

数列新定义

一、解答题

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 + a_6 = 16, a_5 = 3a_2$, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n ;

(2)在数列的每相邻两项间插入这两项的积, 而形成新的数列, 这样的过程叫做该数列的一阶“ P 拓展”.例如对于数列 $1, 3$, 一阶“ P 拓展”得到数列 $1, 3, 3$; 二阶“ P 拓展”得到数列 $1, 3, 3, 9, 3$; 依次构造, 设 n 阶“ P 拓展”得到数列 $1, x_1, x_2, \dots, x_m, 3, (m \in \mathbb{N}^*)$, 设

$b_n = \log_3(1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_m \cdot 3)$, 则 $b_1 = \log_3(1 \times 3 \times 3) = 2, b_2 = \log_3(1 \times 3 \times 3 \times 9 \times 3) = 5$.

(i) 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(ii) 已知 m 为正整数, 设 $c_i = \frac{1}{6\left(b_{2^{i-1}} - \frac{1}{2}\right) + 9^m}$, 求 $\sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{2m-1} c_i$.

【答案】(1) $a_n = 2n - 1, S_n = n^2$

(2) (i) $b_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$; (ii) $\frac{5}{64} - \left(\frac{1}{8}n + \frac{5}{64}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n$

【知识点】错位相减法求和、数列新定义、求等比数列前 n 项和、倒序相加法求和

【分析】(1) 设公差为 d , 利用等差数列的基本量运算求出 a_1, d , 再由通项公式与前 n 项和

公式计算即得:

(2) (i) 根据数列的一阶“ P 拓展”的要求, 推理得到数列递推式 $b_{n+1} = 3b_n - 1$, 构造法证明

$\left\{b_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, 3 为公比的等比数列, 求出数列的通项公式即可; (ii) 先化简求得

$c_n = \frac{1}{9^n + 9^m}$, 利用倒序相加法推出 $\frac{1}{9^t + 9^m} + \frac{1}{9^{2m-t} + 9^m} = \frac{1}{9^m}$, 从而可得

$\sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{2m-1} c_i = \sum_{m=1}^n (m - \frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{9})^m$, 再利用错位相减法即可求得结果.

【详解】(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 设公差为 d ,

依题意, 可得 $\begin{cases} 2a_1 + 7d = 16 \\ a_1 + 4d = 3(a_1 + d) \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$.

故 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, $S_n = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$.

(2) (i) 由已知, $b_n = \log_3(1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_m \cdot 3) = \log_3(3x_1x_2 \cdots x_m)$,

则 $b_{n+1} = \log_3[1 \cdot (1 \cdot x_1)x_1 \cdot (x_1x_2) \cdot x_2 \cdots x_{m-1} \cdot (x_{m-1}x_m)x_m \cdot (3x_m) \cdot 3]$

$= \log_3(1^2 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 \cdots x_m^3 \cdot 3^2) = \log_3\left[\frac{(1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_m \cdot 3)^3}{1 \times 3}\right] = 3\log_3(3x_1x_2 \cdots x_m) - 1 = 3b_n - 1$

于是 $b_{n+1} - \frac{1}{2} = 3\left(b_n - \frac{1}{2}\right)$, 可得 $\left\{b_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, 3 为公比的等比数列.

故 $b_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^{n-1} = \frac{1}{2} \times 3^n$, 故 $b_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$;

(ii) 因 $c_i = \frac{1}{6\left(b_{2i-1} - \frac{1}{2}\right) + 9^m} = \frac{1}{6\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{2i-1}\right) + 9^m} = \frac{1}{9^i + 9^m}$.

则 $\sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{2m-1} c_i = \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{9^1 + 9^m} + \cdots + \frac{1}{9^2 + 9^m} + \cdots + \frac{1}{9^m + 9^m} + \frac{1}{9^{m+1} + 9^m} + \cdots + \frac{1}{9^{2m-1} + 9^m} \right)$.

而 $\frac{1}{9^1 + 9^m} + \frac{1}{9^2 + 9^m} + \cdots + \frac{1}{9^m + 9^m} + \frac{1}{9^{m+1} + 9^m} + \cdots + \frac{1}{9^{2m-1} + 9^m}$ 中, 共有 $(2m-1)$ 项.

注意到 $\frac{1}{9^t + 9^m} + \frac{1}{9^{2m-t} + 9^m} = \frac{9^{m-t}}{9^m + 9^{2m-t}} + \frac{1}{9^{2m-t} + 9^m} = \frac{9^{m-t} + 1}{9^{2m-t} + 9^m} = \frac{1}{9^m}$;

$\therefore \frac{1}{9^1 + 9^m} + \frac{1}{9^{2m-1} + 9^m} = \frac{9^{m-1}}{9^m + 9^{2m-1}} + \frac{1}{9^{2m-1} + 9^m} = \frac{9^{m-1} + 1}{9^{2m-1} + 9^m} = \frac{1}{9^m}$;

$\frac{1}{9^2 + 9^m} + \frac{1}{9^{2m-2} + 9^m} = \frac{9^{m-2}}{9^m + 9^{2m-2}} + \frac{1}{9^{2m-2} + 9^m} = \frac{9^{m-2} + 1}{9^{2m-2} + 9^m} = \frac{1}{9^m}$;

...

于是 $\frac{1}{9^1 + 9^m} + \frac{1}{9^2 + 9^m} + \cdots + \frac{1}{9^m + 9^m} + \frac{1}{9^{m+1} + 9^m} + \cdots + \frac{1}{9^{2m-1} + 9^m}$

$$\begin{aligned}
&= (m-1) \frac{1}{9^m} + \frac{1}{2 \cdot 9^m} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^m. \\
\therefore \text{原式} \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{2m-1} c_i &= \sum_{m=1}^n \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^m = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots + \frac{2n-1}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n, \\
\text{记 } T_n &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots + \frac{2n-1}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n, \\
\text{则 } \frac{1}{9} T_n &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^4 + \cdots + \frac{2n-1}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}, \\
\text{两式相减, 可得 } \frac{8}{9} T_n &= -\frac{1}{18} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \cdots + \frac{1}{9^n}\right) - \frac{2n-1}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}, \\
\text{则 } \frac{8}{9} T_n &= -\frac{1}{18} + \frac{\frac{1}{9}(1-\frac{1}{9^n})}{1-\frac{1}{9}} - \frac{2n-1}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}, \\
\text{即 } \frac{8}{9} T_n &= \frac{5}{72} - \frac{8n+5}{8} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}, \text{ 故得 } T_n = \frac{5}{64} - \frac{8n+5}{64} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n, \\
\text{即 } \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{2m-1} c_i &= \frac{5}{64} - \left(\frac{1}{8}n + \frac{5}{64}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n.
\end{aligned}$$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是各项均为正整数的递增数列, $a_1 + b_1 = 3$, $a_3 + b_2 = 9$, $b_2 = b_1^2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是无穷递增数列, 且从 $\{u_n\}$ 中任取不少于两项 (互不相同) 之和, 都不是 $\{v_n\}$ 中的项, 则称 $\{u_n\}$ 被 $\{v_n\}$ 拉黑.

