

平面向量小题练习

一、单选题

1. 若向量 $\vec{a} = (x, 2)$ 与 $\vec{b} = (1, -1)$ 垂直, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = (\quad)$

A. $\sqrt{10}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

【知识点】坐标计算向量的模、向量垂直的坐标表示

【分析】利用两向量垂直的坐标关系求出 x , 再利用向量模长的计算公式求解.

【详解】 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x - 2 = 0$, 所以 $x = 2$, 所以 $\vec{a} + \vec{b} = (2, 2) + (1, -1) = (3, 1)$,

所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

故选: A

2. 已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, $|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为 ()

A. $-2\vec{b}$

B. $2\vec{b}$

C. $-3\vec{b}$

D. $3\vec{b}$

【答案】A

【知识点】已知模求数量积、求投影向量

【分析】先根据 $|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 得到 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}|\vec{a}|^2$, 再根据投影向量的概念求解.

【详解】由 $|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow (2\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 \Rightarrow 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$,

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}|\vec{a}|^2$.

所以向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{-\frac{1}{2}|\vec{a}|^2}{\frac{1}{4}|\vec{a}|^2} \cdot \vec{b} = -2\vec{b}$.

故选: A

3. 下列说法正确的是 ()

A. 长度一样的两个向量相等

B. 平行的两个向量为共线向量

C. 零向量的大小为 0 且没有方向

D. 方向相反的两个向量互为相反向量

【答案】B

【知识点】平行向量（共线向量）、相反向量、零向量与单位向量、相等向量

【分析】根据相等向量、共线向量（平行向量）、零向量、相反向量的定义逐项分析判断即可.

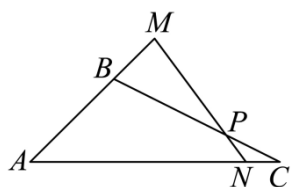
【详解】选项 A：相等向量是指它们的长度相等且方向相同，故 A 错误；

选项 B：平行向量与共线向量是同一概念，若两个非零向量方向相同或相反，则称这两个向量为共线向量或平行向量. 零向量与任一向量共线，故 B 正确；

选项 C：长度为 0 的向量称为零向量，任何方向都可以作为零向量的方向，故 C 错误；

选项 D：若两个向量的长度相等、方向相反，则称这两个向量互为相反向量，故 D 错误.
故选：B.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PC}$ ，过点 P 的直线与 AB, AC 所在的直线分别交于点 M, N ，若 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AC} (\lambda > 0, \mu > 0)$ ，则 $\lambda + \mu$ 的最小值为（ ）



A. $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

【答案】B

【知识点】平面向量共线定理的推论、基本不等式“1”的妙用求最值、用基底表示向量

【分析】根据平面向量的线性运算法则，及 M, P, N 三点共线，推得 $\frac{1}{4\lambda} + \frac{3}{4\mu} = 1$. 利用基本不等式中“1”的妙用，求得 $\lambda + \mu$ 的最小值.

【详解】 $\because \overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PC}$ ，即 $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP})$ ， $\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ ，

$\because \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AC} (\lambda > 0, \mu > 0)$ ， $\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AM}$ ， $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{AN}$ ，

$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4\lambda} \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4\mu} \overrightarrow{AN}$ ， $\because M, P, N$ 三点共线，则 $\frac{1}{4\lambda} + \frac{3}{4\mu} = 1$.

$\therefore \lambda + \mu = (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{4\lambda} + \frac{3}{4\mu} \right) = \frac{3\lambda}{4\mu} + \frac{\mu}{4\lambda} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{3\lambda}{4\mu} \cdot \frac{\mu}{4\lambda}} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ ，

当且仅当 $\begin{cases} \frac{1}{4\lambda} + \frac{3}{4\mu} = 1 \\ \frac{\mu}{4\lambda} = \frac{3\lambda}{4\mu} \end{cases}$ ，即 $\lambda = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ ， $\mu = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$ 时，等号成立，因此， $\lambda + \mu$ 的最小值为

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

故选：B.

5. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, \lambda)$, 若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则 $\lambda =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -1 D. 3

【答案】D

【知识点】利用向量垂直求参数、向量垂直的坐标表示

【分析】利用平面向量数量积的坐标表示计算可得结果.

