

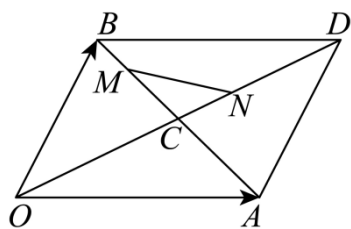
平面向量

一、填空题

1. 如图所示, $OADB$ 是平行四边形, $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$, C 是其对角线的交点,

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. 用 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 表示向量 $\overrightarrow{CM} =$ _____, $\overrightarrow{CN} =$

_____.



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_1$ $\frac{1}{6}\vec{e}_1 + \frac{1}{6}\vec{e}_2$

【分析】根据向量的加法与减法计算即可.

【详解】因为 C 是 $\square OADB$ 对角线的交点, 所以 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

因为 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,

所以 $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) = \frac{1}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_1$.

由向量加法的平行四边形法则可知, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

所以 $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{6}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \frac{1}{6}\vec{e}_1 + \frac{1}{6}\vec{e}_2$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 2$, $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DC}$, F 为 AD 与 BE 的交点, 记 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$,

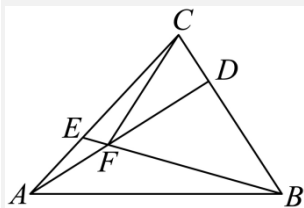
$\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, 则用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{CF} =$ _____; 向量 $\overrightarrow{CF}$ 在 $\overrightarrow{CA}$ 上的投影向量的模的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{4}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

【分析】 设 $\overrightarrow{CF} = \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CD} = \frac{3\lambda}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{\mu}{3}\overrightarrow{CB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$)，利用 A, F, D 三点共线， B, F, E 三

点共线，得到 $\begin{cases} \lambda = \frac{4}{7} \\ \mu = \frac{3}{7} \end{cases}$ ，最后求出投影向量，利用基本不等式即可求解.

【详解】 设 $\overrightarrow{CF} = \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CD} = \frac{3\lambda}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{\mu}{3}\overrightarrow{CB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$)



如图，因为 A, F, D 三点共线， B, F, E 三点共线，所以 $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \frac{3\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} = 1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} \lambda = \frac{4}{7} \\ \mu = \frac{3}{7} \end{cases}$ ，

所以 $\overrightarrow{CF} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{CD} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{CB} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$ ，

$$\frac{\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} = \frac{1}{7} \times \frac{(4\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} = \frac{1}{7} \left(4|\overrightarrow{CA}| + \frac{2}{|\overrightarrow{CA}|} \right) \geq \frac{2}{7} \sqrt{4|\overrightarrow{CA}| \times \frac{2}{|\overrightarrow{CA}|}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

当且仅当 $4|\overrightarrow{CA}| = \frac{2}{|\overrightarrow{CA}|}$ ，即 $|\overrightarrow{CA}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

向量 $\overrightarrow{CF}$ 在 $\overrightarrow{CA}$ 上的投影向量的模的最小值为 $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

故答案为： $\frac{4}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$ ， $\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ，点 D, E 满足 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BD}$ ， $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$ ， CB 与 AE 交于

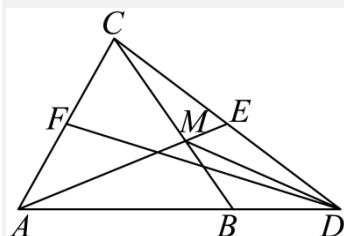
点 M ，记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MB} =$ _____；若 F 为 AC 的中点，

$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{3}{4} \overrightarrow{DC}^2$ ， $AE = \sqrt{3}$ ，则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{MB} =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{5} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b}$ ； $-\frac{44}{75}$.

【分析】设 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AM}$ ，利用 B, C, M 三点共线，求出 λ ，结合线性运算求解可得空一；以 $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ 为基底表示出相关向量，结合已知求得 $|\vec{a}| = \frac{4}{3}, |\vec{b}| = 2$ ，代入目标式可得空二.

【详解】因为 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$ ，所以 E 为 CD 的中点，所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$ ，
又 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BD}$ ，所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ，所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ ，
设 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AM}$ ，则 $\lambda \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ ，即 $\overrightarrow{AC} = 2\lambda \overrightarrow{AM} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ，
因为 B, C, M 三点共线，所以 $2\lambda - \frac{3}{2} = 1$ ，得 $\lambda = \frac{5}{4}$ ，所以 $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AM} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ，
整理得 $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ ，
所以 $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$.



因为 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$ ， $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$ ，