(i) 求 $S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$, 并判断 $\{S_n\}$ 是否被 $\{a_n\}$ 拉黑, 说明理由.

(ii) 设 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{3b_k^2}{(b_k^2 - 1)(b_{k+1}^2 - 1)}$, $\frac{1}{3} - T_n = \frac{1}{c_n - 1}$, 任取一系列系数 $\{\lambda_n\}$, 满足

$\lambda_n \in \{1, 2, 3\} (n \in \mathbf{N}^*)$. 令 $x_n = \lambda_n c_n$, 求证: 无论 λ_n 如何取值, $\{x_n\}$ 都被 $\{c_n\}$ 拉黑.

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^n$

(2) (i) $S_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1} + 6$, $\{S_n\}$ 被 $\{a_n\}$ 拉黑, 理由见解析; (ii) 证明见解析.

【知识点】裂项相消法求和、等比数列通项公式的基本量计算、数列新定义、错位相减法求和

【分析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则 $d > 0$, $q > 0$, 根据题意可得出关于 a_1 、 d 、 q 的方程组, 根据 $a_1 \in \mathbf{N}^*$ 讨论 a_1 的值, 结合题意可得出 q 、 d 的值, 即可得出数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) (i) 利用错位相减法求出 S_n , 再利用题中定义判断即可;

(ii) 利用裂项相消法求出 T_n , 结合已知条件求出 $c_n = 4^{n+1}$, 可得 $x_n = \lambda_n c_n = \lambda_n \cdot 4^{n+1}$, 任取数列 $\{x_n\}$ 中不少于两项 x_{k_1} 、 x_{k_2} 、 $\dots$ 、 x_{k_m} ($k_1 < k_2 < \dots < k_m$) ($m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*$), 求出其和 S , 再利用反证法结合题中定义证明即可.

【详解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则 $d > 0$, $q > 0$, 因为 $b_2 = b_1 q = b_1^2$, 所以 $b_1 = q$,

因为 $a_1 + b_1 = 3$, $a_3 + b_2 = 9$, 即 $\begin{cases} a_1 + q = 3 \\ a_1 + 2d + q^2 = 9 \end{cases}$,

因为 $a_1 \in \mathbf{N}^*$, 当 $a_1 = 1$ 时, $q = 2$, $d = 2$, 符合题意,

当 $a_1 = 2$ 时, 则 $q = 1$, 则 $d = 3$, 此时, 数列 $\{b_n\}$ 为常数列, 不符合题意,

当 $a_1 \geq 3$ 时, $q \leq 0$, 不符合题意,

综上所述, $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, $b_n = b_1 q^{n-1} = q^n = 2^n$.

(2) (i) 由 (1) 可知 $a_n b_n = (2n-1) \cdot 2^n$,

所以 $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 1 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^n$ ①,

$2S_n = 1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^n + (2n-1) \cdot 2^{n+1}$ ②,

①-②得 $-S_n = 2 + 2 \cdot (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n-1) \cdot 2^{n+1} = 2 + \frac{2^3(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \cdot 2^{n+1}$

$= -6 + (3-2n) \cdot 2^{n+1},$

所以 $S_n = (2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6,$

对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = (2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6$ 为偶数,

因为数列 $\{a_n\}$ 中每一项都是奇数, 从数列 $\{S_n\}$ 中任取一项都为偶数,

故从数列 $\{S_n\}$ 中不少于两项 (互不相同) 之和均为偶数, 这些和均不是数列 $\{a_n\}$ 中的项,

所以数列 $\{S_n\}$ 被 $\{a_n\}$ 拉黑;

(ii) 因为 $\frac{3b_n^2}{(b_n^2-1)(b_{n+1}^2-1)} = \frac{3 \cdot 4^n}{(4^n-1)(4^{n+1}-1)} = \frac{(4^{n+1}-1)-(4^n-1)}{(4^n-1)(4^{n+1}-1)} = \frac{1}{4^n-1} - \frac{1}{4^{n+1}-1},$

所以 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{3b_k^2}{(b_k^2-1)(b_{k+1}^2-1)} = \left(\frac{1}{4-1} - \frac{1}{4^2-1} \right) + \left(\frac{1}{4^2-1} - \frac{1}{4^3-1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{4^n-1} - \frac{1}{4^{n+1}-1} \right)$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4^{n+1}-1},$

又因为 $\frac{1}{c_n-1} = \frac{1}{3} - T_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4^{n+1}-1} \right) = \frac{1}{4^{n+1}-1},$ 所以 $c_n = 4^{n+1},$

因为 $x_n = \lambda_n c_n = \lambda_n \cdot 4^{n+1}, \lambda_n \in \{1, 2, 3\},$

任取数列 $\{x_n\}$ 中不少于两项 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_m} (k_1 < k_2 < \cdots < k_m) (m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*),$

其和为 $S = \lambda_{k_1} \cdot 4^{k_1+1} + \lambda_{k_2} \cdot 4^{k_2+1} + \cdots + \lambda_{k_m} \cdot 4^{k_m+1} = 4^{k_1+1} (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} \cdot 4^{k_2-k_1} + \cdots + \lambda_{k_m} \cdot 4^{k_m-k_1}),$

假设 S 为数列 $\{c_n\}$ 中的项, 则存在 $t \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $S = c_t = 4^{t+1},$

即 $4^{k_1+1} (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} \cdot 4^{k_2-k_1} + \cdots + \lambda_{k_m} \cdot 4^{k_m-k_1}) = 4^{t+1},$ 从而有 $\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} \cdot 4^{k_2-k_1} + \cdots + \lambda_{k_m} \cdot 4^{k_m-k_1} = 4^{t-k_1},$

