

放缩练习

一、解答题

1. 设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = a_n^2 + a_n$ 。

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $b_n = \frac{1}{2^{a_n} - 1}$ ，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明： $T_n < 2$ 。

【答案】(1) $a_n = n$

(2)证明见解析

【分析】(1) 利用 a_n, S_n 的关系，结合已知条件以及等差数列的通项公式即可求得结果；

(2) 根据(1)中所求，应用放缩及等比数列的前 n 项和公式求得 T_n ，即可证明。

【详解】(1) 依题意，当 $n=1$ 时， $2S_1 = 2a_1 = a_1^2 + a_1$ ， $a_n > 0$ ，则 $a_1 = 1$ ；

当 $n \geq 2$ 时， $2S_n = a_n^2 + a_n$ ， $2S_{n-1} = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$ ，两式相减，

整理可得 $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 1) = 0$ ，又 $\{a_n\}$ 为正项数列，故 $a_n - a_{n-1} = 1$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项， $d = 1$ 为公差的等差数列，

所以 $a_n = n$ 。

(2) 证明：由(1)可知 $a_n = n$ ，所以 $b_n = \frac{1}{2^n - 1}$ ，显然 $T_1 = b_1 = 1 < 2$ ，

当 $n \geq 2$, 则 $2^n - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 > 2^{n-1}$, 即 $\frac{1}{2^n - 1} < \frac{1}{2^{n-1}}$,

$$\text{此时 } T_n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2,$$

综上, $T_n < 2$ 成立.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \frac{1}{(2a_n - 1)(2a_n + 3)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 R_n ;

(3) 令 $c_n = \frac{1}{a_n(a_n + 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 M_n , 证明: 对一切正整数 n , $M_n < \frac{1}{3}$ 恒成立.

【答案】(1) $a_n = 2n$

(2) $\frac{1}{12} - \frac{1}{16n+12}$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据 a_n 与 S_n 的关系求解即可.

(2) 根据裂项相消法求和即可.

(3) 结合放缩法得到 $c_n < 4b_n$, 再求和证明即可.

【详解】(1) 当 $n=1$ 时, $S_1 = T_1 = 2$;

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = T_n - T_{n-1} = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}(n-1)^3 - (n-1)^2 - \frac{2}{3}(n-1) = n^2 + n$,

$S_1 = 2$ 也满足上式;

故 $S_n = n^2 + n$.

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - [(n-1)^2 + (n-1)] = 2n$,

$a_1 = 2$ 也满足上式;

综上, $a_n = 2n$.

$$(2) \quad b_n = \frac{1}{(2a_n - 1)(2a_n + 3)} = \frac{1}{(4n - 1)(4n + 3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n - 1} - \frac{1}{4n + 3} \right),$$

故数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$R_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{4n - 1} - \frac{1}{4n + 3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n + 3} \right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{16n + 12}.$$

$$(3) \quad c_n = \frac{1}{a_n(a_n + 1)} = \frac{1}{2n(2n + 1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n\left(n + \frac{1}{2}\right)},$$

又对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$: $n^2 + \frac{n}{2} > n^2 + \frac{n}{2} - \frac{3}{16} = \left(n - \frac{1}{4}\right)\left(n + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{16}(4n - 1)(4n + 3)$,

$$\text{所以 } c_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n\left(n + \frac{1}{2}\right)} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{16}(4n - 1)(4n + 3)} = \frac{4}{(4n - 1)(4n + 3)} = 4b_n,$$

$$\text{故 } M_n < 4 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16n + 12} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4n + 3} < \frac{1}{3}.$$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且边长为 n 的正方形的面积为 S_n .

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\left\{a_n \cdot (\sqrt{2})^{a_n+1}\right\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(3) 若数列 $\left\{\frac{1}{a_{n+1}(a_n + 1)}\right\}$ 的前 n 项和为 H_n , 证明: $H_n < \frac{1}{3}$.

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$

(2) $T_n = (2n - 3) \times 2^{n+1} + 6$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 求出 $S_n = n^2$, 根据 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ 可得出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求得 $a_n \cdot (\sqrt{2})^{a_n+1} = (2n-1) \cdot 2^n$, 利用错位相减法可求得 T_n 的表达式;

(3) 分析可知当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_{n+1}(a_n+1)} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 验证 $H_1 < \frac{1}{3}$, 当 $n \geq 2$ 时, 利用放缩法结合裂项求和法可证明出 $H_n < \frac{1}{3}$, 即可证得所求不等式成立.

【详解】(1) 由题意得 $S_n = n^2$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$, 满足 $a_n = 2n - 1$.

故对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = 2n - 1$.