所以 $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DC} = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}\right) = \frac{9}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \frac{9}{8}|\vec{a}||\vec{b}|$ ，

$$\overrightarrow{DC}^2 = \left(\vec{b} - \frac{3}{2} \vec{a} \right)^2 = \frac{9}{4} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \frac{3}{2} |\vec{a}| |\vec{b}|,$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{3}{4} \overrightarrow{DC}^2, \text{ 所以 } \frac{9}{4} |\vec{a}|^2 + \frac{1}{2} |\vec{b}|^2 - \frac{9}{8} |\vec{a}| |\vec{b}| = \frac{27}{16} |\vec{a}|^2 + \frac{3}{4} |\vec{b}|^2 - \frac{9}{8} |\vec{a}| |\vec{b}|,$$

$$\text{整理得 } |\vec{a}| = \frac{2}{3} |\vec{b}| \text{ ①},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right) = \frac{3}{4} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}, \quad AE = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \left(\frac{3}{4} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right)^2 = 3, \text{ 整理得 } 9 |\vec{a}|^2 + 4 |\vec{b}|^2 + 6 |\vec{a}| |\vec{b}| = 48 \text{ ②},$$

$$\text{联立 ①② 解得 } |\vec{a}| = \frac{4}{3}, |\vec{b}| = 2$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} - \frac{9}{10} \overrightarrow{AB} = \frac{2}{5} \vec{b} - \frac{9}{10} \vec{a},$$

$$\overrightarrow{MB} = \frac{2}{5} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\frac{2}{5} \vec{b} - \frac{9}{10} \vec{a} \right) \cdot \left(\frac{2}{5} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b} \right) = -\frac{18}{50} |\vec{a}|^2 - \frac{4}{25} |\vec{b}|^2 + \frac{13}{50} |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$= -\frac{18}{50} \times \frac{16}{9} - \frac{4}{25} \times 4 + \frac{13}{50} \times \frac{4}{3} \times 2 = -\frac{44}{75}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{5} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b}; -\frac{44}{75}.$$

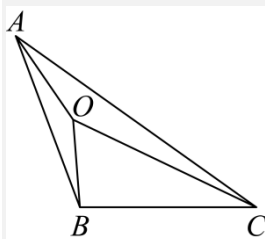
4. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 内的一点, $\angle AOB = \angle AOC = 150^\circ$, $|\overrightarrow{OA}| = 1$, $|\overrightarrow{OB}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\overrightarrow{OC}| = 2$, 则

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ _____; 若 $\overrightarrow{OC} = m \overrightarrow{OA} + n \overrightarrow{OB}$, 则 $m + n =$ _____.

【答案】 $-\frac{3}{4}$ $-\frac{10\sqrt{3}}{3}$

【分析】根据向量数量积的运算方法, 直接求出结果即可; 再根据向量数量积的运算律, 列出方程组, 求出参数值, 求出结果即可.

【详解】由题意可知 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 150^\circ = -\frac{3}{4}$;



因为 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 所以
$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = m|\overrightarrow{OA}|^2 + n\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + n|\overrightarrow{OB}|^2 \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} 1 \times 2 \times \cos 150^\circ = m - \frac{3}{4}n \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times \cos 60^\circ = -\frac{3}{4}m + \frac{3}{4}n \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m = -2\sqrt{3} \\ n = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

则 $m + n = -\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: $-\frac{3}{4}, -\frac{10\sqrt{3}}{3}$

5. 在梯形 $ABCD$ 中, $CD \parallel AB$, $DA \perp AB$, $AB = 4, BC = 3\sqrt{2}, CD = 1$, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$. 若

$\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{AB}$, 其中 λ, μ 为实数, 则 $\lambda + \mu =$ _____; 设 F 是线段 AE 上的动点, G

是线段 DF 的中点, 则 $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CG}$ 的最小值为 _____.

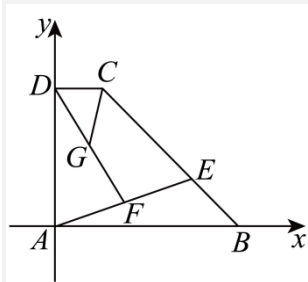
【答案】 $\frac{13}{12}$ $\frac{27}{10}$

【分析】建系并标点, 根据题意可得 $\overrightarrow{AE} = (3, 1) = (4\mu, 3\lambda)$, 即可得 λ, μ 和 $\lambda + \mu$; 设

$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$, 结合向量的坐标运算可得 $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CG} = \frac{5}{2} \left(k - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{27}{10}$, 进而分析 $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CG}$ 的最小

值.

【详解】如图，以 A 为坐标原点， AB, AD 分别为 x, y 轴，建立平面直角坐标系，



则 $A(0,0), B(4,0), C(1,3), D(0,3)$,

可得 $\overrightarrow{AB} = (4,0)$, $\overrightarrow{AD} = (0,3)$, $\overrightarrow{BC} = (-3,3)$,

因为 $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$, 则 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (-1,1)$, 可得 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = (3,1)$,

又因为 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AD} + \mu\overrightarrow{AB} = (4\mu, 3\lambda)$,

$$\text{则 } \begin{cases} 4\mu = 3 \\ 3\lambda = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \mu = \frac{3}{4} \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ 所以 } \lambda + \mu = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12};$$

设 $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE} = (3k, k)$, $k \in [0,1]$,

即 $F(3k, k)$, 则 $G\left(\frac{3k}{2}, \frac{k+3}{2}\right)$, 可得 $\overrightarrow{DF} = (3k, k-3)$, $\overrightarrow{CG} = \left(\frac{3k-2}{2}, \frac{k-3}{2}\right)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CG} = \frac{3k(3k-2)}{2} + \frac{(k-3)^2}{2} = \frac{10k^2 - 12k + 9}{2} = 5\left(k - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{27}{10},$$

当且仅当 $k = \frac{3}{5}$ 时, $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CG}$ 取到最小值 $\frac{27}{10}$.

故答案为: $\frac{13}{12}; \frac{27}{10}$.

