

数列小题

一、单选题

1. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n} = 0$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 为“梦想数列”，已知正项数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 为“梦想数列”，且 $b_1 + b_2 + b_3 = \frac{1}{2}$ ，则 $b_6 + b_7 + b_8 =$ ()

A. 4

B. 8

C. 16

D. 32

【答案】C

【分析】由题知 $a_n = 2a_{n+1}$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 为“梦想数列”，根据“梦想数列”的定义可得数列 $\{b_n\}$ 为公比为2的等比数列，再利用等比数列的性质求解即可.

【详解】 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n} = 0$ ，可得 $a_n = 2a_{n+1}$ ，

因为正项数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 为“梦想数列”，

所以 $\frac{1}{b_n} = 2 \times \frac{1}{b_{n+1}}$ ，即 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ ，

则数列 $\{b_n\}$ 是以2为公比的等比数列，

因为 $b_1 + b_2 + b_3 = \frac{1}{2}$ ，

所以 $b_6 + b_7 + b_8 = 2^5(b_1 + b_2 + b_3) = 32 \times \frac{1}{2} = 16$.

故选：C.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = 1 - (-2)^n$ ，则 $\{|a_n|\}$ 的前7项和为 ()

A. 189

B. 191

C. 381

D. 383

【答案】C

【详解】已知 $S_n = 1 - (-2)^n$ ，

当 $n=1$ 时， $a_1 = 1 - (-2)^1 = 3$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 1 - (-2)^n - [1 - (-2)^{n-1}] = -(-2)^n + (-2)^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ ，

$n=1$ 时， $3 \cdot (-2)^0 = 3$ ，

$$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1},$$

$\therefore |a_n| = |3 \cdot (-2)^{n-1}| = 3 \cdot 2^{n-1}$, 故 $\{|a_n|\}$ 是首项为 3, 公比为 2 的等比数列,

$$\therefore \{|a_n|\} \text{ 的前 7 项和为: } T_7 = \frac{3(1-2^7)}{1-2} = 3(2^7-1) = 3 \times 127 = 381.$$

3. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 1$, $b_n = \log_2 a_{n+1}$, 则 $\sum_{i=2}^{10} b_i =$ ()

A. 52

B. 53

C. 54

D. 55

【答案】C

【分析】应用 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 得出等比数列, 再应用通项公式得出 $a_n = 2^{n-1}$, 进而得出 $b_n = n$, 最后应用等差数列求和公式计算求解.

【详解】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 1$,

令 $n=1$ 时, $a_1 = 2a_1 - 1$, 所以 $a_1 = 1$,

所以当 $n \geq 2$, $S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - (2a_{n-1} - 1)$,

所以 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$, 即得 $a_n = 2a_{n-1}$,

即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项以 2 为公比的等比数列,

所以 $a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$, 所以 $b_n = \log_2 2^n = n$,

$$\text{则 } \sum_{i=2}^{10} b_i = 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 = \frac{9(2+10)}{2} = 54.$$

4. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_n + S_n = 2^n$, 则 $(2a_2 - a_1)(2a_3 - a_2) \cdots (2a_{100} - a_{99}) =$ ()

A. 2^{2050}

B. 2^{5000}

C. 2^{4980}

D. 2^{4950}

【答案】D

【分析】由 $a_n + S_n = 2^n$ 可得 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1} + S_{n-1} = 2^{n-1}$, 所以 $2a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$, 分别代入 $n=2, 3, 4, 5, \cdots, 100$ 即可得到结果.

【详解】由 $a_n + S_n = 2^n$ ①, 可得 $n=1$ 时, $a_1 = 1$,

$n \geq 2$ 时, $a_{n-1} + S_{n-1} = 2^{n-1}$ ②, 则 ① - ② 得 $a_n - a_{n-1} + S_n - S_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$,

即 $2a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$ ，分别代入 $n=2, 3, 4, 5, \dots, 100$ ，再相乘得到：

$$(2a_2 - a_1)(2a_3 - a_2) \cdots (2a_{100} - a_{99}) = 2^1 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{99} = 2^{1+2+3+\cdots+99} = 2^{\frac{99 \times (1+99)}{2}} = 2^{4950}.$$

故选：D.

