

导数含参练习

一、解答题

1. 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 -3 , 求 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

【答案】(1) $a = -1$;

(2) 答案见解析.

【知识点】已知切线(斜率)求参数、利用导数求函数(含参)的单调区间

【分析】(1) 应用导数的几何意义有 $f'(1) = 2a - 1 = -3$, 即可求;

(2) 对函数求导, 根据导数的区间符号求单调区间.

【详解】(1) 由题设 $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x}$, 则 $f'(1) = 2a - 1$,

又在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 -3 , 则 $2a - 1 = -3$, 可得 $a = -1$;

(2) 由题设 $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x}$ 且 $x > 0$,

当 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

当 $a > 0$, 则 $f'(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{2a}}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2a}}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{2a}})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty)$ 上单调递增,

综上, $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的递减区间为 $(0, +\infty)$, 无递增区间,

$a > 0$ 时, $f(x)$ 的递减区间为 $(0, \frac{1}{\sqrt{2a}})$, 递增区间为 $(\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty)$.

2. 已知函数 $f(x) = x \ln x + 2$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 求曲线 $y = f(x) - 2x$ 的单调区间和极值;

(3) 若函数 $y = f(x) + ax$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上为单调递增函数, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $y = (\ln 2 + 1)x$;

(2) 单调递增区间为 $(e, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, e)$, 极小值为 $y = -e + 2$, 无极大值;

(3) $[-2, +\infty)$.

【知识点】求已知函数的极值、求在曲线上一点处的切线方程（斜率）、由函数在区间上的单调性求参数、利用导数求函数的单调区间（不含参）

【分析】（1）求 $f'(x)$ ， $f(2)$ ， $k = f'(2)$ ，利用点斜式求出 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程；

（2）求出 $y = x \ln x - 2x + 2$ ，求 y' ，利用导数法求出 $y = x \ln x - 2x + 2$ 的单调性，利用单调性得到极值；

（3）求出 $y = f(x) + ax = x \ln x + ax + 2$ ，求出 y' ，由 $y = f(x) + ax$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上为单调递增函数，得到 $y' \geq 0$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上恒成立，从而得到 $a \geq -\ln x - 1$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上恒成立，构造函数 $g(x) = -\ln x - 1$ ，利用导数法得到 $g(x) = -\ln x - 1$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上的单调性，从而得到 $g(x) < g(e)$ ，则有 $a \geq -2$ ，即为实数 a 的取值范围.

【详解】（1） $\because f(x) = x \ln x + 2$ ， $\therefore f'(x) = \ln x + 1$ ，

$f(2) = 2 \ln 2 + 2$ ， $k = f'(2) = \ln 2 + 1$ ，

$\therefore y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程 $y - (2 \ln 2 + 2) = (\ln 2 + 1)(x - 2)$ ，

即 $y = (\ln 2 + 1)x$ ；

（2） $\because f(x) = x \ln x + 2$ ， $\therefore y = x \ln x - 2x + 2$ ， $\therefore y' = \ln x - 1$ ，

当 $y' = \ln x - 1 > 0$ ，即 $x > e$ 时， $y = x \ln x - 2x + 2$ 为单调递增函数；

当 $y' = \ln x - 1 < 0$ ，即 $0 < x < e$ 时， $y = x \ln x - 2x + 2$ 为单调递减函数；

故 $y = x \ln x - 2x + 2$ 的单调递增区间为 $(e, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(0, e)$ ；

当 $x = e$ 时， $y = x \ln x - 2x + 2$ 取极小值为 $y = -e + 2$ ，无极大值.

（3） $\because f(x) = x \ln x + 2$ ， $\therefore y = f(x) + ax = x \ln x + ax + 2$ ，

$\therefore y' = \ln x + a + 1$ ，

$\because y = f(x) + ax$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上为单调递增函数，

$\therefore y' \geq 0$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上恒成立，

$\therefore \ln x + a + 1 \geq 0$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上恒成立，

$\therefore a \geq -\ln x - 1$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上恒成立，

设 $g(x) = -\ln x - 1$ ，

$g'(x) = -\frac{1}{x}$ ，

$$\because x > e, \therefore g'(x) = -\frac{1}{x} < 0,$$

$\therefore g(x) = -\ln x - 1$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上为单调递减函数,

$$\therefore g(x) < g(e) = -2,$$

$$\therefore a \geq -2,$$

$\therefore y = f(x) + ax$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上为单调递增函数, 实数 a 的取值范围为 $[-2, +\infty)$.

3. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax - 1, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若 $f(x)$ 有极大值 $g(a)$, 解关于 a 的不等式 $2g(a) > a - \frac{1}{a} - 4$.

【答案】(1) $y = 2x - 2$

(2) 答案见解析

(3) $(-\infty, -1)$

【知识点】求在曲线上一点处的切线方程 (斜率)、利用导数求函数 (含参) 的单调区间、求已知函数的极值

【分析】(1) 根据导数的几何意义直接求解即可;

(2) 分 $a \geq 0$ 和 $a < 0$ 两种情况讨论求解即可;

(3) 根据 (2) 得 $g(a) = \ln\left(-\frac{1}{a}\right) - 2$, 进而得 $2\ln\left(-\frac{1}{a}\right) - a + \frac{1}{a} > 0$, 再令 $t = -\frac{1}{a}, t > 0$ 将不等式转化为 $2\ln t + \frac{1}{t} - t > 0$, 最后构造函数研究函数的性质解不等式.

【详解】(1) 解: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln x + x - 1$, 则 $f(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad f'(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2,$$

所以曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 0 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x - 2$

所以, 曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y = 2x - 2$.

(2) 解: 函数 $f(x) = \ln x + ax - 1, a \in \mathbf{R}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} + a = \frac{1+ax}{x}$

所以, 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = \frac{1+ax}{x} = 0$ 得 $x = -\frac{1}{a}$,

当 $x \in \left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减;

综上, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(3) 解: 由 (2) 知, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 无极值;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减,

所以函数 $f(x)$ 在 $x = -\frac{1}{a}$ 处取得极大值, 无极小值.

所以, 当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有极大值 $g(a) = f\left(-\frac{1}{a}\right) = \ln\left(-\frac{1}{a}\right) - 2$.

不等式 $2g(a) > a - \frac{1}{a} - 4$ 即为 $2\ln\left(-\frac{1}{a}\right) - 4 > a - \frac{1}{a} - 4$, 整理得 $2\ln\left(-\frac{1}{a}\right) - a + \frac{1}{a} > 0$,

令 $t = -\frac{1}{a}, t > 0$, 则不等式化简为 $2\ln t + \frac{1}{t} - t > 0$

令 $h(t) = 2\ln t + \frac{1}{t} - t (t > 0)$, 则 $h'(t) = \frac{-(t-1)^2}{t^2} \leq 0$,

所以函数 $h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又因为 $h(1) = 0$,

所以 $h(t) > 0$ 的解集为 $(0, 1)$, 即 $t = -\frac{1}{a} \in (0, 1)$

所以 $a \in (-\infty, -1)$, 即 $2g(a) > a - \frac{1}{a} - 4$ 的解集为 $(-\infty, -1)$,

所以, 关于 a 的不等式 $2g(a) > a - \frac{1}{a} - 4$ 的解集为 $(-\infty, -1)$.

4. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2 (a > 0)$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0 < a < 3$ 时, 记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 求 $M - m$ 的取值范围.

【答案】(1) 答案见解析

(2) $\left[\frac{8}{27}, 2\right)$

【知识点】利用导数求函数（含参）的单调区间、由导数求函数的最值（含参）、函数单调性、极值与最值的综合应用

【分析】（1）先求 $f(x)$ 的导数，直接根据 a 的范围，讨论导函数的正负，即可求解函数单调性；

（2）讨论 a 的范围，利用函数的单调性进行最大值和最小值的判断，进而求解 $M-m$ 的取值范围.

【详解】（1）由 $f(x)=2x^3-ax^2+2$ ，可得 $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$ ，

令 $f'(x)=0$ ，得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$.

因为 $a>0$ ，则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时， $f'(x)>0$ ；当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时， $f'(x)<0$.

$x\in(-\infty,0)$ 时， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 单调递增；

$x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时， $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 单调递减；

$x\in\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 单调递增.

（2）当 $0<a<3$ 时，由（1）可知， $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 单调递减，在 $x\in\left(\frac{a}{3},1\right)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+2$ ，最大值为 $f(0)=2$ 或 $f(1)=4-a$.

所以 $m=-\frac{a^3}{27}+2$ ， $M=\begin{cases} 4-a, & 0<a<2, \\ 2, & 2\leq a<3. \end{cases}$

所以 $M-m=\begin{cases} 2-a+\frac{a^3}{27}, & 0<a<2, \\ \frac{a^3}{27}, & 2\leq a<3. \end{cases}$.