显然 $4^{t+1} > 4^{k_1+1},$ 即 $t > k_1,$ 故 $(t-k_1) \in \mathbf{N}^*,$

从而 $\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} \cdot 4^{k_2-k_1} + \cdots + \lambda_{k_m} \cdot 4^{k_m-k_1} = 4^{t-k_1}$ 能被 4 整除,

事实上, 因为 $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \cdots, \lambda_{k_m} \in \{1, 2, 3\}, \lambda_{k_2} \cdot 4^{k_2-k_1} + \cdots + \lambda_{k_m} \cdot 4^{k_m-k_1}$ 均能被 4 整除,

故 $\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2} \cdot 4^{k_2-k_1} + \cdots + \lambda_{k_m} \cdot 4^{k_m-k_1}$ 除以 4 的余数为 $\lambda_{k_1} \in \{1, 2, 3\}$ ，这与假设矛盾，

假设不成立，故无论 λ_n 如何取值， $\{x_n\}$ 都被 $\{c_n\}$ 拉黑。

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，按照下面方式构成“次生数列”

$\{b_n\}: b_1 = a_1, b_2 = \min\{a_1, a_2\}, b_3 = \min\{a_1, a_2, a_3\}, \cdots, b_n = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} (n \geq 2)$ ，其中 $\min\{a_1, a_2, \cdots, a_i\} (2 \leq i \leq n)$ 表示数列 $a_1, a_2, \cdots, a_i$ ，中最小的项。

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 中各项均不相等且只有 4 项， $a_2 = 1, a_n \in \{2, 3, 4\} (n = 1, 3, 4)$ ，请写出 $\{a_n\}$ 的所有“次生数列” $\{b_n\}$ ；

(2) 若 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -2, a_4 = 64$ ，且 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等比数列， $\{a_n\}$ 的“次生数列”为 $\{b_n\}$ 。

(i) 求 $b_3 + b_{10}$ 的值；

(ii) 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，不等式 $\lambda \left(27 - \frac{10}{n} - 18n \right) > \frac{9S_{2n} + 20}{|a_n|}$ 恒成立，

求实数 λ 的取值范围。

【答案】 (1) 2, 1, 1, 1 或 3, 1, 1, 1 或 4, 1, 1, 1.

(2) (i) $b_3 + b_{10} = -4632$; (ii) $(-\infty, 4)$.

【知识点】 数列不等式恒成立问题、求等比数列前 n 项和、数列新定义、错位相减法求和

【分析】 (1) 根据次生数列的定义得到 $b_1 = a_1 \neq 1, b_2 = b_3 = b_4 = 1$ ，从而得到 $\{b_n\}$ 有 3 个，分

别为 2, 1, 1, 1 或 3, 1, 1, 1 或 4, 1, 1, 1.

(2) (i) 根据 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等比数列, 求出公比, 求出 $a_n = n \cdot (-2)^n$, 从而根据次生数列的定义得

到 $b_1 = b_2 = a_1 = -2$, $b_9 = b_{10} = -4608$, 得到 $b_3 + b_{10}$ 的值;

(ii) 由错位相减法求和, 求出 $S_{2n} = -\frac{20}{9} + \frac{5-6n}{9} \cdot (-2)^{2n+2} = -\frac{20}{9} + \frac{5-6n}{9} \cdot 4^{n+1}$. 由

$$\lambda \left(27 - \frac{10}{n} - 18n \right) > \frac{9S_{2n} + 20}{|a_n|} \Leftrightarrow \lambda < \frac{9S_{2n} + 20}{\left(27 - \frac{10}{n} - 18n \right) \cdot |a_n|} = \frac{(5-6n) \cdot 2^{n+2}}{-18n^2 + 27n - 10} = \frac{2^{n+2}}{3n-2}, \text{ 令}$$

$c_n = \frac{2^{n+2}}{3n-2}$, 求出数列 $\{c_n\}$ 的单调性求解.

【详解】(1) 因为 $a_n \in \{2, 3, 4\} (n=1, 3, 4)$, $a_2 = 1$, $\{a_n\}$ 中各项均不相等,

所以 $b_1 = a_1 \neq 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = 1$,

若 $b_1 = a_1 = 2$, 此时“次生数列” $\{b_n\}$ 为 2, 1, 1, 1,

若 $b_1 = a_1 = 3$, 此时“次生数列” $\{b_n\}$ 为 3, 1, 1, 1,

若 $b_1 = a_1 = 4$, 此时“次生数列” $\{b_n\}$ 为 4, 1, 1, 1,

所以“次生数列” $\{b_n\}$ 的定义可知 $\{b_n\}$ 有 3 个,

分别为 2, 1, 1, 1 或 3, 1, 1, 1 或 4, 1, 1, 1.

(2) (i) 设数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 的公比为 q ,

因为 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = -2$, $a_4 = 64$, 所以 $\frac{a_4}{4} = \frac{a_1}{1} \cdot q^3$, 即 $16 = -2 \cdot q^3$, 解得 $q = -2$,

所以 $\frac{a_n}{n} = -2 \times (-2)^{n-1}$, 则 $a_n = n \cdot (-2)^n$.

由“次生数列” $\{b_n\}$ 的定义, 可知 $b_1 = b_2 = a_1 = -2$, $b_3 = b_4 = -24, \dots$,

$b_9 = b_{10} = 9 \times (-512) = -4608$, 故 $b_3 + b_{10} = -4632$.

(ii) 由 (i)

$$b_1 = b_2 = a_1 = 1 \times (-2), b_3 = b_4 = a_3 = 3 \times (-2)^3, \dots, b_{2n-1} = b_{2n} = a_{2n-1} = (2n-1) \times (-2)^{2n-1},$$

$$S_{2n} = 2 \left[1 \times (-2) + 3 \times (-2)^3 + \dots + (2n-1) \times (-2)^{2n-1} \right], \quad ①$$

$$4S_{2n} = 2 \left[1 \times (-2)^3 + 3 \times (-2)^5 + \dots + (2n-1) \times (-2)^{2n+1} \right], \quad ②$$

$$\text{由①-②得 } -3S_{2n} = 2 \left[1 \times (-2) + 2 \times (-2)^3 + \cdots + 2 \times (-2)^{2n-1} - (2n-1) \times (-2)^{2n+1} \right]$$

$$= 2 \left[(-2) + 2 \cdot \frac{(-2)^3 - (-2)^{2n+1}}{1-4} \right] - 2(2n-1) \times (-2)^{2n+1} = \frac{20}{3} - \frac{5-6n}{3} \cdot (-2)^{2n+2}$$

