

平面向量冲刺

一、填空题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, E 为 AC 中点, G 为线段 BE 上一点, 且满足 $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \lambda\overrightarrow{CA}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$),

则 $\lambda =$ _____, 若 $AG \perp BG$, 则当 $\angle C$ 最大时, $\frac{|CG|}{|CB|}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$ $\frac{\sqrt{10}}{5} / \frac{1}{5}\sqrt{10}$

【知识点】用基底表示向量、数量积的运算律、平面向量基本定理的应用、基本不等式求和的最小值

【分析】第一空, 由题意知 $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CE}$, 得 $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + 2\lambda\overrightarrow{CE}$, 由三点共线的结论即可求出 λ ;

第二空, 先求 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ 和 $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, 由 $AG \perp BG$ 有 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$, 得 $5\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CA}^2$, 利用数量积的定义和基本不等式即可求得 $\cos C$, 由 $3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$ 得 $9|\overrightarrow{CG}|^2 = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})^2$ 即可求解.

【详解】由题意有 $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CE}$, 所以 $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \lambda\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + 2\lambda\overrightarrow{CE}$, 由 $\frac{1}{3} + 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$, 所以 $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, 所以 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$,

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, 由 $AG \perp BG$ 有 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$,

即 $\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right) = -\frac{2}{9}\overrightarrow{CB}^2 + \frac{5}{9}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} - \frac{2}{9}\overrightarrow{CA}^2 = 0$,

即 $5\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CA}^2$, 所以 $5|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|\cos C = 2(|\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2)$,

即 $\cos C = \frac{2(|\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2)}{5|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|} \geq \frac{2 \times 2|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}{5|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|} = \frac{4}{5}$, 当 $|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA}|$ 时, 等号成立,

当 $\angle C$ 最大时, $\cos C = \frac{4}{5}$, $|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA}|$, 由 $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ 有 $3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$,

所以 $9|\overrightarrow{CG}|^2 = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}^2 = |\overrightarrow{CB}|^2 + 2|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|\cos C + |\overrightarrow{CA}|^2 = \frac{18|\overrightarrow{CB}|^2}{5}$,

$$\text{所以 } \frac{|\overrightarrow{CG}|^2}{|\overrightarrow{CB}|^2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{CG}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

故答案为: $\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{10}}{5}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \angle BAC = \frac{\pi}{3}, S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3}$.

(1) 若 $|\vec{b}| = 1$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量的模为_____;

(2) 边 AB 和 AC 的中点分别为 D, E , 点 F 为 CD 和 BE 的交点, G 为线段 CD 上靠近 C 的三等分点, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG}$ 的最小值为_____.

【答案】 4; $\frac{26}{9}$

【知识点】用基底表示向量、用定义求向量的数量积、基本不等式求和的最小值

【分析】根据三角形面积公式可得 $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 8$, 即可根据投影向量的定义求解 (1), 根据重心的性质, 结合基底表达 $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}$, 即可根据向量的数量积运算律, 结合基本不等式求解 (2) 即可.

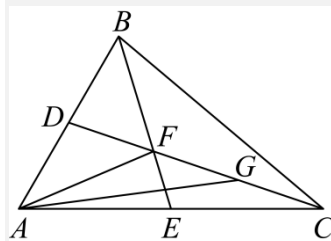
【详解】(1) 因为 $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{2} \times |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$,

解得 $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 8$, 则 $|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| = 8$, 结合 $|\vec{b}| = 1$, 解得 $|\vec{a}| = 8$,

由投影向量公式得 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = 4\vec{b}$,

故向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量的模为 4,

(2) 如图, 根据题意可知 F 为 $\triangle ABC$ 的重心, 故 $DF = \frac{1}{2}FC, EF = \frac{1}{2}FB$,



又 G 为线段 CD 上靠近 C 的三等分点, 故 $DF = FG = GC$,

因此 $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right),$

$$= \left(\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) \cdot \left(\frac{1}{6} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} \right) = \frac{1}{18} \vec{a}^2 + \frac{5}{18} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{9} \vec{b}^2,$$