当 $0<a<2$ 时，设 $h(a)=2-a+\frac{a^3}{27}$ ， $h'(a)=-1+\frac{a^2}{9}<0$ ， $h(a)$ 单调递减，

因为 $h(0)=2$ ， $h(2)=\frac{8}{27}$ ，所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left(\frac{8}{27},2\right)$.

当 $2\leq a<3$ 时， $\frac{a^3}{27}$ 单调递增，所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{27},1\right)$.

综上， $M-m$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{27},2\right)$.

5. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x} - 1$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 设函数 $g(x) = \frac{x+a}{\ln x}$, 求证: 当 $-1 < a < 0$ 时, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在极小值.

【答案】(1) $x - y - 2 = 0$

(2) 答案见解析

(3) 证明见解析

【知识点】利用导数求函数(含参)的单调区间、函数极值点的辨析、求在曲线上一点处的切线方程(斜率)

【分析】(1) 求导, 确定切线斜率即可求解;

(2) 求导, 通过讨论 $a \geq 0$ 和 $a < 0$, 确定导数符号, 即可求解;

(3) 由 $g'(x) = \frac{f(x)}{(\ln x)^2}$, 结合(2)确定 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性, 即可求证.

【详解】(1) 当 $a = 0$ 时,

$$f(x) = \ln x - 1.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \text{ 则 } f'(1) = 1, \text{ 又 } f(1) = -1,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y + 1 = x - 1$,

即 $x - y - 2 = 0$.

(2) 解: 由 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} = \frac{x+a}{x^2} (x > 0)$ 得:

① $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增;

② $a < 0$ 时, 若 $x \in (-a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 若 $x \in (0, -a)$, 则 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-a, +\infty)$ 递增, 在 $(0, -a)$ 递减;

综上: 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$, 递减区间;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-a, +\infty)$, 单调递减区间是 $(0, -a)$;

$$(3) \text{ 由 } g(x) = \frac{x+a}{\ln x} \text{ 得: } g'(x) = \frac{\ln x - \frac{a}{x} - 1}{(\ln x)^2} = \frac{f(x)}{(\ln x)^2},$$

因为 $-1 < a < 0$, 由 (2) 得: $f(x)$ 在 $(-a, +\infty)$ 递增, 又因为 $f(1) = -a - 1 < 0$,

取 $x = e$, 显然 $e > 1$, $f(e) = \frac{-a}{e} > 0$,

$\therefore$ 存在 $x_0 \in (1, e)$ 满足 $g'(x_0) = 0$,

令 $g'(x) > 0$, 解得: $x > x_0$,

令 $g'(x) < 0$, 解得: $1 < x < x_0$,

故 $g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 递增,

$\therefore -1 < a < 0$ 时, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 存在极小值.

6. 已知函数 $f(x) = \ln x - mx^2 + (1-2m)x + 1 (m \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $m = 1$, 求函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若对定义域内的任意 x , 都有 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求整数 m 的最小值.

【答案】 (1) $2x + y - 1 = 0$;

(2) 答案见解析;

(3) 1.

【知识点】 求在曲线上一点处的切线方程 (斜率)、利用导数求函数 (含参) 的单调区间、利用导数研究不等式恒成立问题

【分析】 (1) 把 $m = 1$ 代入, 求出 $f(x)$ 的导数, 再利用导数的几何意义求出切线方程.

(2) 求出 $f(x)$ 的导数, 再分类讨论求出函数的单调性.

(3) 将给定不等式分离参数, 构造函数 $g(x) = \frac{\ln x + x + 1}{x^2 + 2x}$, 利用导数求出最大值即可.

【详解】 (1) 当 $m = 1$ 时, $f(x) = \ln x - x^2 - x + 1$, 求得 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x - 1$, 则 $f'(1) = -2$, 而 $f(1) = -1$,

所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y + 1 = -2(x - 1)$, 即 $2x + y - 1 = 0$.

(2) 函数 $f(x) = \ln x - mx^2 + (1-2m)x + 1 (m \in \mathbb{R})$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

求导得 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2mx + 1 - 2m = -\frac{2mx^2 + (2m-1)x - 1}{x} = -\frac{(2mx-1)(x+1)}{x}$,

当 $m \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{2m}$; 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > \frac{1}{2m}$,

函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2m})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2m}, +\infty)$ 上单调递减,

所以当 $m \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2m})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2m}, +\infty)$ 上单调递减.

