

放缩练习

一、解答题

1. 设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = a_n^2 + a_n$ 。

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n = \frac{1}{2^{a_n} - 1}$ ，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明： $T_n < 2$ 。

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n$ 。

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $b_n = \frac{1}{(2a_n - 1)(2a_n + 3)}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 R_n ；

(3)令 $c_n = \frac{1}{a_n(a_n + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 M_n ，证明：对一切正整数 n ， $M_n < \frac{1}{3}$ 恒成立。

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且边长为 n 的正方形的面积为 S_n ．

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求 $\left\{a_n \cdot (\sqrt{2})^{a_n+1}\right\}$ 的前 n 项和 T_n ；

(3)若数列 $\left\{\frac{1}{a_{n+1}(a_n+1)}\right\}$ 的前 n 项和为 H_n ，证明： $H_n < \frac{1}{3}$ ．

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ ， $a_{n+1}=\lambda a_n+1$ （ λ 为常数）．

(1)是否存在常数 λ ，使得 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 为等比数列？若存在，求出 λ 的值，若不存在，请说明理由；

(2)在（1）的结论下，当 $\{a_n\}$ 为递增数列时，证明： $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$ ．

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 3}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$, 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列, 并求其通项公式;

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中任取三项 a_s, a_t, a_r ($s, t, r \in \mathbf{N}^*$) 作为三条线段的长, 这三条线段能否组成三角形? 请说明理由;

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n (a_k - 1) < \frac{4}{3}$.

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列.

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

7. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项和为 64. $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列,

$$b_1 = 4, b_3 - b_2 = 48.$$

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}, n \in N^*$,

(i) 证明 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是等比数列;

(ii) 证明 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2} (n \in N^*)$