(2) 由 (1) 得 $a_n \cdot (\sqrt{2})^{a_n+1} = (2n-1) \cdot 2^n$,

则 $T_n = 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \times 2^n$,

$$2T_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \cdots + (2n-1) \times 2^{n+1},$$

两式相减得 $-T_n = 2 + 2 \times (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n-1) \times 2^{n+1}$

$$= 2 + 2 \times \frac{2^2 \times (1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (2n-1) \times 2^{n+1} = (-2n+3) \times 2^{n+1} - 6,$$

所以 $T_n = (2n-3) \times 2^{n+1} + 6$.

$$(3) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{a_{n+1}(a_n+1)} = \frac{1}{(2n+1) \times 2n} < \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{所以 } H_1 = \frac{1}{6} < \frac{1}{3},$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$H_n < \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{3},$$

故对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $H_n < \frac{1}{3}$.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \lambda a_n + 1$ (λ 为常数).

(1) 是否存在常数 λ , 使得 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列? 若存在, 求出 λ 的值, 若不存在, 请说明理由;

(2) 在 (1) 的结论下, 当 $\{a_n\}$ 为递增数列时, 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

【答案】(1) 存在, $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$;

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 假设 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列, 应用等比中项的性质列方程求参数, 再验证即可得结论;

(2) 根据 (1) 及已知得 $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$, 应用放缩法及等比数列前 n 项和公式即可证.

【详解】(1) 由已知得 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 前三项分别为 $\frac{3}{2}$, $\lambda + \frac{3}{2}$, $\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{2}$,

假设 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列, 则 $\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{2}\right)$, 解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$,

当 $\lambda = 0$ 时, $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 是每一项均为 $\frac{3}{2}$ 的常数列, 也是等比数列;

当 $\lambda = 3$ 时, $\frac{a_{n+1} + \frac{1}{2}}{a_n + \frac{1}{2}} = 3$, 则 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 以 $a_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 为首项, 3 为公比的等比数列;

(2) 由 (1) 知, $\lambda = 3$ 时 $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ 为递增数列, 显然 $a_1 = \frac{1}{2} \times (3^1 - 1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a_1} = 1 < \frac{3}{2}$,

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{2}{3^n - 1} < \frac{1}{3^{n-1}}$, 则

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) < \frac{3}{2},$$

综上, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$, 得证.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 3}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$, 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列, 并求其通项公式;

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中任取三项 a_s, a_t, a_r ($s, t, r \in \mathbf{N}^*$) 作为三条线段的长, 这三条线段能否组成三角形? 请说明理由;

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n (a_k - 1) < \frac{4}{3}$.

【答案】(1)证明见解析, $b_n = \frac{1}{4^n}$

(2)可以, 证明见解析

(3)证明见解析

【分析】(1) 由题设易得 $\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a_n-1}{a_n+2}$, 可得 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{4}$, 进而结合等比数列的定义求证即可, 再根据等比数列的通项公式求解即可;

(2) 由(1)可得 $a_n = 1 + \frac{3}{4^n - 1}$, 易得 $1 < 1 + \frac{3}{4^n - 1} \leq 2$, 设 $a_s \leq a_t \leq a_r$, 再根据三角形的成立条件求解即可;

(3) 结合(2)可得 $a_n - 1 = \frac{3}{4^n - 1} \leq \frac{1}{4^{n-1}}$, 进而求证即可.

【详解】(1) 由 $a_{n+1} = \frac{2a_n+2}{a_n+3}$,

$$\text{可得 } a_{n+1} - 1 = \frac{2a_n+2}{a_n+3} - 1 = \frac{a_n-1}{a_n+3}, \quad a_{n+1} + 2 = \frac{2a_n+2}{a_n+3} + 2 = \frac{4(a_n+2)}{a_n+3},$$

$$\text{所以 } \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a_n-1}{a_n+2},$$

$$\text{因为 } b_n = \frac{a_n-1}{a_n+2}, \text{ 所以 } b_{n+1} = \frac{1}{4} b_n, \text{ 即 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{4},$$

$$\text{又因为 } a_1 = 2, \text{ 可得 } b_1 = \frac{a_1-1}{a_1+2} = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4},$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列, 则 $b_n = \frac{1}{4^n}$.

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } b_n = \frac{a_n-1}{a_n+2} \text{ 且 } b_n = \frac{1}{4^n},$$

$$\text{可得 } a_n = \frac{2b_n+1}{1-b_n} = \frac{2 \times \frac{1}{4^n} + 1}{1 - \frac{1}{4^n}} = \frac{4^n + 2}{4^n - 1} = \frac{(4^n - 1) + 3}{4^n - 1} = 1 + \frac{3}{4^n - 1},$$

$$\text{因为 } 4^n - 1 \geq 3, \text{ 所以 } 0 < \frac{1}{4^n - 1} \leq \frac{1}{3}, \text{ 所以 } 1 < 1 + \frac{3}{4^n - 1} \leq 2,$$

$$\text{即 } 1 < a_s \leq 2, 1 < a_t \leq 2, 1 < a_r \leq 2,$$

不妨设 $a_s \leq a_t \leq a_r$, 有 $a_s + a_t > 2 \geq a_r$, 所以可以组成三角形.