6. 已知 M 是 $\triangle ABC$ 内的一点, 且 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AC} (\lambda \in \mathbf{R})$, B, M, N 三点共

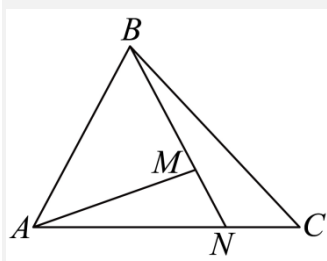
线, 则 $\lambda =$ _____, 若 $|\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 6$, 且向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,

则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{7}$ 3

【分析】根据平面向量的线性运算结合共线定理即可得 λ 的值；由投影向量的定义可得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值，由 $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 结合平面向量数量积的运算性质即可得 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值.

【详解】



$$\text{因为 } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}),$$

$$\text{整理得 } \overrightarrow{AM} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}, \text{ 则 } M \text{ 不在边 } AB \text{ 上,}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AC} (\lambda \in \mathbf{R}), \text{ 则 } \lambda \neq 0, \text{ 所以 } \overrightarrow{AM} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{AN},$$

$$\text{因为 } B, M, N \text{ 三点共线, 所以 } \frac{2}{9} + \frac{1}{9\lambda} = 1, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{7};$$

$$\text{向量 } \overrightarrow{AB} \text{ 在向量 } \overrightarrow{AC} \text{ 上的投影向量为 } \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

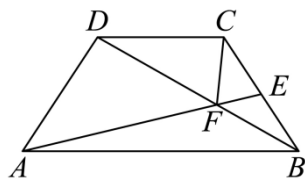
$$\text{所以 } \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{6^2} = \frac{1}{4}, \text{ 则 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC} \right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{2}{9} \times 3^2 + \frac{1}{9} \times 6^2 + \frac{1}{9} \times 9 = 3.$$

故答案为: $\frac{1}{7}$; 3.

7. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD = 2CD = 2BC = 2$, E 是 BC 的中点, 连接 AE , BD 相交于点 F , 连接 CF , 若 $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 则 $x + y =$ _____; $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CF} =$ _____.



【答案】 $\frac{5}{4}$ $-\frac{2}{5}$

【分析】利用向量的基底法设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，然后用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}$ ， $\overrightarrow{CF}$ ，再根据向量数量积运算律即可得到答案.

【详解】 $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ：

设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，

等腰梯形性质得 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ，又因为 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}, \quad (1)$$

$$\text{又因为 } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad (2)$$

由①②代入 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ 得，

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad (3)$$

由题目 $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，得 $x = \frac{3}{4}$ ， $y = \frac{1}{2}$ ，

$$\text{因此, } x + y = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CF}$ ：

已知 $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 1$ ， $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 60^\circ$ ，

$$\text{故 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1, \quad \vec{a}^2 = 4, \quad \vec{b}^2 = 1,$$

$$\text{设 } \overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{BF} = \mu \overrightarrow{BD},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\text{因此, } \overrightarrow{BF} = \mu(\vec{b} - \vec{a}) = -\mu\vec{a} + \mu\vec{b},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} - \mu\vec{a} + \mu\vec{b} = (1-\mu)\vec{a} + \mu\vec{b},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AF} = \lambda \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) = \frac{3\lambda}{4}\vec{a} + \frac{\lambda}{2}\vec{b},$$

$$\text{可得 } \begin{cases} \frac{3\lambda}{4} = 1 - \mu \\ \frac{\lambda}{2} = \mu \end{cases},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{4}{5}, \quad \mu = \frac{2}{5},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AF} = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \right) - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \right) = \frac{1}{10}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}, \quad (4)$$

由③④代入 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CF}$ 得,

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CF} = \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) \cdot \left(\frac{1}{10}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b} \right),$$

$$= \frac{3}{40}\vec{a}^2 - \frac{9}{20}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{20}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{3}{10}\vec{b}^2,$$

$$= \frac{3}{40} \times 4 - \frac{8}{20} \times 1 - \frac{3}{10} \times 1,$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = -\frac{2}{5},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CF} = -\frac{2}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{4}, \quad -\frac{2}{5}$$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AB 的中点, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{ED}$, 过点 E 任作一条直线, 分别交线段 AC 、 BC

于 F 、 G 两点, 设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, 若用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{CE}$, 则 $\overrightarrow{CE} =$ _____; 若 $\overrightarrow{CF} = m\vec{a}$,

$\overrightarrow{CG} = n\vec{b}$ ($mn \neq 0$), 则 $m + 3n - \frac{4}{3}$ 的最小值是 _____.

【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【分析】根据向量的线性运算法则，即可求得答案；根据线性运算法则，结合三点共线的性质，可得 $\frac{1}{3m} + \frac{1}{3n} = 1$ ，结合基本不等式，即可得答案.