5. 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^n - 1)b_n = 2n$ ，则 $b_5 =$ ()

- A. 32 B. 10 C. $\frac{2}{31}$ D. $\frac{1}{8}$

【答案】C

【分析】由 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^n - 1)b_n = 2n$ ，分两步，当 $n=1$ 求出 b_1 ，当 $n \geq 2$ 时得到 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^{n-1} - 1)b_{n-1} = 2n - 2$ ，两式作差即可求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，即可求解.

【详解】因为 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^n - 1)b_n = 2n$ ①，当 $n=1$ 时， $b_1 = 2$ ，

当 $n \geq 2$ 时 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^{n-1} - 1)b_{n-1} = 2n - 2$ ②，

①减②得 $(2^n - 1)b_n = 2$ ，所以 $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$ ，当 $n=1$ 时 $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$ 也成立，

所以 $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$ ，所以 $b_5 = \frac{2}{31}$.

故选：C

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数， S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_{n+1} = \frac{2S_n}{a_n}$ ，则 a_{12} 的值为 ()

- A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

【答案】C

【分析】根据 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 计算求解得出 $a_{n+1} - a_{n-1} = 2$ 结合 $a_2 = 2$ ，计算求解.

【详解】因为 $a_{n+1} = \frac{2S_n}{a_n}$ ，则 $a_n a_{n+1} = 2S_n$ ，

当 $n \geq 2$ 时，则 $a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n$ ，且 $a_n > 0$ ，所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = 2$ ，

当 $n=1$ 时， $a_1 a_2 = 2S_1$ ，且 $a_n > 0$ ，即 $a_2 = 2$ ，

则 $a_{12} = a_2 + 5 \times 2 = 12$.

故选：C.

7. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_{n+1} = 2S_n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ ， $S_2 = 4$ ，则 a_{20} 等于 ()

A. 2^{19}

B. 4^{19}

C. 4^{20}

D. 2^{20}

【答案】A

【分析】利用已知条件求出数列前20项的和以及前19项的和，然后求解即可.

【详解】因为 $S_{n+1} = 2S_n$ ，所以数列 $\{S_n\}$ 是以 S_1 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $S_n = S_2 \times 2^{n-2} = 2^n$ ，

所以 $S_{20} = 2^{20}$ ， $S_{19} = 2^{19}$ ，

所以 $a_{20} = S_{20} - S_{19} = 2^{20} - 2^{19} = 2^{19}$ ，

故选：A

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = 2a_n - 2^n$ ，则 ()

A. $5a_8 > 4a_9$

B. $5a_8 < 4a_9$

C. $5S_8 > 4a_9$

D. $5S_8 < 4a_9$

【答案】B

【分析】当 $n=1$ 时，可求出 a_1 的值，当 $n \geq 2$ 时，由 $S_n = 2a_n - 2^n$ 可得 $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2^{n-1}$ ，两式作差可判断出数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列，确定该数列的首项和公差，可求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，即可得出 S_n 的表达式，逐项判断即可.【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = 2a_n - 2^n$ ，

当 $n=1$ 时， $a_1 = S_1 = 2a_1 - 2$ ，解得 $a_1 = 2$ ，

当 $n \geq 2$ 时，由 $S_n = 2a_n - 2^n$ 可得 $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2^{n-1}$ ，

上述两个等式作差可得 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1} - 2^{n-1}$ ，整理可得 $a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}$ ，

等式 $a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}$ 两边同时除以 2^n 可得 $\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}$ ，

所以，数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{2} = 1$ ，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，

故 $\frac{a_n}{2^n} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$ ，所以 $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-1}$ ，

故 $5a_8 = 5 \times 9 \times 2^7 = 45 \times 2^7$ ， $4a_9 = 4 \times 10 \times 2^8 = 80 \times 2^7$ ，故 $5a_8 < 4a_9$ ，A 错 B 对；

由题意可得 $S_n = 2a_n - 2^n = (n+1) \cdot 2^n - 2^n = n \cdot 2^n$ ，

所以 $5S_8 = 5 \times 8 \times 2^8 = 80 \times 2^7 = 4a_9$ ，CD 都错.

故选：B.