由 (1) 知 $|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 8$, 故 $|\vec{b}| = \frac{8}{|\vec{a}|}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{18} \vec{a}^2 + \frac{5}{18} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{9} \vec{b}^2 = \frac{1}{18} |\vec{a}|^2 + \frac{5}{18} \times 8 + \frac{2}{9} \times \frac{64}{|\vec{a}|^2}$$

$$\geq \frac{5}{18} \times 4 + 2 \sqrt{\frac{1}{18} |\vec{a}|^2 \times \frac{2}{9} \times \frac{64}{|\vec{a}|^2}} = \frac{10}{9} + 2 \times \frac{8}{9} = \frac{26}{9},$$

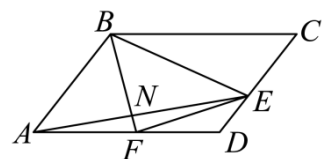
当且仅当 $\frac{1}{18} |\vec{a}|^2 = \frac{2}{9} \times \frac{64}{|\vec{a}|^2}$, 即 $|\vec{a}| = 4$ 时取等号, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG}$ 的最小值为 $\frac{26}{9}$.

故答案为: 4, $\frac{26}{9}$

3. 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 6$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, F 是线段 AD 的中点,

$\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DC}$. 若 $\lambda = \frac{1}{2}$, AE 与 BF 交于点 N , $\overrightarrow{AN} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AD}$, 则 $x - y$ 的值为_____.

若 $\lambda \in [-1, 1]$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FE}$ 的最小值是_____.



【答案】 $-\frac{1}{5}$ $\frac{191}{16}$

【知识点】利用平面向量基本定理求参数、用基底表示向量、用定义求向量的数量积、数量积的运算律

【分析】设 $\overrightarrow{FN} = t \overrightarrow{FB}$ 、 $\overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AE}$, 用 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 作为一组基底表示出 $\overrightarrow{AN}$, 再由平面向量基本定理得到方程组, 求出 t 、 μ , 即可得到 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AD}$, 从而求出 x 、 y , 即可得解; 用 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 作为基底表示出 $\overrightarrow{BE}$ 、 $\overrightarrow{FE}$, 再根据数量积的运算律及定义得到关于 λ 的函数, 最后根据二次函数的性质计算可得.

【详解】当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC}$, 即 E 为 DC 的中点,

因为 F 、 N 、 B 三点共线,

$$\text{设 } \overrightarrow{FN} = t \overrightarrow{FB}, \text{ 则 } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{AF} + t \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AF} + t (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF})$$

$$= (1-t) \overrightarrow{AF} + t \overrightarrow{AB} = \frac{1-t}{2} \overrightarrow{AD} + t \overrightarrow{AB},$$

因为 A 、 N 、 E 三点共线，

$$\text{设 } \overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AE}, \text{ 则 } \overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AE} = \mu(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) = \mu\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \mu\overrightarrow{AD} + \frac{\mu}{2}\overrightarrow{AB},$$

又 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 不共线，

$$\text{根据平面向量基本定理得 } \begin{cases} \mu = \frac{1-t}{2} \\ \frac{1}{2}\mu = t \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} t = \frac{1}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \end{cases},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}, \text{ 又 } \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}, \text{ 则 } \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases},$$

$$\text{所以 } x - y = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{5};$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{DC} = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{DC} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FE} = [(\lambda - 1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}] \cdot \left(\lambda\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= (\lambda^2 - \lambda)\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 + \left(\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= (\lambda^2 - \lambda) \times 4^2 + \frac{1}{2} \times 6^2 + \left(\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2}$$

$$= 16(\lambda^2 - \lambda) + 18 + 18\lambda - 6 = 16\lambda^2 + 2\lambda + 12,$$

$$\text{因为 } \lambda \in [-1, 1], \text{ 所以当 } \lambda = -\frac{2}{2 \times 16} = -\frac{1}{16} \text{ 时, } \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FE} \text{ 取得最小值, 最小值为 } \frac{191}{16}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{5}; \frac{191}{16}$$

4. 已知平面四边形 $ABCD$ 满足 $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| = 2$, $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA}$ 且 $\overrightarrow{BA} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = 1$, M 为 AB 的

中点, 则 $|\overrightarrow{CM}| =$ _____, 若 E 、 F 分别为线段 AD 、 BC 上的动点, 且满足

$$\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \frac{13}{4}, \text{ 则 } |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| \text{ 的最小值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\sqrt{13}$ 4