$$\text{所以 } S_{2n} = -\frac{20}{9} + \frac{5-6n}{9} \cdot (-2)^{2n+2} = -\frac{20}{9} + \frac{5-6n}{9} \cdot 4^{n+1}.$$

$$\because 27 - \frac{10}{n} - 18n < 0 \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$\therefore \lambda \left(27 - \frac{10}{n} - 18n \right) > \frac{9S_{2n} + 20}{|a_n|} \Leftrightarrow \lambda < \frac{9S_{2n} + 20}{\left(27 - \frac{10}{n} - 18n \right) \cdot |a_n|} = \frac{(5-6n) \cdot 2^{n+2}}{-18n^2 + 27n - 10} = \frac{2^{n+2}}{3n-2}$$

$$\text{令 } c_n = \frac{2^{n+2}}{3n-2}, \text{ 则 } c_{n+1} - c_n = \frac{2^{n+3}}{3n+1} - \frac{2^{n+2}}{3n-2} = \frac{(3n-5) \cdot 2^{n+2}}{(3n+1)(3n-2)}$$

当 $n=1$ 时, $c_{n+1} < c_n$; 当 $n \geq 2$ 时, $c_{n+1} > c_n$, 即 $c_1 > c_2 < c_3 < c_4 < \cdots$.

$$\therefore \lambda < c_2 = \frac{2^4}{3 \times 2 - 2} = 4, \text{ 故 } \lambda \text{ 的取值范围为 } (-\infty, 4).$$

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = 2S_n + 2 \quad (n \in \mathbf{N}^*)$, 等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n , 且 $B_4 = 4B_2$, $b_{2n} = 2b_n + 1, (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \frac{1}{2} a_n b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列, 在数列 $\{d_n\}$ 中是否存在 3 项 d_m, d_k, d_p , (其中 m, k, p 成等差数列) 成等比数列? 若存在, 求出这样的 3 项, 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $a_n = 2 \times 3^{n-1}$, $b_n = 2n - 1$

(2) $T_n = (n-1)3^n + 1$

(3) 不存在, 理由见解析

【知识点】利用 a_n 与 s_n 关系求通项或项、数列新定义、错位相减法求和

【分析】(1) 根据已知条件列方程求出数列的首项, 公比或公差, 进而求出通项公式;

(2) 用错位相减法求数列前 n 项和;

(3) 利用反证法, 先假设存在, 再利用等比中项和等差中项的性质求解, 进而证明不存在.

【详解】(1) 由题意, 当 $n=1$ 时, 有 $a_1q = 2a_1 + 2$; 当 $n=2$ 时, $a_1q^2 = 2(a_1 + a_1q) + 2$

联立方程 $\begin{cases} a_1q = 2a_1 + 2 \\ a_1q^2 = 2(a_1 + a_1q) + 2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = -1 \\ q = 0 \end{cases}$ (舍).

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$.

由题意知 $B_4 = 4B_2$, $b_{2n} = 2b_n + 1, (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $b_2 = 2b_1 + 1$,

联立方程 $\begin{cases} 2b_1 + 3d = 2(2b_1 + d) \\ b_1 + d = 2b_1 + 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

综上, $a_n = 2 \times 3^{n-1}$, $b_n = 2n - 1$.

(2) 因为 $c_n = \frac{1}{2}a_nb_n = (2n-1)3^{n-1}$,

所以 $T_n = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + 5 \times 3^2 + \cdots + (2n-1) \times 3^{n-1} \dots \textcircled{1}$,

$\textcircled{1} \times 3$ 得, $3T_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (2n-1) \times 3^n \dots \textcircled{2}$,

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得, $-2T_n = 1 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2 \times 3^{n-1} - (2n-1) \times 3^n$,

$$-2T_n = 1 + 2(3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n-1) \times 3^n = 1 + 2 \times \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \times 3^n,$$

化简得: $T_n = (n-1)3^n + 1$.

(3) 由 (1) 知 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$, $a_{n+1} = 2 \times 3^n$.

所以 $a_{n+1} = a_n + (n+2-1)d$, 所以 $d_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1} = \frac{4 \times 3^{n-1}}{n+1}$.

设数列 $\{d_n\}$ 中存在 3 项 d_m, d_k, d_p , (其中 m, k, p 成等差数列) 成等比数列.

$$\text{则 } d_k^2 = d_m \cdot d_p. \text{ 故 } \left(\frac{4 \times 3^{k-1}}{k+1} \right)^2 = \frac{4 \times 3^{m-1}}{m+1} \cdot \frac{4 \times 3^{p-1}}{p+1}, \text{ 即 } \left(\frac{4 \times 3^{k-1}}{k+1} \right)^2 = \frac{4^2 \times 3^{m+p-2}}{(m+1)(p+1)}.$$

又因为 m, k, p 成等差数列, 所以 $2k = m + p$, 故 $4^2 \times 3^{2k-2} = 4^2 \times 3^{m+p-2}$.

故 $(k+1)^2 = (m+1)(p+1)$, 化简得 $k^2 + 2k = mp + m + p$, 所以 $k^2 = mp$.

又因为 $2k = m + p$, 所以 $4k^2 = m^2 + p^2 + 2mp$, 故 $(m-p)^2 = 0$, 即 $m = p$.

而 $2k = m + p$, 所以 $k = m = p$.

与假设矛盾.

所以在数列 $\{d_n\}$ 中不存在 3 项 d_m, d_k, d_p 成等比数列.

5. 从数列 $\{a_n\}$ 中选取第 k 项, 第 $k+1$ 项, ..., 第 $k+m-1$ 项 ($k \in \mathbf{N}^*, m \geq 2$), 并按原顺序构成的新数列称为数列 $\{a_n\}$ 的“(k, m)连续子列”. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, 对 $\forall k \in \mathbf{N}^*$, 数列 $\{a_n\}$ 的“($2k, 3$)连续子列”是公比为 $\frac{k+1}{k}$ 的等比数列.

(1) 求 a_4 , a_5 的值;

(2) 求 a_{2n+1} ($n \in \mathbf{N}^*$);

(3) 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{2i+3}{(a_{2i} + a_{2i+1})2^{i+1}} < \frac{7}{12}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

【答案】(1) $a_4 = 4$, $a_5 = 6$

(2) $a_{2n+1} = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$

(3) 证明见解析

【知识点】裂项相消法求和、由递推关系式求通项公式、数列新定义、累乘法求数列通项

【分析】(1) 依题意 $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{k+1}{k}$ 对 $\forall k \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 代入计算可得;

(2) 依题意可得 $\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2$, $k \in \mathbf{N}^*$, 再利用累乘法求出 a_{2n} , 再结合 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{n+1}{n}$, 计算可得;

(3) 由 (2) 知 $a_{2n} = n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\frac{2n+3}{(a_{2n} + a_{2n+1})2^{n+1}} < \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1)2^n}$, 利用裂项相消法计算可得.