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_n > 0$ ， $4S_n = a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} + 1$ ，将数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{n^2 - 1\}$ 的公共项从小到大排列得到新数列 $\{c_n\}$ ，则 $\sum_{i=1}^{20} \frac{2}{c_i} = ()$

A. $\frac{40}{41}$

B. $\frac{80}{41}$

C. $\frac{20}{21}$

D. $\frac{40}{21}$

【答案】A

【分析】根据 S_n 与 a_n 之间的关系求得 $a_n = 2n - 1$ ，可得 $c_n = 4n^2 - 1$ ，则 $\frac{2}{c_n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ ，结合裂项法求和，即可求解.

【详解】因为 $a_n > 0$ ， $4S_n = a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} + 1$ ，

当 $n \geq 2$ 时，则 $4S_{n-1} = a_n^2 - 2a_n + 1$ ，

两式相减得 $4a_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 - 2a_{n+1} + 2a_n$ ，

整理可得 $(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0$ ，

且 $a_n > 0$ ，则 $a_{n+1} + a_n > 0$ ，可得 $a_{n+1} - a_n - 2 = 0$ ，即 $a_{n+1} - a_n = 2$ ，

可知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = 2$ ，

当 $n = 1$ 时，则 $4a_1 = a_2^2 - 2a_2 + 1 = (a_1 + 2)^2 - 2(a_1 + 2) + 1$ ，解得 $a_1 = 1$ ；

所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$ ，可知数列 $\{a_n\}$ 为正奇数列，

对于数列 $\{n^2 - 1\}$ ，

当 $n = 2k - 1 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，可得 $n^2 - 1 = (2k - 1)^2 - 1 = 4k(k - 1)$ 为偶数；

当 $n = 2k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，可得 $n^2 - 1 = 4k^2 - 1$ 为奇数；

所以数列 $\{a_n\}$ 与 $\{n^2 - 1\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{c_n\}$ 的通项公式为 $c_n = 4n^2 - 1$ ，

$$\text{则 } \frac{2}{c_n} = \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{20} \frac{2}{c_i} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{39} - \frac{1}{41} = 1 - \frac{1}{41} = \frac{40}{41}.$$

故选：A.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{4^n - 1}{3}$, 则数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 的前 n 项和 $T_n = ()$

- A. $2^n - 1$ B. $\sqrt{\frac{4^n - 1}{3}}$ C. $\frac{2^n - 1}{3}$ D. $2^{n-1} - 1$

【答案】A

【分析】先求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；再判断出 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是等比数列；最后利用等比数列的求和公式即可求解.

【详解】当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{4^1 - 1}{3} = 1$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{4^n - 1}{3} - \frac{4^{n-1} - 1}{3} = 4^{n-1} = 2^{2(n-1)}$, 又 $a_1 = 1$ 符合上式,

所以 $a_n = 2^{2(n-1)}$, 所以 $\sqrt{a_n} = 2^{n-1}$,

所以数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是以1为首项, 2为公比的等比数列,

所以 $T_n = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1$.

故选: A.

11. 记 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\frac{2}{T_n} + \frac{1}{a_n} = 1$, 则 $T_{12} = ()$

- A. 23 B. 24 C. 25 D. 26

【答案】C

【分析】当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}}$ 可得 $T_n - T_{n-1} = 2$, 进一步可得数列 $\{T_n\}$ 是等差数列, 并求得其通项公式, 即可求出 T_{12} ;

【详解】因为 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积,

当 $n=1$ 时, $T_1 = a_1$, 所以 $\frac{2}{T_1} + \frac{1}{a_1} = \frac{3}{a_1} = 1$, $\therefore a_1 = 3$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}}$, 所以 $\frac{2}{T_n} + \frac{T_{n-1}}{T_n} = \frac{2 + T_{n-1}}{T_n} = 1$,

化简可得: $T_n - T_{n-1} = 2$,

所以 $\{T_n\}$ 是以 $T_1 = a_1 = 3$ 为首项, 2为公差的等差数列,

所以 $T_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$.

所以 $T_{12} = 2 \times 12 + 1 = 25$.

故选：C.

12. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_{n+1} = 2\sqrt{S_n} + 1$ ，且 $a_1 = 1$ ，则 ()

A. $a_5 < 5$

B. $a_5 > 10$

C. $S_{100} > 1000$

D. $S_{100} < 10000$

【答案】C

【分析】根据给定条件，利用 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ，结合已知变形构造数列，求出 S_n ，进而求出 a_n 即可判断得解.

【详解】数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_{n+1} = 2\sqrt{S_n} + 1$ ，得 $S_{n+1} - S_n = 2\sqrt{S_n} + 1$ ，整理得 $S_{n+1} = (\sqrt{S_n} + 1)^2$ ，
则 $\sqrt{S_{n+1}} = \sqrt{S_n} + 1$ ，数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 $\sqrt{S_1} = \sqrt{a_1} = 1$ 为首项，1 为公差的等差数列，
于是 $\sqrt{S_n} = n \Rightarrow a_{n+1} = 2n + 1$ ，即 $S_n = n^2, a_n = 2n - 1 (n \geq 2)$ ，而 $a_1 = 1$ 满足上式，
因此 $S_n = n^2, a_n = 2n - 1$ ， $a_5 = 9$ ， $S_{100} = 10000$ ，ABD 错误，C 正确.

故选：C

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_{n+1} = S_n + 1$ ，则数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 ()

A. $\frac{4^n - 1}{3}$

B. $\frac{2^n - 1}{3}$

C. $4^n - 1$

D. $2^n - 1$

【答案】A

【分析】根据 a_n, S_n 关系求出 $a_n = 2^{n-1}$ ，最后再根据等比数列前 n 项和公式计算求解即可.

【详解】因为 $a_{n+1} = S_n + 1$ ，所以当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_{n-1} + 1$ ，两式相减，得 $a_{n+1} = 2a_n$ ，
因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_2 = 2a_1$.
由 $a_2 = S_1 + 1 = a_1 + 1$ ，解得 $a_1 = 1$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，
所以 $a_n = 2^{n-1}$ ，即 $a_n^2 = (2^{n-1})^2 = 4^{n-1}$ ，所以数列 $\{a_n^2\}$ 是首项为 1，公比为 4 的等比数列，
所以数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1-4^n}{1-4} = \frac{4^n - 1}{3}$.

故选：A.

14. 已知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 4n + 1$ ，则 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{10}|$ 的值为 ()

A. 65

B. 67

C. 61

D. 56

【答案】B

【分析】由题意结合 a_n, S_n 的关系得到 $\{a_n\}$ 的通项公式，再通过分组求和等差数列求和公式即可得解.

【详解】由题意 $a_1 = S_1 = 1 - 4 + 1 = -2$ ，当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时，

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 4n + 1) - [(n-1)^2 - 4(n-1) + 1] = 2n - 5,$$

$$\text{所以 } |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{10}| = 2 + 1 + (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) = 3 + \frac{8 \times (1+15)}{2} = 67.$$

故选：B.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_{n+1} = \frac{4S_n - 1}{2n - 1}$ ， $a_1 = 1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$

()

A. n B. $n+1$ C. $2n-1$ D. $2n+1$

【答案】C

【解析】利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$) 证得数列 $\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$ 为常数列，并由此求得 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【详解】由 $a_{n+1} = \frac{4S_n - 1}{2n - 1}$ ，得 $(2n-1)a_{n+1} = 4S_n - 1$ ，可得 $(2n-3)a_n = 4S_{n-1} - 1$ ($n \geq 2$) .

相减得 $(2n+1)a_n = (2n-1)a_{n+1}$ ，则 $\frac{a_n}{2n-1} = \frac{a_{n+1}}{2n+1}$ ($n \geq 2$)，又

由 $a_{n+1} = \frac{4S_n - 1}{2n - 1}$ ， $a_1 = 1$ ，得 $a_2 = 3$ ，所以 $\frac{a_1}{2 \times 1 - 1} = \frac{a_2}{2 \times 1 + 1}$ ，所以 $\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$ 为常

数列，所以 $\frac{a_n}{2n-1} = \frac{a_1}{2 \times 1 - 1} = 1$ ，故 $a_n = 2n - 1$.

故选：C

【点睛】本小题考查数列的通项与前 n 项和的关系等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力，应用意识.