【知识点】数量积的坐标表示、坐标计算向量的模、基本不等式求和的最小值

【分析】推导出 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 然后以点 B 为坐标原点, 直线 BC 为 x 轴, 过点 B

且垂直于 BC 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系, 利用平面向量的模长公式可求得 $|\overrightarrow{CM}|$ 的值;

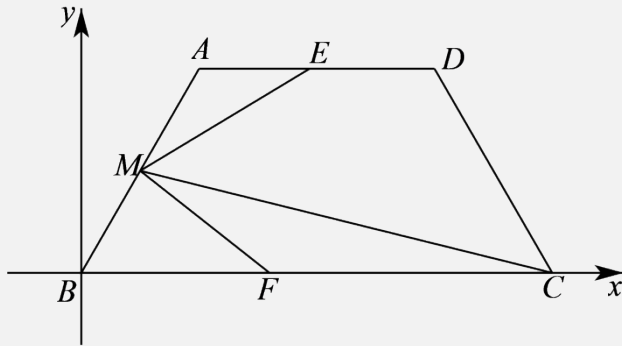
设点 $E(m, \sqrt{3})$ 、 $F(n, 0)$, 其中 $1 \leq m \leq 3$, $0 \leq n \leq 4$, 利用平面向量数量积的坐标运算得出

$\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right) = 4$, 再结合基本不等式求得 $|\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}|$ 的最小值.

【详解】因为 $2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$, 可得 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AD}$,

因为 $\overrightarrow{BA} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC}{|\overrightarrow{BC}|} = |\overrightarrow{BA}| \cos \angle ABC = 2 \cos \angle ABC = 1$, 则 $\cos \angle ABC = \frac{1}{2}$,

因为 $0 < \angle ABC < \pi$, 则 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 且 $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{AD}| = 4$, 如下图所示:



以点 B 为坐标原点, 直线 BC 为 x 轴, 过点 B 且垂直于 BC 的直线为 y 轴建立如上图所示的平面直角坐标系,

则 $A(1, \sqrt{3})$ 、 $B(0, 0)$ 、 $C(4, 0)$ 、 $D(3, \sqrt{3})$ 、 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{13};$$

设点 $E(m, \sqrt{3})$ 、 $F(n, 0)$, 其中 $1 \leq m \leq 3$, $0 \leq n \leq 4$,

$$\overrightarrow{ME} = \left(m - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \overrightarrow{MF} = \left(n - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

所以, $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \left(m - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$, 可得 $\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right) = 4$,

因为 $m > \frac{1}{2}$, 则 $n > \frac{1}{2}$, 则 $m - \frac{1}{2} > 0$, $n - \frac{1}{2} > 0$,

所以, $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = (m + n - 1, 0)$,

$$\text{则 } |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = \left| \left(m - \frac{1}{2} \right) + \left(n - \frac{1}{2} \right) \right| = \left(m - \frac{1}{2} \right) + \left(n - \frac{1}{2} \right) \geq 2\sqrt{\left(m - \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \right)} = 4,$$

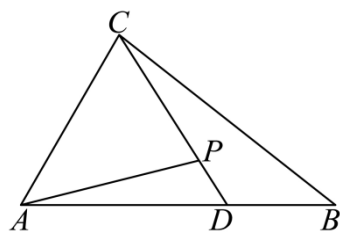
$$\text{当且仅当 } \begin{cases} m - \frac{1}{2} = n - \frac{1}{2} \\ \left(m - \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \right) = 4 \\ 1 \leq m \leq 3, 0 \leq n \leq 4 \end{cases} \text{ 时, 即当 } m = n = \frac{5}{2} \text{ 时, 等号成立,}$$

因此, $|\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}|$ 的最小值为 4.

故答案为: $\sqrt{13}$; 4.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, P 为 CD 上一点, 且满足 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,

则实数 m 的值为 _____; 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 _____.



