

导数含参练习

一、解答题

1. 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 -3 , 求 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

2. 已知函数 $f(x) = x \ln x + 2$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 求曲线 $y = f(x) - 2x$ 的单调区间和极值;

(3) 若函数 $y = f(x) + ax$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上为单调递增函数, 求实数 a 的取值范围.

3. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax - 1, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若 $f(x)$ 有极大值 $g(a)$, 解关于 a 的不等式 $2g(a) > a - \frac{1}{a} - 4$.

4. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2 (a > 0)$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0 < a < 3$ 时, 记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 求 $M - m$ 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x} - 1$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 设函数 $g(x) = \frac{x+a}{\ln x}$, 求证: 当 $-1 < a < 0$ 时, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在极小值.

6. 已知函数 $f(x) = \ln x - mx^2 + (1 - 2m)x + 1 (m \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $m = 1$, 求函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3)若对定义域内的任意 x ，都有 $f(x) \leq 0$ 恒成立，求整数 m 的最小值.

7. 已知函数 $f(x) = m(1-x) - \ln x - 1$.

(1)若 $f(x)$ 的极小值小于 -1 ，求 m 的取值范围；

(2)当 $m > 1$ 时，判断 $g(x) = f(x) + xe^x - m$ 的零点个数并写出证明过程.

8. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内的最大值为 2，求 a 的值；

(3)若 $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$ ，求 a 的取值范围.

9. 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x - 1$ ， $g(x) = xe^x - ax^2 (a \in \mathbf{R})$.

(1)求 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(3)证明: $f(x) + g(x) \geq x$.

10. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$ ， $a \in \mathbf{R}$.

(1)若 $a=0$ ，求 $y=f(x)$ 的单调区间.

(2)若 $a \geq 1$ ，且 $f(x) > 1$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上恒成立，求 a 的范围.