(3) 函数 $f(x) = \ln x - mx^2 + (1-2m)x + 1 (m \in \mathbb{R})$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$\forall x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln x - mx^2 + (1-2m)x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{\ln x + x + 1}{x^2 + 2x}$ 恒成立,

令函数 $g(x) = \frac{\ln x + x + 1}{x^2 + 2x}$, 求导得 $g'(x) = \frac{-(x+1)(x+2\ln x)}{(x^2 + 2x)^2}$,

令函数 $h(x) = -(x+2\ln x)$, 求导得 $h'(x) = -(1+\frac{2}{x}) < 0$, 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

而 $h(1) = -1 < 0$, $h(\frac{1}{2}) = 2\ln 2 - \frac{1}{2} > 0$, 则 $\exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $x_0 + 2\ln x_0 = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) > 0, g'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) < 0, g'(x) < 0$,

函数 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

则 $g(x)_{\max} = g(x_0) = \frac{\ln x_0 + x_0 + 1}{x_0^2 + 2x_0} = \frac{2\ln x_0 + 2x_0 + 2}{2(x_0^2 + 2x_0)} = \frac{x_0 + 2}{2x_0(x_0 + 2)} = \frac{1}{2x_0} \in (\frac{1}{2}, 1)$,

而 $m \geq g(x_0)$, 所以整数 m 的最小值为 1.

7. 已知函数 $f(x) = m(1-x) - \ln x - 1$.

(1) 若 $f(x)$ 的极小值小于 -1, 求 m 的取值范围;

(2) 当 $m > 1$ 时, 判断 $g(x) = f(x) + xe^x - m$ 的零点个数并写出证明过程.

【答案】(1) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$;

(2) 2 个零点, 证明见解析

【知识点】根据极值求参数、求函数零点或方程根的个数、利用导数研究函数的零点

【分析】(1) 函数求导后, 根据参数 m 的取值分类讨论, 得 $m < 0$ 时极小值 $f(-\frac{1}{m}) < -1$,

构造函数 $u(m) = 1 + m + \ln(-m) (m < 0)$, 求导得 $u(m)_{\max} = u(-1) = 0$, 即可求不等式 $u(m) < 0$

的解集:

(2) 由 $e^x - \frac{\ln x + 1}{x} - m = 0$, 令 $v(x) = e^x - \frac{\ln x + 1}{x} - m, x \in (0, +\infty)$, 对其求导, 令

$$r(x) = x^2 e^x + \ln x, x \in (0, +\infty),$$

求导判断 $r(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 结合零点存在定理, 得 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 使 $r(x_0) = 0$,

求出 $v(x)$ 的最小值为 $v(x_0)$, 由 $r(x_0) = 0$ 可得 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}, x_0 = -\ln x_0$, 故 $v(x)$ 的最小值

$v(x_0) = 1 - m$, 讨论 $1 - m$, 即可得函数 $g(x)$ 的零点个数.

【详解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = -m - \frac{1}{x} = -\frac{mx+1}{x}$,

当 $m \geq 0$ 时, 易得 $f'(x) < 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 无极小值, 不满足;

当 $m < 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > -\frac{1}{m}$, 即 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{m}, +\infty\right)$ 上单调递增;

由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < -\frac{1}{m}$, 即 $f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{m}\right)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{1}{m}\right) = m + \ln(-m)$, 而 $f(x)$ 的极小值小于 -1 ,

所以 $m + \ln(-m) < -1$, 即 $1 + m + \ln(-m) < 0$,

令 $u(m) = 1 + m + \ln(-m) (m < 0)$, 则 $u'(m) = 1 + \frac{1}{m} = \frac{m+1}{m}$,

所以当 $m \in (-\infty, -1)$ 时, $u'(m) > 0$, 当 $m \in (-1, 0)$ 时, $u'(m) < 0$,

则 $u(m)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, $u(m)_{\max} = u(-1) = 0$

所以 $u(m) < 0$, 可得 $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

故 m 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

(2) $g(x) = f(x) + xe^x - m = xe^x - \ln x - mx - 1, x \in (0, +\infty)$.

