

## 复合函数运算

### 一、解答题

1. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \frac{x}{\sqrt{2x+1}};$$

$$(2) y = (2x-3)\sin(2x+5);$$

$$(3) y = \frac{\cos(3x-2)}{2x};$$

$$(4) y = (3x+1)^2 \ln(3x);$$

$$(5) y = 3^x e^{-3x}.$$

**【答案】** (1)  $y' = \frac{x+1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$$(2) y' = 2\sin(2x+5) + 2(2x-3)\cos(2x+5)$$

$$(3) y' = \frac{-3x\sin(3x-2) - \cos(3x-2)}{2x^2}$$

$$(4) y' = 6(3x+1)\ln(3x) + \frac{(3x+1)^2}{x}$$

$$(5) y' = (\ln 3 - 3) \cdot 3^x \cdot e^{-3x}$$

**【知识点】** 导数的运算法则、简单复合函数的导数

**【分析】** 由基本初等函数的导数公式结合导数的依次运算可得.

【详解】(1)  $y' = \frac{\sqrt{2x+1} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$

$$= \frac{2x+1-x}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} = \frac{x+1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}.$$

(2)  $y' = 2\sin(2x+5) + 2(2x-3)\cos(2x+5)$

$$= 2\sin(2x+5) + (4x-6)\cos(2x+5).$$

(3)  $y' = \frac{-3\sin(3x-2) \cdot 2x - 2\cos(3x-2)}{4x^2}$

$$= \frac{-3x\sin(3x-2) - \cos(3x-2)}{2x^2}.$$

(4)  $y' = 6(3x+1)\ln(3x) + \frac{(3x+1)^2}{x}.$

(5)  $y' = 3^x \cdot e^{-3x} \cdot \ln 3 + 3^x \cdot (-3)e^{-3x} = (\ln 3 - 3) \cdot 3^x \cdot e^{-3x}.$

2. 求下列函数的导数:

(1)  $y = \sin 2x - \cos 2x;$

(2)  $y = 2x \sin(2x+5);$

(3)  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$

(4)  $y = x^3 e^{\cos x}.$

【答案】(1)  $y' = 2\cos 2x + 2\sin 2x$

(2)  $y' = 2\sin(2x+5) + 4x\cos(2x+5)$

$$(3) y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(4) y' = 3x^2 e^{\cos x} - x^3 e^{\cos x} \sin x$$

【知识点】简单复合函数的导数、导数的乘除法

【分析】(1) 由导数的加减法公式结合复合函数的求导法则运算可得解；

(2) 由导数的乘法公式结合复合函数的导数运算可得解；

(3) 由导数的除法公式结合复合函数的求导法则运算可得解；

(4) 由导数的乘法公式结合复合函数的导数运算可得解.

【详解】(1)  $y' = 2 \cos 2x + 2 \sin 2x$ .

(2)  $y' = 2 \sin(2x+5) + 4x \cos(2x+5)$ .

$$(3) y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$(4) y' = (x^3)' e^{\cos x} + x^3 (e^{\cos x})' = 3x^2 e^{\cos x} + x^3 e^{\cos x} (\cos x)' = 3x^2 e^{\cos x} - x^3 e^{\cos x} \sin x.$$

3. 求下列函数的导数：

$$(1) y = \cos(x+3);$$

$$(2) y = (2x-1)^3;$$

$$(3) y = e^{-2x+1}.$$

【答案】(1)  $y' = -\sin(x+3)$

$$(2) y' = 6(2x-1)^2$$

$$(3) y' = -2e^{-2x+1}$$

【知识点】简单复合函数的导数

【分析】由复合函数的求导法则求解即可；

【详解】(1) 函数  $y = \cos(x+3)$  可以看作函数  $y = \cos u$  和  $u = x+3$  的复合函数，

由复合函数的求导法则可得： $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\cos u)' \cdot (x+3)' = -\sin u \cdot 1 = -\sin u = -\sin(x+3)$ 。

所以  $y' = -\sin(x+3)$ ；

(2) 函数  $y = (2x-1)^3$  可以看作函数  $y = u^3$  和  $u = 2x-1$  的复合函数，

由复合函数的求导法则可得： $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^3)' \cdot (2x-1)' = 3u^2 \cdot 2 = 6u^2 = 6(2x-1)^2$ 。

所以  $y' = 6(2x-1)^2$

(3) 函数  $y = e^{-2x+1}$  可以看作函数  $y = e^u$  和  $u = -2x+1$  的复合函数，

$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (e^u)' \cdot (-2x+1)' = e^u \cdot (-2) = -2e^u = -2e^{-2x+1}$ ，

所以  $y' = -2e^{-2x+1}$ 。

4. 求下列函数的导数：

$$(1) y = \cos(1+x^2)；$$

$$(2) y = \ln(2x^2+x)。$$

【答案】(1)  $y'_x = -2x \sin(1+x^2)$

$$(2) y'_x = \frac{4x+1}{2x^2+x}$$

【知识点】简单复合函数的导数

【分析】利用基本初等函数的导数公式、导数的运算法则和复合函数的导数法则即可求解.

【详解】(1) 设  $u = 1 + x^2, y = \cos u$ ,

$$\text{所以 } y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\cos u)' \cdot (1 + x^2)' = -\sin u \cdot 2x = -2x \sin(1 + x^2).$$

(2) 设  $u = 2x^2 + x$ , 则  $y = \ln u$ .

$$\text{所以 } y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\ln u)' \cdot (2x^2 + x)' = \frac{1}{u} \cdot (4x + 1) = \frac{4x + 1}{2x^2 + x}.$$

5. 求下列函数的导数.