【答案】 $\frac{5}{8}$ $\frac{\sqrt{30}}{2} / \frac{1}{2}\sqrt{30}$

【知识点】数量积的运算律、三角形面积公式及其应用、基本不等式求和的最小值

【分析】由平面向量共线定理求解 m , 可得 $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 两边平方由数量积的运算律, 结合三角形面积公式与基本不等式求解,

【详解】由 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ 得 $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD},$$

而 C, P, D 三点共线, 得 $m + \frac{3}{8} = 1$, $m = \frac{5}{8}$,

则 $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 因为 $\angle BAC = 60^\circ$,

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AP}|^2 = \frac{25}{64}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{5}{16}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC + \frac{1}{16}|\overrightarrow{AB}|^2$$

$$= \frac{25}{64}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{1}{16}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{5}{32}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|$$

$$\text{而 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{4}AB \cdot AC = 4\sqrt{3}, \text{ 得 } AB \cdot AC = 16,$$

由基本不等式得 $\frac{25}{64}AC^2 + \frac{1}{16}AB^2 \geq 2\sqrt{\frac{25}{64} \times \frac{1}{16}} \times AB \cdot AC = \frac{5}{16} \times 16 = 5$, 当且仅当 $5AC = 2AB$ 时等号成立,

故 $|\overrightarrow{AP}|^2 \geq 5 + \frac{5}{32} \times 16 = \frac{15}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AP}| \geq \frac{\sqrt{30}}{2}$, 即 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{30}}{2}$,

故答案为: $\frac{5}{8}; \frac{\sqrt{30}}{2}$

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, CE 与 BF 交于点 O . 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 请用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BF} =$ _____; 若 $\overrightarrow{AO} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.

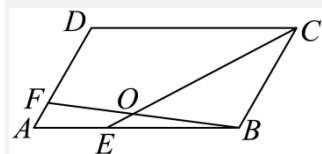
【答案】 $\frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}$ $\frac{4}{7}$

【知识点】用基底表示向量、平面向量共线定理的推论、向量加法的法则、向量减法的法则

【分析】根据向量的线性运算法则结合平面向量基本定理, 将 $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AO}$ 用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 表示出来即可求解.

【详解】 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}$,

如图, B, O, F 三点共线,



设 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AF}$, 则 $x + y = 1$,

所以 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + \frac{y}{4}\overrightarrow{AD} = x\vec{a} + \frac{y}{4}\vec{b}$,

C, O, E 三点共线,

设 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AE} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $m + n = 1$,

所以 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AE} + n\overrightarrow{AC} = \frac{m}{3}\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD} = (\frac{m}{3} + n)\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD} = (\frac{m}{3} + n)\vec{a} + n\vec{b}$,

所以 $\begin{cases} x + y = 1 \\ m + n = 1 \\ x = \frac{m}{3} + n \\ \frac{y}{4} = n \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = \frac{6}{7} \\ n = \frac{1}{7} \end{cases}$,

所以 $\frac{m}{3} + n + n = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$, 又 $\overrightarrow{AO} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, 即得 $\lambda + \mu = \frac{4}{7}$.

故答案为: $\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}; \frac{4}{7}$.

7. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD=1, AB=3, CD=1, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}$, 点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 则 $\angle BAD =$ ____; 若 BD 与 CM 相交于点 P , N 为线段 AC 延长线上的动点, 则 $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{NB}$ 的最大值为 ____.

【答案】 $\frac{2\pi}{3}$ $-\frac{23}{36}$

【知识点】数量积的坐标表示、向量夹角的坐标表示、求直线交点坐标

【分析】利用向量的加减运算和数量积的定义化简计算即可求得 $\angle BAD$; 根据条件建立平面直角坐标系, 设 $N\left(\frac{1}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, 运用向量数量积的坐标运算式, 将 $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{NB}$ 化成关于 t 的二次函数, 利用其图象特征即得 $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{NB}$ 的最小值.

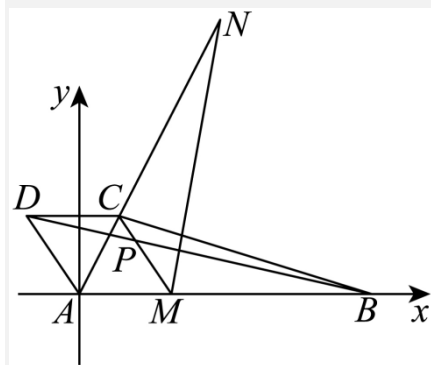
【详解】 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cos \angle BAD + 3 = \frac{3}{2}$,

解得 $\cos \angle BAD = -\frac{1}{2}$, 因为 $0 < \angle BAD < \pi$, 所以 $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$;

因为 $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, $AB \parallel CD$, 所以 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$,

因为 $AD = DC = 1$, 所以 $\triangle ACD$ 为正三角形.