令 $g(x) = 0$, 得 $e^x - \frac{\ln x + 1}{x} - m = 0$,

令 $v(x) = e^x - \frac{\ln x + 1}{x} - m, x \in (0, +\infty)$, 则 $g(x)$ 与 $v(x)$ 有相同的零点,

且 $v'(x) = e^x - \frac{1 - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$.

令 $r(x) = x^2 e^x + \ln x, x \in (0, +\infty)$, 则 $r'(x) = (x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{x}$,

因为 $x > 0$, 则 $r'(x) > 0$, 所以 $r(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $r\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}-2} - 1 < 0, r(1) = e > 0$, 所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使得 $r(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $r(x) < 0$, 即 $v'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $r(x) > 0$, 即 $v'(x) > 0$,

所以 $v(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增, 最小值为 $v(x_0) = e^{x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} - m$.

由 $r(x_0) = 0$, 得 $x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} = -\frac{1}{x_0} \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0}$, 即 $x_0 e^{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}}$,

令 $\varphi(x) = x e^x, x \in (0, +\infty)$, 则 $\varphi'(x) = (x+1)e^x > 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

因为 $\frac{1}{e} < x_0 < 1$, 所以 $\ln \frac{1}{x_0} > 0$, 则 $\varphi(x_0) = \varphi\left(\ln \frac{1}{x_0}\right)$,

所以 $x_0 = \ln \frac{1}{x_0}$, 从而 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}, x_0 = -\ln x_0$,

所以 $v(x)$ 的最小值 $v(x_0) = e^{x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} - m = \frac{1}{x_0} - \frac{-x_0 + 1}{x_0} - m = 1 - m$,

又当 x 趋近于 0 时, $v(x)$ 趋近于 $+\infty$, 当 x 趋近于 $+\infty$ 时, $v(x)$ 趋近于 $+\infty$,

当 $m > 1$ 时, $1 - m < 0, v(x)$ 有 2 个零点,

故 $g(x)$ 有 2 个零点.

8. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 内的最大值为 2, 求 a 的值;

(3) 若 $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 答案见解析

(2) $a = e$;

(3) $\left[\frac{e+1}{e-1}, +\infty\right)$.

【知识点】已知函数最值求参数、利用导数求函数(含参)的单调区间、利用导数研究不等式恒成立问题

【分析】(1) 求导, 分 $a \leq 0$ 、 $0 < a < 1$ 、 $a = 1$ 、 $a > 1$ 四种情况讨论;

(2) 结合第 1 问的单调性求出最值即可;

(3) 利用参变分离求最值即可.

【详解】(1) 求导得 $f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{(x-1)(ax-1)}{x^2} (x > 0)$,

当 $a \leq 0$ 时, $ax-1 < 0$, 则 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $\frac{1}{a}$,

当 $0 < a < 1$ 时, $1 < \frac{1}{a}$, 则 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > \frac{1}{a}$, $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < \frac{1}{a}$,

则 $f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a})$ 内单调递减, 在 $(0,1)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = 1$ 时, $1 = \frac{1}{a}$, $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 1$ 时, $1 > \frac{1}{a}$, 则 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$, $f'(x) < 0$, 得 $\frac{1}{a} < x < 1$,

则 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{a}, 1)$ 内单调递减, 在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

综上, $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;

$0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a})$ 内单调递减, 在 $(0,1)$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增;

$a = 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

$a > 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{a}, 1)$ 内单调递减, 在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 知, 当 $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内单调递增,

则 $f(x)_{\max} = f(1) = a - 1 = 2$, 解得 $a = 3$ 与 $a \leq 1$ 矛盾;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = 1 - a - (a+1)\ln \frac{1}{a} = 2$, 即 $a - (a+1)\ln a + 1 = 0$,

令 $g(x) = x - (x+1)\ln x + 1 (x > 1)$, 则 $g'(x) = -\ln x - \frac{1}{x} < 0$,

则 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

又 $g(e) = e - (e+1)\ln e + 1 = 0$, 故 $a = e$;

综上, $a = e$.

(3) 由 $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$ 可得 $ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x \geq x - \frac{1}{x}$,

即 $a(x - \ln x) \geq x + \ln x$,

令 $h(x) = x - \ln x$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

则 $h'(x) > 0$ 得 $x > 1$; $h'(x) < 0$ 得 $0 < x < 1$,

则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

则 $h(x) \geq h(1) = 1 > 0$, 则 $x - \ln x > 0$,

故 $a \geq \frac{x + \ln x}{x - \ln x}$, 令 $k(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}$,

则 $k'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$, 令 $k'(x) = 0$, 解得 $x = e$,

则当 $0 < x < e$ 时, $k'(x) > 0$, 当 $x > e$ 时, $k'(x) < 0$,

则 $k(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增, 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,

则 $k(x)_{\max} = k(e) = \frac{e+1}{e-1}$, 所以 $a \geq \frac{e+1}{e-1}$,

故 a 的取值范围为 $\left[\frac{e+1}{e-1}, +\infty\right)$.