【详解】若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$,

因此可得 $\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 - (2 + \lambda) = 0$, 解得 $\lambda = 3$.

故选：D

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $B = \frac{\pi}{3}$, $a = 8$,

$b \cos A + a \cos B = 6$, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\vec{BO} = x\vec{BA} + y\vec{BC}$, 则 $xy =$ ()

- A. $\frac{5}{54}$ B. $\frac{23}{36}$ C. $\frac{25}{54}$ D. $\frac{29}{36}$

【答案】A

【知识点】余弦定理解三角形、用定义求向量的数量积

【分析】利用余弦定理和 $b \cos A + a \cos B = 6$ 得到 $c = 6$, 然后利用外心的结论和

$\vec{BO} = x\vec{BA} + y\vec{BC}$ 得到 x, y 的方程, 最后解方程即可.

【详解】 $\because b \cos A + a \cos B = 6$,

由余弦定理有: $b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + a \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 6$,

$\therefore c^2 = 6c$, 解得 $c = 6$,

由 $\vec{BO} = x\vec{BA} + y\vec{BC}$ 得, $\vec{BO} \cdot \vec{BA} = \frac{1}{2}|\vec{BA}|^2 = x\vec{BA} \cdot \vec{BA} + y\vec{BC} \cdot \vec{BA}$,

即 $\vec{BO} \cdot \vec{BA} = \frac{1}{2}|\vec{BA}|^2 = x|\vec{BA}|^2 + y|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}| \cos B$,

$\vec{BO} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}|\vec{BC}|^2 = x\vec{BA} \cdot \vec{BC} + y\vec{BC} \cdot \vec{BC}$,

即 $\vec{BO} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}|\vec{BC}|^2 = x|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}| \cos B + y|\vec{BC}|^2$,

即: $18 = 36x + 24y$, $32 = 24x + 64y$, 解得 $x = \frac{2}{9}$, $y = \frac{5}{12}$,

$$\therefore xy = \frac{2}{9} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{54}.$$

故选: A.

二、填空题

7. 若向量 $\vec{a} = (k, 3)$, $\vec{b} = (1, 4)$, $\vec{c} = (2, 1)$, 已知 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为钝角, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right) \cup \left(-\frac{9}{2}, 3\right)$

【知识点】由向量共线(平行)求参数、向量夹角的坐标表示

【分析】根据 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为钝角, 得到 $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$, 注意排除 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 反向共线这种情况, 进而即可求出答案.

【详解】由 $\vec{a} = (k, 3)$, $\vec{b} = (1, 4)$, 则 $2\vec{a} - 3\vec{b} = (2k - 3, -6)$,

又 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为钝角,

则 $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$, 即 $(2k - 3, -6) \cdot (2, 1) = 4k - 6 - 6 < 0$, 解得 $k < 3$,

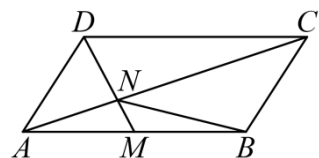
当 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 反向共线时, $2k - 3 = -12$, 解得 $k = -\frac{9}{2}$, 此时夹角不是钝角,

综上所述, k 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right) \cup \left(-\frac{9}{2}, 3\right)$.

故答案为: $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right) \cup \left(-\frac{9}{2}, 3\right)$.

8. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, M 是 AB 的中点, DM 与 AC 交于点 N , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 记 $\overrightarrow{BN} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\mu - \lambda =$ _____.



【答案】 1

【知识点】向量的线性运算的几何应用、平面向量共线定理的推论

【分析】根据向量的线性运算和共线定理求解即可.

【详解】根据题意可知 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a}$,

因为 D, N, M 三点共线, 所以存在实数 c 使得 $\overrightarrow{AN} = c\vec{b} + \frac{1}{2}(1-c)\vec{a}$,

又因为 A, N, C 三点共线, 所以存在实数 d 使得 $\overrightarrow{AN} = d\overrightarrow{AC} = d\vec{a} + d\vec{b}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{1}{2}(1-c) = d \\ c = d \end{cases}, \text{ 解得 } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\text{所以 } \lambda = -\frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}, \mu - \lambda = 1,$$

故答案为: 1

三、解答题

9. 已知平面直角坐标系中, $A(0,4)$, $B(2,0)$, $P(3,t)$.