【详解】因为 D 为 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$,

因为 $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{ED}$ ，所以 $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$;

因为 $\overrightarrow{CF} = m\vec{a}$ ， $\overrightarrow{CG} = n\vec{b}$ ，

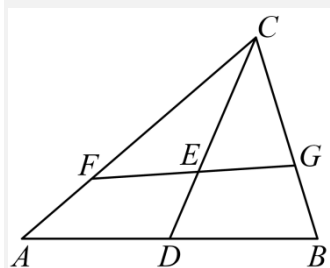
所以 $\vec{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{CF}$ ， $\vec{b} = \frac{1}{n}\overrightarrow{CG}$ ，所以 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3m}\overrightarrow{CF} + \frac{1}{3n}\overrightarrow{CG}$ ，

因为 F 、 E 、 G 三点共线，所以 $\frac{1}{3m} + \frac{1}{3n} = 1$ ，

$$\text{所以 } m+3n = (m+3n)\left(\frac{1}{3m} + \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} + \frac{m}{3n} + \frac{n}{m} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{m}{3n} \cdot \frac{n}{m}} + \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3},$$

当且仅当 $\frac{m}{3n} = \frac{n}{m}$ ，即 $m = \frac{\sqrt{3}+1}{3}$ ， $n = \frac{3+\sqrt{3}}{9}$ 时取等号，

所以 $m+3n - \frac{4}{3}$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



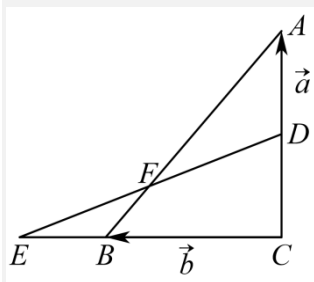
故答案为: $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BE}$ ，且 AB 与 DE 交于点 F ，则 $\overrightarrow{CF} =$ _____ (用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示)，若 $AB \perp DE$ ，则 $\angle ACB$ 的最大值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$; $\frac{\pi}{6}$.

【分析】①先设 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ，再由向量的线性运算及 E, F, D 三点共线可得 $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a})$ ，从而可得 $\overrightarrow{CF}$ ；②再由 $AB \perp DE$ ，由向量的数量积为零可得关于 $\angle ACB$ 的余弦值，再用基本不等式可得角的最大值.

【详解】如图：



设 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ，则 $\overrightarrow{AF} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ ，且 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ ，所以

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \lambda(\vec{b} - \vec{a}) = (\lambda - \frac{1}{2})\vec{a} - \lambda\vec{b}.$$

又因为 $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BE}$ ，所以 $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\vec{b}$ ， $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$.

因为 E, F, D 三点共线，设 $\overrightarrow{FD} = t\overrightarrow{ED}$ ，则 $(\lambda - \frac{1}{2})\vec{a} - \lambda\vec{b} = t(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b})$ ，即

$$(\lambda - \frac{1}{2})\vec{a} - \lambda\vec{b} = \frac{1}{2}t\vec{a} - \frac{3}{2}t\vec{b},$$

因为 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线，由平面向量基本定理得 $\begin{cases} \lambda - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t \\ -\lambda = -\frac{3}{2}t \end{cases}$ ，解得 $t = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{3}{4}$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a}), \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}.$$

若 $AB \perp DE$ ，设 $\angle ACB = \theta$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$ ，即 $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}) = 0$ ，

$$\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b}^2 = 0, \quad |\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta + 3|\vec{b}|^2 = 0, \quad \cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|} \geq \frac{2\sqrt{3}|\vec{a}||\vec{b}|}{4|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又因为 $0 < \theta < \pi$ ，且 $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减，

所以 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}$ ，故 $\angle ACB$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$ 。

故答案为： $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ ； $\frac{\pi}{6}$ 。

10. 在 $\triangle ABC$ 中， $B = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ，点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}$ ， O 为线段 BM 的中点，点 N 在线段 BC 上移动（包括端点），则线段 BC 的长度为_____， $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的最小值为_____。

【答案】 3 $-\frac{29}{36}$

【分析】先向量分解，可以用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示出 $\overrightarrow{BM}$ ，再根据向量数量积即可求出；以 B 为原点， BC 为 x 轴建立坐标系，则可求出点 B, C, O 坐标，分别求出 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}$ ，即可求解。

【详解】由题意知 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ，

而 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ ，

所以 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ ，

由向量夹角公式可求出 $\cos B = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|}$ ，因为 $AB = 2$ 所以可求得 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BC}|$

又因 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}$ ，所以 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}| = \frac{4}{3}$ ，

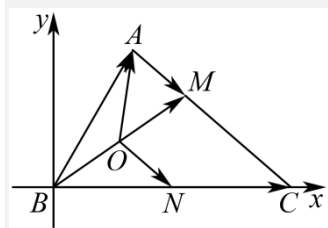
解之可得 $|\overrightarrow{BC}| = 3$ 或 $|\overrightarrow{BC}| = -4$ （舍）；

以 B 为原点, BC 为 x 轴建立坐标系, 则可知点 $A(1, \sqrt{3})$, $B(0, 0)$, $C(3, 0)$, $M\left(\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$O\left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, 设点 $N(a, 0)$, $0 \leq a \leq 3$ 则 $\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{ON} = \left(a - \frac{5}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{ON} = \left(\frac{1}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(a - \frac{5}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{6} \times \left(a - \frac{5}{6}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{6} - \frac{29}{36}$,

又因 $0 \leq a \leq 3$, 所以当 $a = 0$ 时 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{ON}$ 最小, 最小值为 $-\frac{29}{36}$.



故答案为: $3, -\frac{29}{36}$.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是边 BC 的中点, N 是线段 BM 的中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 试用 a, b

表示 $\overrightarrow{AN}$ 为 _____; $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最小值为

_____.

【答案】 $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ $2\sqrt{3} + 2$

【分析】根据给定条件, 利用向量的线性运算求出 $\overrightarrow{AN}$; 利用三角形面积公式及数量积的运算律, 结合基本不等式求出最小值.

