, 0), D(0,3,0), P(0,0,3), E(0,1,2)$ 。



设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 是平面 ACE 的一个法向量，

$$\overrightarrow{AE} = (0, 1, 2), \overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}, 0\right), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2z = 0 \\ \sqrt{3}x + \frac{3}{2}y = 0 \end{cases},$$

令 $y = 2$ ，则 $x = -\sqrt{3}, z = -1$ ，平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{m} = (-\sqrt{3}, 2, -1)$ 。

因为 $\overrightarrow{PB} = (\sqrt{3}, 0, -3), \overrightarrow{PB} \cdot \vec{m} = -3 + 3 = 0$ ，所以 $\overrightarrow{PB} \perp \vec{m}$ ，

又因为 $PB \not\subset$ 平面 ACE ，所以 $PB \parallel$ 平面 ACE

(2) 解法一：

设 $\overrightarrow{DF} = \lambda \overrightarrow{DP}, \lambda \in [0, 1]$ ，得 $F(0, 3-3\lambda, 3\lambda), \overrightarrow{AF} = (0, 3-3\lambda, 3\lambda)$ ，

$$\overrightarrow{AF} \cdot \vec{m} = 6 - 9\lambda, |\overrightarrow{AF}| = \sqrt{(3-3\lambda)^2 + 9\lambda^2} = 3\sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2}, |\vec{m}| = 2\sqrt{2},$$

设直线 AF 与平面 ACE 所成角为 θ ，则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AF}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{AF}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{3|2-3\lambda|}{3\sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

化简得 $8\lambda^2 - 14\lambda + 3 = 0$ ，因为 $\lambda \in [0, 1]$ ，得 $\lambda = \frac{1}{4}$ ，

$$\overrightarrow{AF} = \left(0, \frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right), |\overrightarrow{AF}| = \frac{3\sqrt{10}}{4}, \text{ 所以线段 } AF \text{ 的值为 } \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

解法二:

$$\text{设 } \overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PD}, \lambda \in [0, 1], \text{ 得 } F(0, 3\lambda, 3-3\lambda), \overrightarrow{AF} = (0, 3\lambda, 3-3\lambda),$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \vec{m} = 9\lambda - 3, |\overrightarrow{AF}| = \sqrt{9\lambda^2 + (3-3\lambda)^2} = 3\sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2}, |\vec{m}| = 2\sqrt{2},$$

设直线 AF 与平面 ACE 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AF}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{AF}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{3|3\lambda-1|}{3\sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$\text{化简得 } 8\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0, \text{ 因为 } \lambda \in [0, 1], \text{ 得 } \lambda = \frac{3}{4}, \overrightarrow{AF} = \left(0, \frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right), |\overrightarrow{AF}| = \frac{3\sqrt{10}}{4}, \text{ 所以线段 } AF$$

$$\text{的值为 } \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

(3) 解法一:

$$\text{因为 } DE = 2EP, \text{ 所以 } V_{E-ACD} = \frac{2}{3} V_{P-ACD},$$

$$V_{P-ACE} = V_{P-ACD} - V_{E-ACD} = \frac{1}{3} V_{P-ACD}$$

$$V_{P-ACE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

解法二: 由 (1) 所建立的坐标系可得

$$A(0, 0, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}, 0\right), D(0, 3, 0), P(0, 0, 3), E(0, 1, 2).$$

$$\text{则 } AC = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + \left(\frac{3}{2}-0\right)^2 + (0-0)^2} = \frac{\sqrt{21}}{2},$$

$$AE = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}, CE = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + (0-2)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\text{故由余弦定理可得 } \cos \angle CAE = \frac{AC^2 + AE^2 - CE^2}{2 \cdot AC \cdot AE} = \frac{3}{\sqrt{105}}$$

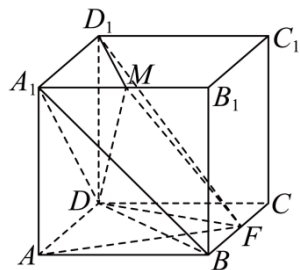
$$\text{所以 } \sin \angle CAE = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{35}},$$

$$\text{由 (1) 得 } \overrightarrow{AP} = (0, 0, 3), \text{ 平面 } ACE \text{ 的一个法向量为 } \vec{m} = (-\sqrt{3}, 2, -1).$$

$$\text{点 } P \text{ 到平面 } ACE \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$V_{P-ACE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACE} \cdot d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{21}}{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M , F 分别为 A_1B_1 , BC 的中点.



(1) 求证: $AF \perp$ 平面 DD_1M ;

(2) 求平面 A_1BD 与平面 DD_1M 夹角的余弦值;

(3) 求三棱锥 $F-DD_1M$ 的体积.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

(3) 1

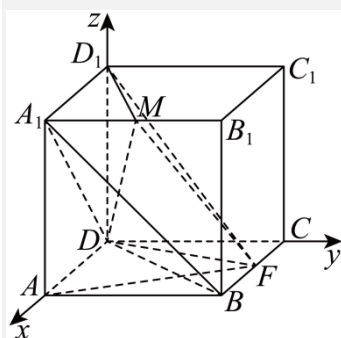
【知识点】面面角的向量求法、点到平面距离的向量求法、锥体体积的有关计算、空间位置关系的向量证明

【分析】(1) 建立空间直角坐标系, 求直线 AF 的方向向量和平面 DD_1M 的法向量, 证明两向量平行, 由此证明结论;

(2) 求平面 A_1BD 的法向量, 结合向量夹角公式求结论;

(3) 利用向量方法求点 F 到平面 DD_1M 的距离, 再锥体体积公式求结论.