(1) 若 A, B, P 三点共线, 求实数 t 的值.

(2) 若 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BP}$, 求实数 t 的值.

(3) 若 $\angle BAP$ 是锐角, 求实数 t 的取值范围.

【答案】(1)-2

$$(2) t = \frac{1}{2}$$

$$(3) t < \frac{11}{2}, \text{ 且 } t \neq -2.$$

【知识点】数量积的坐标表示、向量垂直的坐标表示、由向量共线(平行)求参数

【分析】(1) 由 A, B, P 三点共线得到 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BP}$, 利用向量平行的坐标公式求解;

(2) 利用向量垂直的坐标公式求解;

(3) 由 $\angle BAP$ 是锐角得到 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} > 0$ 且 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ 不共线, 由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} > 0$ 利用向量的数量积求解, 由 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ 不共线利用向量共线的坐标公式求解.

【详解】(1) $\because A, B, P$ 三点共线, $\therefore \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BP}$.

$$\because \overrightarrow{AB} = (2, -4), \overrightarrow{BP} = (1, t), \therefore 2t + 4 = 0, \therefore t = -2.$$

$$(2) \because \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BP}, \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 2 - 4t = 0, \therefore t = \frac{1}{2}.$$

(3) 若 $\angle BAP$ 是锐角, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} > 0$, 且 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ 不共线.

$$\because \overrightarrow{AB} = (2, -4), \overrightarrow{AP} = (3, t-4), \therefore 6 - 4(t-4) > 0,$$

且 $t \neq -2$ ，解得 $t < \frac{11}{2}$ ，且 $t \neq -2$ 。

10. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (1, -2)$;

(1) 求 $|\vec{a} + 2\vec{b}|$;

(2) 若 $(\vec{a} - \vec{b}) \parallel (\vec{a} + k\vec{b})$ ，求 k 的值;

(3) 求 $\vec{a}$ 与 $2\vec{a} + 2\vec{b}$ 的夹角 θ 的余弦值。

【答案】(1) $\sqrt{2}$

(2) -1

(3) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【知识点】由向量共线（平行）求参数、向量夹角的计算、平面向量线性运算的坐标表示、坐标计算向量的模

【分析】(1) 根据条件，利用向量的坐标运算和模长的计算公式，即可求解；

(2) 根据向量平行列方程，由此求得 k ，即可求解；

(3) 利用向量数量积的坐标运算及模长公式，先求出 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + 2\vec{b})$ ， $|\vec{a}|$ ， $|2\vec{a} + 2\vec{b}|$ ，再根据向量夹角公式，即可求解。

【详解】(1) 因为 $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (1, -2)$ ，则 $\vec{a} + 2\vec{b} = (-1, 3) + (2, -4) = (1, -1)$ ，

则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ 。

(2) $\vec{a} - \vec{b} = (-1, 3) - (1, -2) = (-2, 5)$ ，

则 $\vec{a} + k\vec{b} = (-1, 3) + (k, -2k) = (k-1, 3-2k)$ ，

因为 $(\vec{a} - \vec{b}) \parallel (\vec{a} + k\vec{b})$ ，所以 $(-2) \times (3-2k) - 5 \times (k-1) = 0$ ，

即 $-6 + 4k - 5k + 5 = 0$ ，解得 $k = -1$ 。

(3) 由题知 $2\vec{a} = 2 \times (-1, 3) = (-2, 6)$, $2\vec{b} = (2, -4)$ ，

则 $2\vec{a} + 2\vec{b} = (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2)$ ，又 $\vec{a} = (-1, 3)$ ，

所以 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + 2\vec{b}) = (-1) \times 0 + 3 \times 2 = 6$ ，

又 $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ， $|2\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ ，

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot (2\vec{a} + 2\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |2\vec{a} + 2\vec{b}|} = \frac{6}{\sqrt{10} \times 2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$