$$(3) \text{ 由 (2) 知, } a_n = 1 + \frac{3}{4^n - 1},$$

$$\text{因为 } \frac{3}{4^n-1} - \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{3 \times 4^{n-1} - 4^n + 1}{(4^n-1) \times 4^{n-1}} = \frac{1-4^{n-1}}{(4^n-1) \times 4^{n-1}},$$

因为 $4^{n-1} \geq 1$ 显然成立（当且仅当 $n=1$ 时等号成立），

$$\text{所以 } \frac{3}{4^n-1} - \frac{1}{4^{n-1}} \leq 0, \text{ 即 } a_n - 1 = \frac{3}{4^n-1} \leq \frac{1}{4^{n-1}},$$

$$\text{因此 } \sum_{k=1}^n (a_k - 1) \leq \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \times 4^{n-1}} < \frac{4}{3}.$$

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，且 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列。

(1) 求 a_1 的值；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(3) 证明：对一切正整数 n ，有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$ 。

【答案】(1) $a_1 = 1$

(2) $a_n = 3^n - 2^n$

(3) 证明见解析

【详解】解法一：(1) 因为 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1, 2S_{n+1} = a_{n+2} - 2^{n+2} + 1$ ，两式相减得

$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2^{n+1}$ ， $2S_1 = a_2 - 3, a_2 = 2a_1 + 3, a_3 = 3a_2 + 4 = 6a_1 + 13, a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列

$$\Rightarrow a_1 + a_3 = 2(a_2 + 5) \Rightarrow a_1 = 1;$$

(2) 由 $a_1 = 1, a_2 = 5$ 得, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 均成立, 可知 $a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n)$, 故数列 $\{a_n + 2^n\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列, 故 $a_n + 2^n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$, 所以 $a_n = 3^n - 2^n$.

(3) 由于 $3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, 所以 $3^n - 2^n \geq 3^{n-1}$, 所以 $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{3^{n-1}}$, 于是

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] < \frac{3}{2}.$$

解法二: 由探路, 即令 $\frac{1}{1-q} = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{3}$, 故即证: $\frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{3^n - 2^n} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \cdot 2^{n-1} \geq 2^n$ 成立, 得证.

7. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项和为 64. $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列,

$$b_1 = 4, b_3 - b_2 = 48.$$

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}, n \in \mathbf{N}^*$,

(i) 证明 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是等比数列;

(ii) 证明 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2} (n \in \mathbf{N}^*)$

【答案】(I) $a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = 4^n, n \in \mathbf{N}^*$; (II) (i) 证明见解析; (ii) 证明见解析.

【分析】(I) 由等差数列的求和公式运算可得 $\{a_n\}$ 的通项, 由等比数列的通项公式运算可得

$\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) (i) 运算可得 $c_n^2 - c_{2n} = 2 \cdot 4^n$, 结合等比数列的定义即可得证;

(ii) 放缩得 $\frac{a_n a_{n+1}}{c_n^2 - c_{2n}} < \frac{4n^2}{2 \cdot 2^{2n}}$, 进而可得 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}}$, 结合错位相减法即可得证.

【详解】(I) 因为 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项和为 64.

所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times 2 = 64$, 所以 $a_1 = 1$,

所以 $a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n-1, n \in N^*$;

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

所以 $b_3 - b_2 = b_1 q^2 - b_1 q = 4(q^2 - q) = 48$, 解得 $q = 4$ (负值舍去),

所以 $b_n = b_1 q^{n-1} = 4^n, n \in N^*$;

(II) (i) 由题意, $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n} = 4^{2n} + \frac{1}{4^n}$,

所以 $c_n^2 - c_{2n} = \left(4^{2n} + \frac{1}{4^n}\right)^2 - \left(4^{4n} + \frac{1}{4^{2n}}\right) = 2 \cdot 4^n$,

所以 $c_n^2 - c_{2n} \neq 0$, 且 $\frac{c_{n+1}^2 - c_{2n+2}}{c_n^2 - c_{2n}} = \frac{2 \cdot 4^{n+1}}{2 \cdot 4^n} = 4$,

所以数列 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是等比数列;

(ii) 由题意知, $\frac{a_n a_{n+1}}{c_n^2 - c_{2n}} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4^n} = \frac{4n^2 - 1}{2 \cdot 2^{2n}} < \frac{4n^2}{2 \cdot 2^{2n}}$,

所以 $\sqrt{\frac{a_n a_{n+1}}{c_n^2 - c_{2n}}} < \sqrt{\frac{4n^2}{2 \cdot 2^{2n}}} = \frac{2n}{\sqrt{2} \cdot 2^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n}{2^{n-1}}$,

所以 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}}$,

设 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$,

则 $\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$,

两式相减得 $\frac{1}{2} T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$,

所以 $T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$,

所以 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}\right) < 2\sqrt{2}$.

【点睛】关键点点睛:

最后一问考查数列不等式的证明，因为 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}}$ 无法直接求解，应先放缩去除根号，再由错位相减法即可得证.