【详解】(1) 如图所示, 以 D 为原点建立空间直角坐标系 $Dxyz$,



则 $D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $F(1,2,0)$, $D_1(0,0,2)$, $M(2,1,2)$, $A_1(2,0,2)$, $B(2,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{AF} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{DD_1} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{DM} = (2, 1, 2)$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 DD_1M 的一个法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DD_1} = 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DM} = 2x + y + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 则 } z = 0, \text{ 取 } x = 1, \text{ 可得 } y = -2,$$

所以 $\vec{n} = (1, -2, 0)$ 是平面 DD_1M 的一个法向量.

因为 $\overrightarrow{AF} = -\vec{n}$, 则 $\overrightarrow{AF} \parallel \vec{n}$, 所以 $AF \perp$ 平面 DD_1M .

(2) 因为 $\overrightarrow{DA_1} = (2, 0, 2)$, $\overrightarrow{DB} = (2, 2, 0)$,

设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 是平面 A_1BD 的一个法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 2x + 2z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 2x + 2y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, \text{ 可得 } y = -1, z = -1,$$

所以 $\vec{m} = (1, -1, -1)$ 是平面 A_1BD 的一个法向量,

由 (1) 知 $\vec{n} = (1, -2, 0)$ 是平面 DD_1M 的一个法向量.

设平面 A_1BD 与平面 DD_1M 夹角为 α ,

$$\text{则 } \cos \alpha = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|1 + 2 + 0|}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

(3) 因为 $\overrightarrow{DF} = (1, 2, 0)$, 由 (1) 知 $\vec{n} = (1, -2, 0)$ 是平面 DD_1M 的一个法向量,

$$\text{所以点 } F \text{ 到平面 } DD_1M \text{ 的距离为 } d = \frac{|\overrightarrow{DF} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|1 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

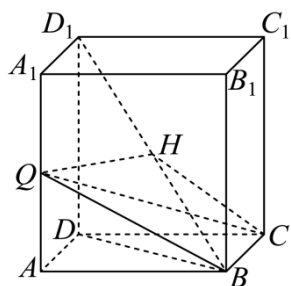
因为 $\triangle DD_1M$ 是直角三角形, $DD_1 = 2$, $D_1M = \sqrt{5}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle DD_1M} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5},$$

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥 } F-DD_1M} = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 1.$$

6. 在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, 且 $AB = 2AD = 4$,

$DD_1 = 2\sqrt{3}$, $AD \perp BD$, Q , H 分别为 AA_1 , D_1B 的中点.



(1)求直线 QH 与平面 HBC 所成角的正弦值;

(2)求平面 QBH 与平面 HBC 的夹角的余弦值;

(3)求三棱锥 $Q-HBC$ 的体积 V

【答案】(1) $\frac{\sqrt{42}}{14}$

(2) $\frac{2\sqrt{22}}{11}$

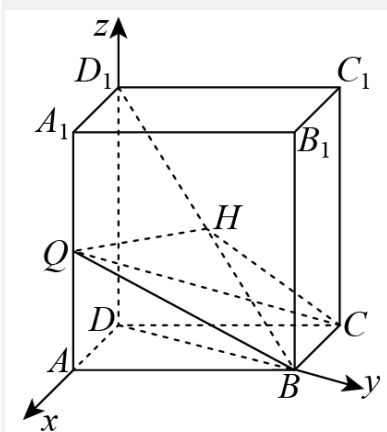
(3)1

【知识点】面面角的向量求法、点到平面距离的向量求法、锥体体积的有关计算、线面角的向量求法

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量可求线面角，面面角和点到平面的距离进而即得.

【详解】(1) 由 $AD \perp BD$ ，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，有 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，

故以点 D 为原点， DA, DB, DD_1 所在直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



易知 $D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,2\sqrt{3},0)$, $C(-2,2\sqrt{3},0)$, $D_1(0,0,2\sqrt{3})$, $A_1(2,0,2\sqrt{3})$,

由 Q, H 分别为 AA_1, D_1B 的中点，故 $Q(2,0,\sqrt{3})$, $H(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$.

易知 $\overrightarrow{QH} = (-2, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{BH} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0)$,

设平面 HBC 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BH} = -\sqrt{3}y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC} = -2x_1 = 0 \end{cases},$$

令 $y_1 = 1$, 则 $\vec{n}_1 = (0, 1, 1)$,

设直线 QH 与平面 HBC 所成角为 θ_1 ,

$$\sin \theta_1 = \left| \cos \langle \vec{n}_1, \overrightarrow{QH} \rangle \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{QH}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\overrightarrow{QH}|} = \frac{\sqrt{42}}{14},$$

则直线 QH 与平面 HBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$.

(2) 设平面 QBH 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{QH} = -2x_2 + \sqrt{3}y_2 = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BH} = -\sqrt{3}y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases},$$

令 $x_2 = \sqrt{3}$, 则 $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}, 2, 2)$,

设平面 QBH 与平面 HBC 的夹角为 θ_2 ,

$$\cos \theta_2 = \left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2\sqrt{22}}{11},$$

则平面 QBH 与平面 HBC 的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

(3) 设点 Q 到平面 HBC 的距离为 d , $d = \frac{|\overrightarrow{QH} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}_1|} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

由 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$, 有 $BC \perp BH$, 故 $S_{\triangle HBC} = \frac{1}{2} |HB| \cdot |BC| = \sqrt{6}$, $V = \frac{1}{3} S_{\triangle HBC} \cdot d = 1$.