【详解】依题意, $4\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC}$, 则 $4(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,

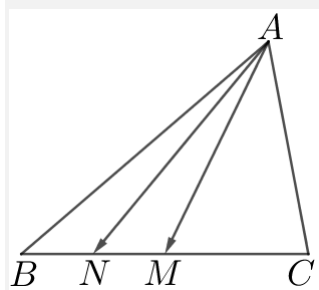
$$\text{因此 } \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$$

由 $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 得 $\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$, 则 $|\vec{a}||\vec{b}| = 8$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \frac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{1}{8}(3\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{8}(3\vec{a}^2 + \vec{b}^2) + \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}(3\vec{a}^2 + \vec{b}^2) + 2 \\ &\geq \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{3}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 + 2 = 2\sqrt{3} + 2, \text{ 当且仅当 } |\vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}| \text{ 时取等号,} \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最小值为 $2\sqrt{3} + 2$.

故答案为: $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$; $2\sqrt{3} + 2$

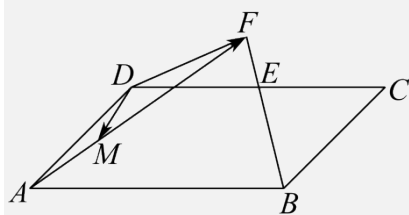


12. 已知平行四边形 $ABCD$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$, 点 F 满足 $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EF}$, 记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DF} =$ _____; 若 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MF}$, $AB = 2$, $AD = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $-\frac{17}{12}$

【分析】根据平面向量基本定理以及定比分点, 结合向量运算法则可得 $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示出 $\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AF}$, 再由平面向量数量积运算律计算可得结果.

【详解】如下图所示:



根据题意可知 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})$

$$= \overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};$$

易知 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b};$$

$$\text{又 } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} = -\vec{b} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{12}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b};$$

因为 $AB = 2, AD = \sqrt{2}$ 可知 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{2}$;

$$\text{所以 } \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(\frac{1}{12}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{48}\vec{a}^2 - \frac{1}{8}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{12}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{3}{4}\vec{b}^2$$

$$= \frac{1}{48}|\vec{a}|^2 - \frac{3}{4}|\vec{b}|^2 = \frac{1}{48} \times 4 - \frac{3}{4} \times 2 = -\frac{17}{12};$$

故答案为: $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; -\frac{17}{12}$;

13. 已知平面四边形 $ABCD$, $AC \perp BD$, $AB = 4$, $AD = 2$, $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, 则 $\angle BAD =$

_____ ; 动点 E, F 分别在线段 DC, CB 上, 且 $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CF} = (1 - \lambda)\overrightarrow{CB}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$

的取值范围为_____.

【答案】 $\frac{2\pi}{3}$ $\left[-4, \frac{84}{25}\right]$.

【分析】由平行线的性质可得 $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{2}{5}$ ，由勾股定理求得 OA^2, OB^2, OD^2 ，由此求得

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ，根据数量积求得 $\cos \angle BAD$ ，从而求得 $\angle BAD$ ；建立恰当的平面直角坐标系，将 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 表示成关于 λ 的函数，可求得 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的取值范围.

【详解】①由 $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$ ，知 $DC \parallel AB$ ，且 $DC:AB=2:5$.

记 $AC \cap BD = O$ ，则 $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{2}{5}$.

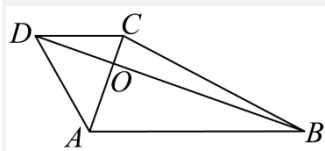
$$\text{由 } \begin{cases} OA^2 + OB^2 = AB^2 = 16 \\ OA^2 + OD^2 = AD^2 = 4 \\ OD = \frac{2}{5} OB \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} OA^2 = \frac{12}{7} \\ OB^2 = \frac{100}{7} \\ OD^2 = \frac{16}{7} \end{cases}.$$

所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} + \frac{5}{2} \overrightarrow{OD}$.

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}^2 - \frac{3}{2} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OD} - \frac{5}{2} \overrightarrow{OD}^2 = AO^2 - \frac{5}{2} OD^2 = \frac{12}{7} - \frac{5}{2} \times \frac{16}{7} = -4.$$

$$\cos \angle BAD = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-4}{4 \times 2} = -\frac{1}{2}.$$

因为 $\angle BAD \in [0, \pi]$ ，所以 $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$.