【详解】(1) 由题意知 a_{2k} , a_{2k+1} , a_{2k+2} 是公比为 $\frac{k+1}{k}$ 的等比数列,

$$\therefore \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{k+1}{k} \text{ 对 } \forall k \in \mathbf{N}^* \text{ 恒成立, 又 } a_1 = 0, a_2 = 1,$$

$$\therefore \frac{a_3}{a_2} = 2 \Rightarrow a_3 = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2 \Rightarrow a_4 = 4, \text{ 又 } \frac{a_5}{a_4} = \frac{3}{2}, \text{ 所以 } a_5 = \frac{3}{2} \times 4 = 6;$$

$$(2) \text{ 因为 } \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{k+1}{k} \text{ 对 } \forall k \in \mathbf{N}^* \text{ 恒成立,}$$

$$\text{所以 } \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2, k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore a_{2n} = a_2 \times \frac{a_4}{a_2} \times \frac{a_6}{a_4} \times \cdots \times \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = 1 \times \left(\frac{2}{1}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 = n^2 (n \geq 2),$$

当 $n=1$ 时 $a_{2n} = n^2$ 也成立,

$$\therefore a_{2n} = n^2 (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{又 } \therefore \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{n+1}{n},$$

$$\therefore a_{2n+1} = \frac{n+1}{n} \times a_{2n} = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*);$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知 } a_{2n} = n^2 (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{2n+3}{(a_{2n}+a_{2n+1})2^{n+1}} &= \frac{2n+3}{n(2n+1)2^{n+1}} = \frac{2n+3}{2n(2n+1)2^n} < \frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1)2^n} \\ &= \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1)2^n}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n \frac{2i+3}{(a_{2i}+a_{2i+1})2^{i+1}} = \frac{2+3}{(a_2+a_3)2^2} = \frac{5}{12} < \frac{7}{12};$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n \frac{2i+3}{(a_{2i}+a_{2i+1})2^{i+1}} &< \frac{5}{12} + \left(\frac{1}{3 \times 2} - \frac{1}{5 \times 2^2} \right) + \cdots + \left[\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1)2^n} \right] \\ &= \frac{5}{12} + \frac{1}{3 \times 2} - \frac{1}{5 \times 2^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(2n+1)2^n} \\ &= \frac{7}{12} - \frac{1}{(2n+1)2^n} < \frac{7}{12}; \end{aligned}$$

$$\text{综上可得 } \sum_{i=1}^n \frac{2i+3}{(a_{2i}+a_{2i+1})2^{i+1}} < \frac{7}{12} (n \in \mathbf{N}^*).$$

6. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 对于给定的 k ($k=1, 2, 3 \dots n$), 设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k , 公差为 $2a_k-1$ 的等差数列, 记 $T^{(k)}$ 的第 i 项为 $b_i^{(k)}$. 若 $b_1^{(1)}+b_1^{(2)}=b_2^{(2)}$, 且 $b_2^{(1)}=b_3^{(2)}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

$$(2) \text{ 设 } c_n = \frac{(b_n^{(2)}+1)^2}{2a_n \cdot 3^n}, \text{ 求 } \{c_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } M_n$$

$$(3) \text{ 若 } d_n = \frac{b_n^{(n)}+n-1}{a_n} - \frac{n-1}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(2^n+3)}, \text{ 求使得 } [d_1]+[d_2]+[d_3]+\cdots+[d_n] \leq 2025 \text{ 成立的}$$

最大整数 n 的值. (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最

大整数)

【答案】(1) $a_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(2) $M_n = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}$

(3) 满足不等式的最大正整数 $n = 45$

【知识点】数列新定义、错位相减法求和、等比数列通项公式的基本量计算

【分析】(1) 根据给定定义，可得 $b_i^{(k)} = a_k + (2a_k - 1)(i - 1), (k = 1, 2, 3, \dots, n), i \in \mathbb{N}$ ，进而列出 a_1, a_2 的方程组，求解即可；

(2) 由 (1) 求得 $b_n^{(2)}$ ，进而求得 c_n ，利用错位相减法求得 M_n ；

(3) 由 (1) 求得 $b_n^{(n)} = (2n - 1)a_n - (n - 1)$ ，进而求得 $d_n = \frac{n^2 + 2(2^n + 3)}{(n + 1)(2^n + 3)} + 2(n - 1)$ ，进一步可

证明 $0 < \frac{n^2 + 2(2^n + 3)}{(n + 1)(2^n + 3)} < 1$ ，从而可得 $[d_n] = 2(n - 1)$ ，计算可得满足不等式的最大正整数。

【详解】(1) 依题意可得 $b_i^{(k)} = a_k + (2a_k - 1)(i - 1), (k = 1, 2, 3, \dots, n), i \in \mathbb{N}$ ，

$$b_1^{(1)} = a_1, b_1^{(2)} = a_2, b_2^{(1)} = a_1 + (2a_1 - 1) = 3a_1 - 1,$$

$$b_2^{(2)} = a_2 + (2a_2 - 1) = 3a_2 - 1, b_3^{(2)} = a_2 + (2a_2 - 1)2 = 5a_2 - 2,$$

$$\text{由 } b_1^{(1)} + b_1^{(2)} = b_2^{(2)}, \text{ 且 } b_2^{(1)} = b_3^{(2)}, \text{ 得 } \begin{cases} a_1 + a_2 = 3a_2 - 1 \\ 3a_1 - 1 = 5a_2 - 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 2 \end{cases}, \text{ 于是 } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3},$$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ；