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}};$$

$$(2) y = e^{\sin(ax+b)};$$

$$(3) y = \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$(4) y = 5\log_2(2x+1).$$

$$\text{【答案】}(1) y'_x = 2x(1-2x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$(2) y'_x = a \cos(ax+b) \cdot e^{\sin(ax+b)}$$

$$(3) y'_x = 2 \sin\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$(4) y'_x = \frac{10}{(2x+1)\ln 2}$$

【知识点】简单复合函数的导数

【分析】利用复合函数求导法则求导即可.

【详解】(1) 设  $y = u^{\frac{1}{2}}$ ,  $u = 1 - 2x^2$ ,

$$\begin{aligned}\text{则 } y'_x &= y'_u \cdot u'_x = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' (1 - 2x^2)' = \left(-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot (-4x) \\ &= -\frac{1}{2}(1 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}}(-4x) = 2x(1 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

(2) 设  $y = e^u$ ,  $u = \sin v$ ,  $v = ax + b$ ,

$$\text{则 } y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = e^u \cdot \cos v \cdot a = a \cos(ax + b) \cdot e^{\sin(ax + b)}.$$

(3) 设  $y = u^2$ ,  $u = \sin v$ ,  $v = 2x + \frac{\pi}{3}$ ,

$$\text{则 } y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot \cos v \cdot 2 = 4 \sin v \cos v = 2 \sin 2v = 2 \sin\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

(4) 设  $y = 5 \log_2 u$ ,  $u = 2x + 1$ ,

$$\text{则 } y'_x = y'_u \cdot u'_x = (5 \log_2 u)' \cdot (2x + 1)' = \frac{10}{u \ln 2} = \frac{10}{(2x + 1) \ln 2}.$$

6. 求下列函数的导数:

$$(1) y = (x^2 + 2x - 1)e^{2-x};$$

$$(2) y = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(3) y = \frac{2x}{\sin(2x+5)};$$

$$(4) y = \log_3(2x-1).$$

【答案】(1)  $y' = (-x^2 + 3)e^{2-x}$

$$(2) y' = -\frac{x}{1+x^2}$$

$$(3) y' = \frac{2\sin(2x+5) - 4x\cos(2x+5)}{\sin^2(2x+5)}$$

$$(4) y' = \frac{2}{(2x-1)\ln 3}$$

【知识点】简单复合函数的导数、导数的乘除法

【分析】根据常见基本初等函数的导数以及求导公式和法则，即可逐一求解.

【详解】(1)

$$y' = (x^2 + 2x - 1)' e^{2-x} + (x^2 + 2x - 1)(e^{2-x})' = (2x + 2)e^{2-x} + (x^2 + 2x - 1)(-e^{2-x}) = (-x^2 + 3)e^{2-x}.$$

$$(2) \text{ 因为 } y = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

$$\text{所以 } y' = -\frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]' = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2} \times (2x) = -\frac{x}{1+x^2}.$$

$$(3) y' = \frac{(2x)' \sin(2x+5) - (2x)[\sin(2x+5)]'}{\sin^2(2x+5)} = \frac{2\sin(2x+5) - 4x\cos(2x+5)}{\sin^2(2x+5)}.$$

$$(4) y' = [\log_3(2x-1)]' = \frac{1}{(2x-1)\ln 3} \times 2 = \frac{2}{(2x-1)\ln 3}.$$

7. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \ln(e^x + x^2);$$

$$(2) y = 10^{2x+3};$$

$$(3) y = \sin^4 x + \cos^4 x;$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(5) y = \sin 2x \cos 3x;$$

$$(6) y = x^3 e^{\cos x}.$$

【答案】(1)  $y' = \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2}$

(2)  $y' = 2 \times 10^{2x+3} \ln 10$

(3)  $y' = -\sin 4x$

(4)  $y' = x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

(5)  $y' = 2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$

(6)  $y' = 3x^2 e^{\cos x} - x^3 e^{\cos x} \sin x$

【知识点】导数的运算法则、简单复合函数的导数、基本初等函数的导数公式

【分析】结合导数的四则运算，利用复合函数求导法则求解各个函数即可.

【详解】(1) 令  $u = e^x + x^2$ ，则  $y = \ln u$ .

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot (e^x + x^2)' = \frac{1}{e^x + x^2} \cdot (e^x + 2x) = \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2}.$$

(2) 令  $u = 2x + 3$ ，则  $y = 10^u$ ,

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = 10^u \cdot \ln 10 \cdot (2x + 3)' = 2 \times 10^{2x+3} \ln 10.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \because y = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ & = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x, \therefore y' = -\sin 4x. \end{aligned}$$

(4) 令  $u = 1 - x^2$ ，则  $y = u^{-\frac{1}{2}}$ ,

$$\text{则 } y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left( u^{-\frac{1}{2}} \right)' (1 - x^2)' = -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

(5)  $\because y = \sin 2x \cos 3x$ ,

$$\therefore y' = (\sin 2x)' \cos 3x + \sin 2x (\cos 3x)' = 2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x.$$

$$(6) \quad y' = (x^3)' e^{\cos x} + x^3 (e^{\cos x})' = 3x^2 e^{\cos x} + x^3 e^{\cos x} \cdot (\cos x)' = 3x^2 e^{\cos x} - x^3 e^{\cos x} \sin x.$$