

裂项练习

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n > 0$ 且 $a_1 a_3 = 36$, $a_3 + a_4 = 9(a_1 + a_2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $S_n + 1 = 3^{b_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 及数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(S_n + n + 1)(n \in \mathbf{N}^*)$, 令 $b_n = a_n + 1$.

(1) 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 记数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

(3) 求证: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{11}{16}$.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{1}{a_1}$, $2S_2$, $8a_3$ 成等差数列, $3a_2 = a_1 + 2a_3$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 满足 $T_n = n^2 + n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式:

(2) 若 $c_n = \begin{cases} a_n b_n, & n \text{ 是奇数} \\ \frac{(3n+8)a_n}{b_n b_{n+2}}, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$, 求 $\sum_{i=1}^{2n} c_i$.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} - 2a_n = 2^{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \frac{n+2}{n \cdot a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

5. 已知 $a_n = n$, $b_n = 3^n$.

(1) 若 $c_{n+1} = 2c_n + a_n + b_n$, $c_1 = 3$, 求 $\{c_n\}$ 的通项公式 .

(2) 若 $t_n = \frac{2(1-4n)b_n}{a_n a_{n+2}}$, 求 $\{t_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 记 $c_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $6S_n = 3^{n+1} + a$ ($a \in \mathbf{N}^+$) .

(1) 求 a 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \frac{(-1)^{n-1}(2n^2 + 2n + 1)}{(\log_3 a_n + 2)^2 (\log_3 a_n + 1)^2}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, S_n 为其前 n 项和, $2S_n = a_n^2 + n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $b_n = \frac{a_{n+2}}{2^{n+1} \cdot a_n \cdot a_{n+1}}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $T_n < \frac{1}{2}$.

9. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, $\{b_n\}$ 是等差数列, $(n \in \mathbf{N}^*)$. 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$, $a_4 = b_3 + b_5$, $a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = c_2 = 1$, $c_n = \begin{cases} 1, & 3^k < n < 3^{k+1} \\ a_k, & n = 3^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{b_{3^n}(c_{3^n} - 1)\}$ 的通项公式.

② 若 $\left\{ \frac{na_n}{(n+1)(n+2)} \right\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和 T_n , 求 $T_{3^n} + \sum_{i=1}^{3^n} b_i c_i (n \in \mathbf{N}^*)$.

10. 正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$,

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 令 $b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 a_n^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 证明: 对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $T_n < \frac{5}{64}$.

11. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_2^2 = a_3 + a_4$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = a_1$,

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = -n(n+1)(n \in \mathbf{N}^*) .$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 求证: 数列 $\left\{ \frac{b_n}{n} \right\}$ 为等差数列, 并求 $\{b_n\}$ 前 n 项和的最大值 .

(3) 求 $\sum_{k=1}^n \frac{3b_k}{a_{k+1}}$.

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$, 等比数列 $\{b_n\}$, $a_4 = b_1 = 2$, $a_5 = 3(a_4 - a_3)$, $b_4 = 4(b_3 - b_2)$.

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 试比较 $a_{n+1} \cdot a_n$ 与 $2S_{n+1}$ 的大小 .

(3) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $c_n = \begin{cases} -\frac{(3a_n+2)(a_n-2)}{b_n}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{a_{n+2}}{b_n}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 .