(2) 由题意可得 $b_n^{(2)} = a_2 + (2a_2 - 1)(n - 1) = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$ ，

$$\text{所以 } c_n = \frac{(b_n^{(2)} + 1)^2}{2a_n \cdot 3^n} = \frac{(3n - 1 + 1)^2}{2 \times 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times 3^n} = \frac{n^2}{2^n},$$

$$\text{所以 } M_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \dots + \frac{n^2}{2^n}$$

$$\text{可得 } \frac{1}{2}M_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{3^2}{2^4} + \cdots + \frac{n^2}{2^{n+1}},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{1}{2}M_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^{n+1}},$$

$$\text{令 } y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

$$\text{则有 } \frac{1}{2}y = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \frac{\frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2^{n+1}},$$

$$\text{所以 } y = 3 - \frac{2n+3}{2^n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2}M_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n} - \frac{n^2}{2^{n+1}} = 3 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^{n+1}},$$

$$\text{所以 } M_n = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n};$$

$$(3) \text{ 根据题意可得 } b_n^{(n)} = a_n + (2a_n - 1)(n-1) = a_n + 2(n-1)a_n - (n-1) = (2n-1)a_n - (n-1),$$

$$\text{所以 } d_n = \frac{b_n^{(n)} + n - 1}{a_n} - \frac{n-1}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(2^n+3)} = \frac{(2n-1)a_n}{a_n} - \frac{n-1}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(2^n+3)}$$

$$= (2n-1) - \frac{n-1}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(2^n+3)} = (2n-1) - 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(2^n+3)}$$

$$= 2(n-1) + \frac{2}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(2^n+3)} = \frac{n^2 + 2(2^n+3)}{(n+1)(2^n+3)} + 2(n-1).$$

$$\text{下证当 } n \geq 2 \text{ 时, } 0 < \frac{n^2 + 2(2^n+3)}{(n+1)(2^n+3)} < 1,$$

$$(n+1)(2^n+3) - n^2 - 2(2^n+3) = (n-1)2^n - n^2 + 3n - 3,$$

$$\text{因为 } 2^n = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2^n \geq n+2,$$

$$\text{所以 } (n-1)2^n - n^2 + 3n - 3 \geq (n-1)(n+2) - n^2 + 3n - 3 = 4n - 5 > 0$$

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } 0 < \frac{n^2 + 2(2^n+3)}{(n+1)(2^n+3)} < 1,$$

$$\text{所以 } [d_n] = 2(n-1),$$

当 $n=1$ 时, $d_1 = \frac{11}{10}$, 所以 $[d_1] = 1$,

所以 $[d_1] + [d_2] + [d_3] + \cdots + [d_n] = 1 + 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] = n^2 - n + 1 \leq 2025$,

所以 $n^2 - n \leq 2024$, 满足不等式的最大正整数 $n = 45$.

【点睛】关键点点睛: 正确理解数列新定义, 进而得到 a_1, a_2 的关系式, 求得数列的通项公

式, 在此基础上, 进一步求解后面的问题, 第三问关键在于证明 $0 < \frac{n^2 + 2(2^n + 3)}{(n+1)(2^n + 3)} < 1$, 从而

可得 $[d_n] = 2(n-1)$, 从而求解问题.

7. 对于 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_{n+1} - c_n > 1$, 则称这个数列为“优美数列”.

(1) 已知数列 $-1, \log_4 m, \log_2 m$ 是“优美数列”, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若首项为 1 的等差数列 $\{a_n\}$ 为“优美数列”, 且其前 n 项和 S_n 满足 $S_n \leq n^2 + \frac{1}{2}n$ 恒成立, 求 $\{a_n\}$ 的公差的取值范围;

(3) 已知各项均为正整数的等比数列 $\{a_n\}$ 是“优美数列”, 数列 $\left\{\frac{1}{3}a_n\right\}$ 不是“优美数列”, 若 $b_n = \frac{a_{n+1}}{2^n + 1}$, 试判断数列 $\{b_n\}$ 是否为“优美数列”, 并说明理由.

【答案】(1) $m > 4$;

(2) $1 < d \leq 2$;

(3) $\begin{cases} a_1=1 \\ q=4 \end{cases}$ 时数列 $\{b_n\}$ 是“优美数列”，理由见解析.

【知识点】等比数列通项公式的基本量计算、判断数列的增减性、数列不等式恒成立问题、数列新定义

【分析】(1) 根据数列新定义列不等式组，求参数范围；

(2) 根据定义有 $d > 1$ ，结合不等式恒成立求公差的上界，即可得范围；

(3) 根据题意有 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 最小项为 $a_2 - a_1 = a_1(q-1) > 1$ ， $\{\frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n\}$ 最小项为 $\frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}a_1(q-1) \leq 1$ ，进而有 $1 < a_1(q-1) \leq 3$ ，根据 $a_n \in \mathbb{N}^*$ 讨论 a_1, q ，并由数列新定义判断是否存在数列 $\{b_n\}$ 为“优美数列”即可.

【详解】(1) 由题意 $\begin{cases} \log_4 m + 1 > 1 \\ \log_2 m - \log_4 m > 1 \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} \log_4 m > 0 \\ \log_2 m > 2 \end{cases}$ ，可得 $m > 4$ ；

(2) 由题意，令 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，且 $d > 1$ ，

则 $S_n = n + \frac{n(n-1)}{2}d \leq n^2 + \frac{1}{2}n$ ，可得 $(n-1)d \leq 2n-1$ ，显然 $n=1$ 时不等式恒成立，

当 $n \geq 2$ 时， $d \leq \frac{2n-1}{n-1} = 2 + \frac{1}{n-1}$ 恒成立，而 $2 + \frac{1}{n-1} \in (2, 3]$ ，故 $d \leq 2$ ，

综上， $1 < d \leq 2$.

(3) 存在 $\begin{cases} a_1=1 \\ q=4 \end{cases}$ ，数列 $\{b_n\}$ 是“优美数列”，理由如下：

令 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $a_n \in \mathbb{N}^*$ ，故 $a_{n+1} - a_n = a_n(q-1) > 1$ ，显然 $q > 1$ ，

所以 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 最小项为 $a_2 - a_1 = a_1(q-1) > 1$ ，

同理对于 $\{\frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n\}$ 最小项为 $\frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}a_1(q-1) \leq 1$ ，

综上， $1 < a_1(q-1) \leq 3$ ，故 $a_1(q-1) = 2$ 或 $a_1(q-1) = 3$ ，

所以 $\begin{cases} a_1=1 \\ q=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=2 \\ q=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=3 \\ q=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=1 \\ q=4 \end{cases}$ ，

当 $\begin{cases} a_1=1 \\ q=3 \end{cases}$ ，则 $a_n = 3^{n-1}$ ，此时 $b_n = \frac{3^n}{2^n + 1}$ ，显然 $b_2 - b_1 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5} < 1$ ，不是“优美数列”；

当 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$, 则 $a_n = 2^n$, 此时 $b_n = \frac{2^{n+1}}{2^n + 1}$, 显然 $b_2 - b_1 = \frac{8}{5} - \frac{4}{3} = \frac{4}{15} < 1$, 不是“优美数列”;