②如图所示，以 A 为坐标原点， AB 所在直线为 x 轴，过 A 且垂直于 x 轴的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，

$$\text{则 } A(0,0), B(4,0), D(-1,\sqrt{3}), C\left(\frac{3}{5}, \sqrt{3}\right).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DC} = \left(\frac{8}{5}, 0\right), \overrightarrow{CB} = \left(\frac{17}{5}, -\sqrt{3}\right), \overrightarrow{AD} = (-1, \sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (4, 0).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DC} = \left(\frac{8}{5} \lambda, 0\right), \text{ 所以 } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \left(\frac{8}{5} \lambda - 1, \sqrt{3}\right).$$

因为 $\overrightarrow{CF} = (1-\lambda) \overrightarrow{CB}$ ，所以

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \lambda \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{CB} = (4, 0) - \left(\frac{17}{5} \lambda, -\sqrt{3} \lambda\right) = \left(-\frac{17}{5} \lambda + 4, \sqrt{3} \lambda\right).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(\frac{8\lambda}{5} - 1, \sqrt{3}\right) \cdot \left(-\frac{17\lambda}{5} + 4, \sqrt{3} \lambda\right) = -\frac{136\lambda^2}{25} + \frac{64\lambda}{5} - 4.$$

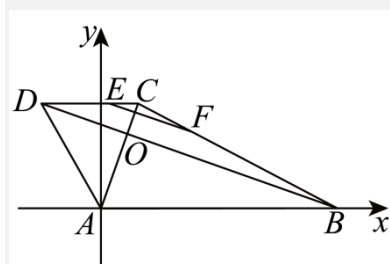
$$\text{令 } f(\lambda) = -\frac{136\lambda^2}{25} + \frac{64\lambda}{5} - 4,$$

$$\text{其图象的对称轴为 } \lambda = -\frac{\frac{64}{5}}{2 \times \left(-\frac{136}{25}\right)} = \frac{20}{17} > 1.$$

因为动点 E, F 分别在线段 DC, CB 上, 所以 $\lambda \in [0, 1]$.

所以 $f(\lambda)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(\lambda) \in \left[-4, \frac{84}{25}\right]$.

所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的取值范围是 $\left[-4, \frac{84}{25}\right]$.

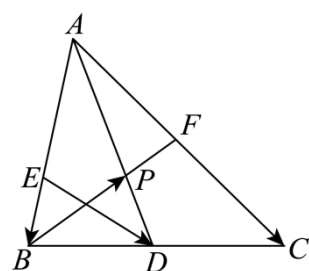


故答案为: ① $\frac{2\pi}{3}$ ② $\left[-4, \frac{84}{25}\right]$.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, F 分别为 BC, AC 中点, AD 与 BF 相交于点 P , 点 E 满足

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$. 记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BP} =$ _____; 若 $AB = 3$, $AC = 4$,

$\angle BAC = 60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{ED} =$ _____.



【答案】 $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ $\frac{4}{3}$

【分析】利用平面向量基本定理将 $\overrightarrow{BP}$ 表示出来，利用向量的数量积运算律和数量积的定义求出 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{ED}$.

【详解】由题意知， $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

所以 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{ED} = \left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{9}\vec{a}^2 - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{18}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{6}\vec{b}^2 = \frac{1}{9}\vec{a}^2 - \frac{7}{18}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{6}\vec{b}^2$.

因为 $AB = 3, AC = 4, \angle BAC = 60^\circ$, 所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \angle BAC = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$.

所以 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{ED} = \left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{9}\vec{a}^2 - \frac{7}{18}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{6}\vec{b}^2 = 1 - \frac{7}{18} \times 6 + \frac{16}{6} = \frac{4}{3}$.

故答案为：① $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ② $\frac{4}{3}$.

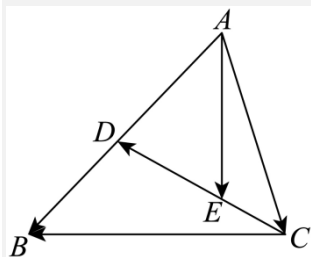
15. $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 边中点， $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AE} =$ _____ (用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表

示)，若 $|\overrightarrow{AE}| = 1, AE \perp CB$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} =$ _____

【答案】 $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ $-\frac{3}{5}$

【分析】根据向量的线性运算求解空一，应用数量积运算律计算求解空二.

【详解】



对于第一空, 因为 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, 所以 $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$, 所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

因为 D 为线段 AB 的中点, 所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$;

对于第二空, 因为 $|\overrightarrow{AE}| = 1, AE \perp CB$, 所以 $\overrightarrow{AE}^2 = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)^2 = \frac{1}{36}\vec{a}^2 + \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b}^2 = 1$, 即

$$\vec{a}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 16\vec{b}^2 = 36 \quad ①.$$

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{6}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b}^2 = 0$, 即 $\vec{a}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\vec{b}^2$, 代入①式后, 化简可得:

$$\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{36}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} &= \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{12}\vec{a}^2 + \frac{1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b}^2 = \frac{1}{12}(\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\vec{b}^2) \\ &= \frac{1}{12}(\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{12}(-\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}) = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}; -\frac{3}{5}$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 AB 的中点, N 在线段 CD 上, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 且

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\vec{a} + \lambda\vec{b}$, 则 $\lambda =$ ____; 若 $A = \frac{\pi}{3}$ 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $18\sqrt{3}$, 则 AN 的最小值为 ____.

【答案】 $\frac{2}{3}$ $2\sqrt{6}$

【分析】 设 $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{CD}$, 化简得到 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}x\vec{a} + (1-x)\vec{b}$, 结合 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\vec{a} + \lambda\vec{b}$, 求得 $\lambda = \frac{2}{3}$, 设 $|\vec{a}| = m, |\vec{b}| = n$, 求得 $mn = 72$, 得到 $|\overrightarrow{AN}|^2 = \frac{1}{36}m^2 + \frac{4}{9}n^2 + 8$, 结合基本不等式, 即可求解.