如图建立平面直角坐标系,



则 $A(0,0), B(3,0), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M(1,0)$,

所以直线 CM 的方程为: $\frac{y-0}{x-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{\frac{1}{2}-1}$, 即 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$,

直线 BD 的方程为: $\frac{y-0}{x-3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{-\frac{1}{2}-3}$, 即 $\sqrt{3}x + 7y - 3\sqrt{3} = 0$,

两直线联立得 $\begin{cases} \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}x + 7y - 3\sqrt{3} = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$, 即 $P\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

因为 N 为线段 AC 延长线上的动点, 故可设 $N\left(\frac{1}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, 则 $t > 1$,

所以 $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{NB} = \left(\frac{1}{2}t - \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{2}t, -\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$= \left(\frac{1}{2}t - \frac{2}{3}\right)\left(3 - \frac{1}{2}t\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$= -t^2 + \frac{7}{3}t - 2 = -\left(t - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{23}{36}$,

因为 $t > 1$, 所以当 $t = \frac{7}{6}$ 时, $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{NB}$ 取得最大值 $-\frac{23}{36}$.

故答案为: $\frac{2}{3}\pi$; $-\frac{23}{36}$.

8. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = 2CD = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$, 若

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____; 若 P 为线段 BC 上一动点, 当 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$

取得最小值时, 则 $\cos \angle PDC =$ _____.

【答案】 $\frac{13}{4}$ $\frac{5\sqrt{7}}{14}$

【知识点】数量积的坐标表示、向量夹角的坐标表示

【分析】根据给定条件, 可得 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $\angle ACD = 60^\circ$, 建立平面坐标系, 利用数量积的坐标运算可求 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$, 利用 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 取得最小值时求得点 P 的坐标, 利用向量的夹角公式的坐标运算求得 $\cos \angle PDC$.

【详解】因为平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = 2CD = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形,

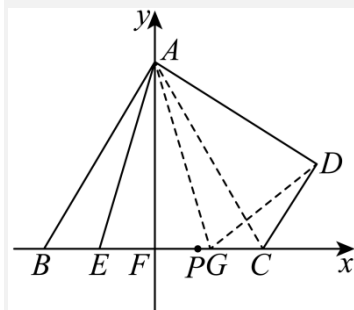
在 $\text{Rt}\triangle ADC$, $AC = 2, CD = 1$, 所以 $\angle ACD = 60^\circ$,

因为 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GC}$, 又 $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BC}$,

所以 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ，所以 E 在 BC ，同理可得 F, G 在 BC 上，

且 E, F, G 分别是 BC 的四等分点，

如图建立平面坐标系，



则 $A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(1, 0), D(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), E(-\frac{1}{2}, 0), F(0, 0), G(\frac{1}{2}, 0)$ ，

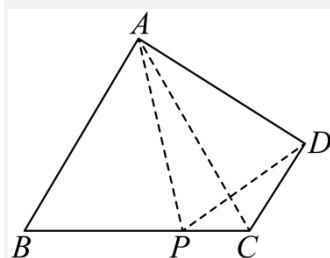
所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}) \cdot (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}) \cdot (0, -\sqrt{3}) = \frac{13}{4}$ ，

再设 $P(x, 0)$ ，则 $-1 \leq x \leq 1$ ，

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = (-x, \sqrt{3}) \cdot (1-x, 0) = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ ，

显然 $x = \frac{1}{2}$ 时， $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 取得最小，此时 $P(\frac{1}{2}, 0)$ ，

所以 $\cos \angle PDC = \cos \overrightarrow{DP}, \overrightarrow{DC} = \frac{(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})}{\sqrt{(-1)^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \cdot \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ 。



故答案为： $\frac{13}{4}$ ； $\frac{5\sqrt{7}}{14}$ 。

【点睛】方法点睛：利用平面几何知识求得图形的数量关系，通过建立坐标系，利用向量的坐标运算简化求解的运算量。