当 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases}$, 则 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, 此时 $b_n = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 1}$, 显然 $b_2 - b_1 = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5} < 1$, 不是“优美数列”;

当 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 4 \end{cases}$, 则 $a_n = 4^{n-1}$, 此时 $b_n = \frac{4^n}{2^n + 1}$, 令 $c_n = b_{n+1} - b_n = \frac{4^{n+1}}{2^{n+1} + 1} - \frac{4^n}{2^n + 1}$,

所以 $c_n - c_{n-1} = \frac{4^{n+1}}{2^{n+1} + 1} - \frac{4^n}{2^n + 1} - \frac{4^n}{2^n + 1} + \frac{4^{n-1}}{2^{n-1} + 1} = \frac{2^{4n-1} + 2^{3n-2} + 3 \cdot 2^{3n-1} + 9 \cdot 2^{2n-2}}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)(2^{n-1} + 1)} > 0$,

故 $\{c_n\}$ 单调递增, 且 $c_1 = b_2 - b_1 = \frac{16}{5} - \frac{4}{3} = \frac{28}{15} > 1$, 此时满足“优美数列”;

综上, $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 4 \end{cases}$ 时 $\{b_n\}$ 是“优美数列”.

【点睛】关键点点睛: 第三问, 根据题设得到 $1 < a_1(q-1) \leq 3$, 结合 $a_n \in \mathbf{N}^*$ 讨论 a_1, q 为关键.

8. 给定数列 $\{A_n\}$, 若对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \neq n$, $A_m + A_n$ 是 $\{A_n\}$ 中的项, 则称 $\{A_n\}$ 为“H 数列”; 若对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \neq n$, $A_m A_n$ 是 $\{A_n\}$ 中的项, 则称 $\{A_n\}$ 为“J 数列”.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2^n - 1$, 试判断数列 $\{a_n\}$ 是否为“J 数列”, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 既是等比数列又是“J 数列”, 且 $b_1 = 8$, $b_2 \geq 16$, 求公比 q 的所有可能值;

(3) 设等差数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, T_n 是数列 $\{c_n\}$ 中的项, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是“H 数列”.

【答案】(1)是，理由见解析

(2) q 的所有可能值为2， $2\sqrt{2}$ ，8.

(3)证明见解析

【知识点】写出等比数列的通项公式、利用 a_n 与 S_n 关系求通项或项、数列新定义

【分析】(1) 由 $a_n = \begin{cases} a_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$ ，可求通项公式；

(2) 由 $b_1 = 8$ ， $b_2 \geq 16$ ，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，可得 $q \geq 2$ ，进而由 $b_m b_n = 8q^{m-1} \times 8q^{n-1} = 64q^{m+n-2}$ 也为数列中的项，可得 $q^{k-m-n+1} = 8$ ，可求 q 的所有可能值.

(3) 设数列 $\{c_n\}$ 的公差为 d ，可得 $nc_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = c_1 + (k-1)d$ ，分 $d = 0$ 和 $d \neq 0$ 两种情况可得 $\{c_n\}$ 是“ H 数列”.

【详解】(1) 因为 $S_n = 2^n - 1$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1}$ ，

当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 1$ 也成立，

所以 $a_n = 2^{n-1}$ ，

所以对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \neq n$ ， $a_m a_n = 2^{m-1} \times 2^{n-1} = 2^{m+n-2} = a_{m+n-1}$ ，

$\{a_n\}$ 是“ J 数列”

(2) 因为 $b_1 = 8$ ， $b_2 \geq 16$ ，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列

所以 $b_n = 8q^{n-1}$ ，且 $q \geq 2$ ，

由已知得 $b_m b_n = 8q^{m-1} \times 8q^{n-1} = 64q^{m+n-2}$ 也为数列中的项，

令 $b_m b_n = b_k$ ($k \in \mathbf{N}^*$)，得 $8q^{m-1} \times 8q^{n-1} = 8q^{k-1}$ ，

即 $64q^{m+n-2} = 8q^{k-1}$ ，

即得 $8q^{m+n-1} = q^k$ ，

所以 $q^{k-m-n+1} = 8$ ，

因为 $q \geq 2$ 且 $k - m - n + 1 \in \mathbf{N}^*$

故 q 的所有可能值为2， $2\sqrt{2}$ ，8.

(3) 设数列 $\{c_n\}$ 的公差为 d ，所以存在 $k \in \mathbf{N}^*$ ，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $T_n = c_k$ ，

$$\text{即 } nc_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = c_1 + (k-1)d,$$

当 $d = 0$ 时, 则 $c_1 = 0$, 故 $c_k = 0$, 此时数列为“ H 数列”;

$$\text{当 } d \neq 0 \text{ 时, } k = (n-1)\frac{c_1}{d} + \frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

$$\text{取 } n = 2, \text{ 则 } k = \frac{c_1}{d} + 2, \text{ 所以 } \frac{c_1}{d} \geq -1, \frac{c_1}{d} \in \mathbb{Z},$$

$$\text{当 } \frac{c_1}{d} = -1 \text{ 时, } k = \frac{n(n-3)}{2} + 2 \text{ 均为正整数, 符合题意,}$$

$$\text{当 } \frac{c_1}{d} \in \mathbb{N} \text{ 时, } k = (n-1)\frac{c_1}{d} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 \text{ 均为正整数, 符合题意,}$$

$$\text{所以 } \frac{c_1}{d} \geq -1, \frac{c_1}{d} \in \mathbb{Z},$$

$$\text{设 } \frac{c_1}{d} = s, s \geq -1, s \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } c_1 = sd,$$

$$\text{所以任意 } m, n \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } m \neq n, c_m + c_n = sd + (s + m + n - 2)d,$$

显然 $s + m + n - 2 \in \mathbb{N}$, 所以 $c_m + c_n$ 为数列中的项,

所以 $\{c_n\}$ 是“ H 数列”.

【点睛】关键点点睛: 数列新定义, 弄清题意新定义的含义, 结合所学内容, 分析问题与解决问题, 以及要有较强的运算求解能力和转化与化归的思想.

9. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 4$, $a_3 - a_1 = 8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum_{i=n}^{2n} a_i$;

(2) 如果数列 $\{b_n\}$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 均满足 $b_{n+2} - b_{n+1} > b_{n+1} - b_n$, 则称 $\{b_n\}$ 为“速增数列”.