【详解】 因为 D 为 AB 的中点, 可得 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}$,

又因为 N 在线段 CD 上, 则存在实数 x 使得 $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{CD}$, 即 $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = x(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$,

可得 $\overrightarrow{AN} - \vec{b} = x(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})$ ，整理得 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}x\vec{a} + (1-x)\vec{b}$ ，

因为 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ，所以 $\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}$ 且 $1-x = \lambda$ ，解得 $\lambda = \frac{2}{3}$ ；

由 $A = \frac{\pi}{3}$ 且 $S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}$ ，可得 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A = 18\sqrt{3}$ ，所以 $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| = 72$ ，

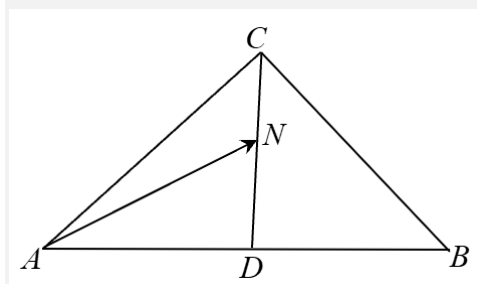
设 $|\vec{a}| = m, |\vec{b}| = n$ ，即 $mn = 72$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = mn \cos \frac{\pi}{3} = 72 \times \frac{1}{2} = 36$ ，

因为 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ ，可得 $\overrightarrow{AN}^2 = |\overrightarrow{AN}|^2 = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)^2 = \frac{1}{36}\vec{a}^2 + 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b}^2$

$$= \frac{1}{36}m^2 + \frac{4}{9}n^2 + 8 \geq 2\sqrt{\frac{m^2}{36} \times \frac{4n^2}{9}} + 8 = \frac{2}{9}mn + 8 = 16 + 8 = 24，$$

当且仅当 $m = 4n = 12\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 $|\overrightarrow{AN}| \geq 2\sqrt{6}$ ，即 AN 的最小值为 $2\sqrt{6}$ 。

故答案为： $\frac{2}{3}$ ； $2\sqrt{6}$ 。



【点睛】

17. 在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ ， $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FD}$ ，已知点 M 在线段 EF 上，且 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ 则 $|\overrightarrow{AM}| = \underline{\hspace{2cm}}$ ，若点 N 为线段 BD 上一个动点，则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 7 $-\frac{37}{4}$

【分析】设 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AE} + (1-\lambda) \overrightarrow{AF}$ ，进一步将其表示成以 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AD}$ 为基底的向量，结合已知条件，可得关于 λ 和 x 的方程组，解之，再根据模长的计算方法，得 $|\overrightarrow{AM}|$ 的值；设 $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AB} + (1-\mu) \overrightarrow{AD}$ ， $\mu \in [0,1]$ ，根据平面向量的运算法则，推出 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} = 36\mu^2 - 42\mu + 3$ ，然后由配方法，得解。

【详解】因为 $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ ， $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FD}$ ，所以 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ ，

所以 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ，

因为点 M 在线段 EF 上，

可设 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AE} + (1-\lambda) \overrightarrow{AF} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}) + (1-\lambda)(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda)\overrightarrow{AB} + (1 - \frac{2}{3}\lambda)\overrightarrow{AD}$ ，

而 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ，所以 $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ 1 - \frac{2}{3}\lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$ ，解得 $\lambda = \frac{3}{4}$ ， $x = \frac{5}{6}$ ，

所以 $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ，

则 $|\overrightarrow{AM}|^2 = \left(\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{25}{36}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2 = 49$ ，

所以 $|\overrightarrow{AM}| = 7$ ，

因为点 N 为线段 BD 上一个动点，

可设 $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AB} + (1-\mu) \overrightarrow{AD}$ ， $\mu \in [0,1]$ ，

所以 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{AB} + (1-\mu) \overrightarrow{AD} - (\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) = (\mu - \frac{5}{6})\overrightarrow{AB} + (\frac{1}{2} - \mu)\overrightarrow{AD}$ ，

所以 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} = [\mu \overrightarrow{AB} + (1-\mu) \overrightarrow{AD}] \cdot [(\mu - \frac{5}{6})\overrightarrow{AB} + (\frac{1}{2} - \mu)\overrightarrow{AD}]$

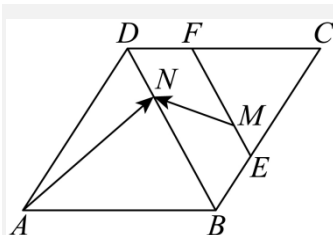
$= \mu(\mu - \frac{5}{6})\overrightarrow{AB}^2 + (-2\mu^2 + \frac{7}{3}\mu - \frac{5}{6})\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + (1-\mu)(\frac{1}{2} - \mu)\overrightarrow{AD}^2$

$= 36\mu^2 - 42\mu + 3 = 36\left(\mu - \frac{7}{12}\right)^2 - \frac{37}{4} \geq -\frac{37}{4}$ ，

当且仅当 $\mu = \frac{7}{12}$ 时，等号成立，

所以 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN}$ 的最小值为 $-\frac{37}{4}$ 。

故答案为：7， $-\frac{37}{4}$ 。



18. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $AB = 2CD$, M, N 分别为线段 DC 和 AB 的中点, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MN} = \underline{\hspace{2cm}}$. 若 $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BC}$, 则 $\angle DAB$ 正切的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$ $\frac{\sqrt{2}}{4} / \frac{1}{4}\sqrt{2}$

【分析】利用向量的加法、数乘向量的运算即可化简得出 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$; 利用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示

$\overrightarrow{MN}$, 根据 $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BC}$ 得出 $6\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 + 8\vec{b}^2$, 再利用公式 $\cos \angle DAB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ 以及基本不等式求

出其最小值, 最后利用 $\tan \angle DAB = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \angle DAB} - 1}$ 求出最大值.