9. 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x - 1$, $g(x) = xe^x - ax^2 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 证明: $f(x) + g(x) \geq x$.

【答案】(1) $y = x$

(2) 答案见解析

(3) 证明见解析

【知识点】利用导数证明不等式、利用导数求函数(含参)的单调区间、求在曲线上一点处的切线方程(斜率)

【分析】(1) 借助导数的几何意义计算即可得;

(2) 求导后分 $a \leq 0$ 及 $a > 0$ 讨论即可得;

(3) 令 $F(x) = f(x) + g(x) - x$, 则 $F'(x) = (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$, 构造函数 $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$, 结合零点存在性定理可得 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点 x_0 , 则可得 $F(x)$ 单调性, 即可得其最小值 $F(x_0)$, 即可得证.

【详解】(1) $g(0) = 0$, $g'(x) = (x+1)e^x - 2ax$, 则 $g'(0) = 1$,

又 $g(0) = 0$ $g(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = x$.

(2) 由题意可得: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x}$,

当 $a \leq 0$ 时, 则 $2ax^2 - 1 < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \sqrt{\frac{1}{2a}}$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \sqrt{\frac{1}{2a}}$,

可知 $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}, +\infty\right)$ 上单调递增;

综上所述: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(3) 令 $F(x) = f(x) + g(x) - x = xe^x - \ln x - x - 1$, $x > 0$,

则 $F'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x} - 1 = (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$,

由 $x > 0$ 可知 $x+1 > 0$, 令 $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

因为 $y = e^x$, $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

且 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$, $h(1) = e - 1 > 0$,

可知 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$,

当 $0 < x < x_0$, 则 $h(x) < 0$, 即 $F'(x) < 0$;

当 $x > x_0$, 则 $h(x) > 0$, 即 $F'(x) > 0$,

可知 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $F(x) \geq F(x_0) = x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 - 1$,

又因为 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$, 则 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, $e^{-x_0} = x_0$, $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

可得 $F(x_0) = x_0 \times \frac{1}{x_0} - \ln e^{-x_0} - x_0 - 1 = 0$,

即 $F(x) \geq 0$, 所以 $f(x) + g(x) \geq x$.

故可证明 $f(x) + g(x) \geq x$.

10. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a = 0$, 求 $y = f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $a \geq 1$, 且 $f(x) > 1$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上恒成立, 求 a 的范围.

【答案】(1) 答案见解析

(2) $a \in (2, +\infty)$

【知识点】利用导数求函数的单调区间（不含参）、利用导数求函数（含参）的单调区间、利用导数研究不等式恒成立问题

【分析】(1) 求导, 直接判断函数单调区间;

(2) 分情况讨论函数单调性, 即可判断函数最值, 进而解决不等式恒成立问题.

【详解】(1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x$, $x > 0$,

则 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$,

令 $f'(x) = \frac{1-x}{x^2} = 0$, 解得 $x = 1$,

且当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

即函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$;

(2) 由已知 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$, $x > 0$,

得 $f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = 1$,

当 $a = 1$ 时, $x_1 = x_2 = 1$, 此时 $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2} \geq 0$ 恒成立,

即函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 所以 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - e + 2 < 1$, 所以不满足题意;

当 $a > 1$ 时, $x_1 < x_2$, 此时函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上单调递减;

① 当 $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{e}$, 即 $a \geq e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $(1, e)$ 上单调递增,

所以 $f(x) \geq f(1) = a - 1 > 1$, 解得 $a > 2$,

所以 $a \geq e$ 时, 不等式恒成立;

② 当 $\frac{1}{a} > \frac{1}{e}$, 即 $1 < a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $(1, e)$ 上单调递增,

所以需满足
$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{a}{e} - e + a + 1 > 1 \\ f(1) = a - 1 > 1 \end{cases}, \text{ 解得 } a > 2,$$

所以 $2 < a < e$ 时不等式恒成立.

综上所述 $a \in (2, +\infty)$.