(i) 判断数列 $\{a_n\}$ 是否为“速增数列”? 说明理由;

(ii) 若数列 $\{b_n\}$ 为“速增数列”, 且任意项 $b_n \in \mathbb{Z} (n \in \mathbb{N}^*)$, $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_k = 2024$, 求正整数 k 的最大值.

【答案】(1) $a_n = 3^{n-1}$; $\sum_{i=n}^{2n} a_i = \frac{3^{2n} - 3^{n-1}}{2}$

(2) $\{a_n\}$ 是“速增数列”，理由见解析；正整数 k 的最大值为 63.

【知识点】求等比数列前 n 项和、累加法求数列通项、数列新定义、等比数列通项公式的基本量计算

【分析】(1) 由已知，列方程求出数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比，可求通项和 $\sum_{i=n}^{2n} a_i$ ；

(2) (i) 由定义证明；(ii) 由题意得 $2024 \geq \frac{k(k+1)}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，可求 k 的最大值.

【详解】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 q ，由 $a_1 + a_2 = 4$ ， $a_3 - a_1 = 8$ ，

$$\text{有 } \begin{cases} a_1 + a_1 q = 4 \\ a_1 q^2 - a_1 = 8 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases},$$

所以 $a_n = 3^{n-1}$

$$\sum_{i=n}^{2n} a_i = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n} = 3^{n-1} + 3^n + \cdots + 3^{2n-1} = \frac{3^{2n} - 3^{n-1}}{2}.$$

(2) (i) 数列 $\{a_n\}$ 是“速增数列”，理由如下：

由 $a_n = 3^{n-1}$ ，则 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3^{n+1} - 3^n = 2 \times 3^n$ ， $a_{n+1} - a_n = 3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$ ，

$2 \times 3^n > 2 \times 3^{n-1}$ ，故 $a_{n+2} - a_{n+1} > a_{n+1} - a_n$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是“速增数列”.

(ii) 数列 $\{b_n\}$ 为“速增数列”， $b_1 = 1$ ， $b_2 = 3$ ， $b_k = 2024$ ，任意项 $b_n \in \mathbb{Z} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，

$k \geq 2$ 时， $b_k = 2024 = (b_k - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_{k-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + k - 1 + k$.

即 $2024 \geq \frac{k(k+1)}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，

当 $k = 63$ 时， $\frac{k(k+1)}{2} = 2016$ ，当 $k = 64$ 时， $\frac{k(k+1)}{2} = 2080$ ，

故正整数 k 的最大值为 63.

【点睛】方法点睛：

根据“速增数列”的定义，紧紧围绕不等式 $b_{n+2} - b_{n+1} > b_{n+1} - b_n$ 进行，当 $b_1 = 1$ ， $b_2 - b_1 = 2$ 时，利用累加法的思想确定 $(b_k - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_{k-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + k - 1 + k$ 是解题的关键.

10. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 对于给定的 $k(k=1,2,3\cdots n)$ ，设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k ，公差为 $2a_k - 1$ 的等差数列 $\{a_n\}$ ，记 $T^{(k)}$ 的第 i 项为 $b_i^{(k)}$. 若 $b_1^{(1)} + b_1^{(2)} = b_2^{(2)}$ ，且 $b_2^{(1)} = b_3^{(2)}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i^{(2)} b_{i+1}^{(2)}}$ ；

(3) 求 $\sum_{i=1}^n b_i^{(k)}$.

【答案】(1) $a_n = 3 \times (\frac{2}{3})^{n-1}$ ；

(2) $\frac{n}{6n+4}$ ；

(3) $3n^2 \cdot (\frac{2}{3})^{k-1} - \frac{n(n-1)}{2}$.

【知识点】分组（并项）法求和、等比数列通项公式的基本量计算、数列新定义、裂项相消法求和

【分析】(1) 根据给定定义，可得 $b_i^{(k)} = a_k + (2a_k - 1)(i - 1)$ ，再列出方程求出 a_1, a_2 作答.

(2) 由 (1) 的信息，利用裂项相消法求和作答.

(3) 利用 (1) 的结论, 结合分组求和法及等差数列前 n 项和公式求解作答.

【详解】(1) 依题意, $b_i^{(k)} = a_k + (2a_k - 1)(i - 1), (k = 1, 2, 3, \dots, n), i \in \mathbb{N}$,

$$b_1^{(1)} = a_1, b_1^{(2)} = a_2, b_2^{(1)} = a_1 + (2a_1 - 1) = 3a_1 - 1,$$

$$b_2^{(2)} = a_2 + (2a_2 - 1) = 3a_2 - 1, b_3^{(2)} = a_2 + (2a_2 - 1) \times 2 = 5a_2 - 2,$$

$$\text{由 } b_1^{(1)} + b_1^{(2)} = b_2^{(2)} \text{ 及 } b_2^{(1)} = b_3^{(2)}, \text{ 得 } \begin{cases} a_1 + a_2 = 3a_2 - 1 \\ 3a_1 - 1 = 5a_2 - 2 \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = 3, a_2 = 2, \text{ 于是 } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3},$$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \times (\frac{2}{3})^{n-1}$.

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } b_i^{(2)} = a_2 + (2a_2 - 1)(i - 1) = 2 + 3(i - 1) = 3i - 1, \quad b_{i+1}^{(2)} = 3i + 2,$$

$$\frac{1}{b_i^{(2)} b_{i+1}^{(2)}} = \frac{1}{(3i - 1)(3i + 2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3i - 1} - \frac{1}{3i + 2} \right),$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i^{(2)} b_{i+1}^{(2)}} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{n}{6n+4}.$$

$$(3) \text{ 由 (1) 知, } b_i^{(k)} = a_k + (2a_k - 1)(i - 1) = (2i - 1)a_k - (i - 1), \quad a_k = 3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1}, (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sum_{i=1}^n b_i^{(k)} &= \sum_{i=1}^n [(2i - 1)a_k - (i - 1)] = a_k \sum_{i=1}^n (2i - 1) - \sum_{i=1}^n (i - 1) = a_k \cdot \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n - \frac{0 + (n - 1)}{2} \cdot n \\ &= n^2 a_k - \frac{n(n - 1)}{2} = 3n^2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} - \frac{n(n - 1)}{2}. \end{aligned}$$

【点睛】关键点睛: 涉及数列新定义问题, 关键是正确理解给出的定义, 由给定的数列结合新定义探求数列的相关性质, 并进行合理的计算、分析、推理等方法综合解决.