【详解】由题意可得, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 $= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$,

因 $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{8}\vec{a}^2 + \frac{3}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 0$,

即 $6\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 + 8\vec{b}^2$,

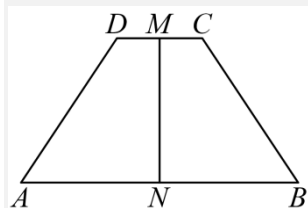
则 $\cos \angle DAB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2}{6 \times |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{6} \left(\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} + \frac{8|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right) \geq \frac{1}{6} \times 2 \sqrt{\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \frac{8|\vec{b}|}{|\vec{a}|}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

等号成立时 $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}|\vec{b}|$,

则 $\angle DAB$ 为锐角,

$$\text{则 } \tan \angle DAB = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \angle DAB} - 1} \leq \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

则 $\angle DAB$ 正切的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



故答案为: $\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$

19. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, 点 P 在线段 BC 上, 若 $AP \perp BC$, 则

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} =$ _____; 若 $\overrightarrow{PB} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 当 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 取得最小值时, $\lambda =$ _____.

【答案】 3 -3

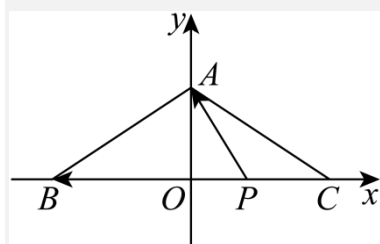
【分析】第一空, 根据 P 为 BC 的中点, 确定 $\angle ABP = \frac{\pi}{6}$, 利用数量积定义即可求得答案;
第二空, 建立平面直角坐标系, 利用数量积的坐标运算求得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 取得最小值时 P 点坐标,
结合 $\overrightarrow{PB} = \lambda \overrightarrow{PC}$ 即可求得答案.

【详解】由题意知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, $AB = AC = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$,

当 $AP \perp BC$ 时, P 为 BC 的中点, 则 $\cos \angle ABP = \frac{BP}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\angle ABP = \frac{\pi}{6}$,

则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} = 2 \times \sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{6} = 3$;

若 $\overrightarrow{PB} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 则以 BC 的中点为坐标原点 O , 以 BC 为 x 轴建立平面直角坐标系,



则 $B(-\sqrt{3}, 0), C(\sqrt{3}, 0), A(0, 1)$, 设 $P(x, 0), -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$,

则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = (-x, 1) \cdot (\sqrt{3} - x, 0) = x^2 - \sqrt{3}x$,

当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $x^2 - \sqrt{3}x$ 取最小值, 符合题意,

又 $\overrightarrow{PB} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 即 $(-\sqrt{3} - x, 0) = \lambda(\sqrt{3} - x, 0)$,

则 $\lambda = \frac{-\sqrt{3} - x}{\sqrt{3} - x} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -3$,

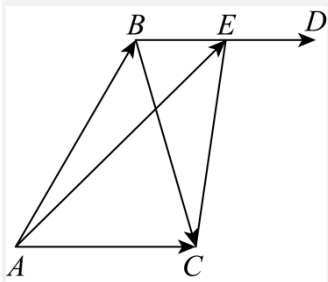
故答案为: 3; -3

20. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3, \angle BAC = \frac{\pi}{3}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$, 则 $|\overrightarrow{AB}| =$ _____; 若 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, 点 E 在线段 BD 上, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC}$ 的最大值为 _____.

【答案】 4 -10

【分析】利用数量积的定义以及运算律运算可得 $|\overrightarrow{AB}| = 4$, 根据题意设 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD}, 0 \leq \lambda \leq 1$, 利用向量的线性运算结合数量积的运算律可得 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} = -9\lambda^2 - 3\lambda - 10$, 利用二次函数性质可求得最大值.

【详解】



如图, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \angle BAC = \frac{3}{2} |\overrightarrow{AB}|$,

则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 9 - \frac{3}{2} |\overrightarrow{AB}| = 3$,

解得 $|\overrightarrow{AB}| = 4$.

设 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 则 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}$,

所以

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}) \cdot [\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC})] = (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}) \cdot [-\overrightarrow{AB} + (1 - \lambda) \overrightarrow{AC}] \\ &= -\overrightarrow{AB}^2 + (1 - 2\lambda) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \lambda(1 - \lambda) \overrightarrow{AC}^2, \end{aligned}$$

因为 $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} |\overrightarrow{AB}| = 6$,

所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} = -16 + 6(1 - 2\lambda) + 9\lambda(1 - \lambda) = -9\lambda^2 - 3\lambda - 10 = -9\left(\lambda + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{39}{4}$,

又因为 $0 \leq \lambda \leq 1$, 所以 $\lambda = 0$ 时, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} = -10$ 为最大值.

故答案为: 4; -10.