

选填练习十一

1. 已知集合 $A = \{-3, -1, 0, 2, 3, 4\}$, $\complement_{\mathbf{R}}B = \{x|x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.
- A. $\emptyset$ B. $\{-3, -1, 0, 4\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{0, 2, 3\}$

【答案】C

【解析】 $\because \complement_{\mathbf{R}}B = \{x|x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$,

$\therefore B = \{x|0 < x \leq 3\}$,

又 $A = \{-3, -1, 0, 2, 3, 4\}$,

则 $A \cap B = \{2, 3\}$.

故选C.

【标注】【知识点】补集

2. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $\frac{2}{x-1} < 0$ ”是“ $x^2 < 1$ ”的().
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】由 $\frac{2}{x-1} < 0$ 得 $x-1 < 0$, 即 $x < 1$,

由 $x^2 < 1$ 得 $-1 < x < 1$,

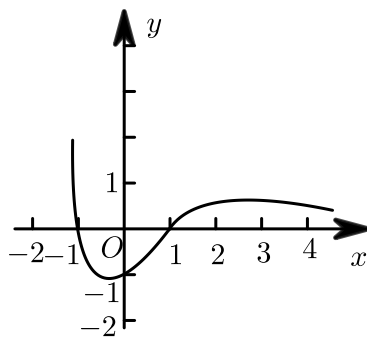
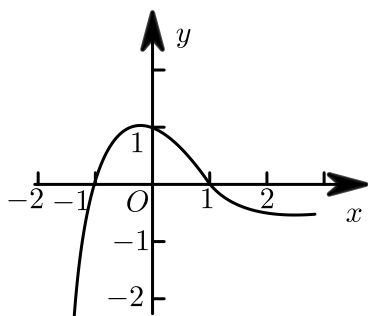
因为 $(-1, 1) \subsetneq (-\infty, 1)$,

所以“ $\frac{2}{x-1} < 0$ ”是“ $x^2 < 1$ ”的必要不充分条件.

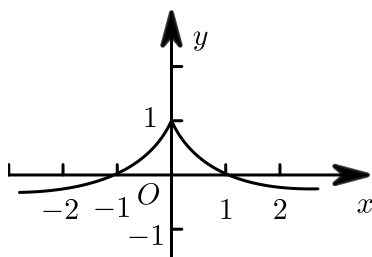
故选B.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

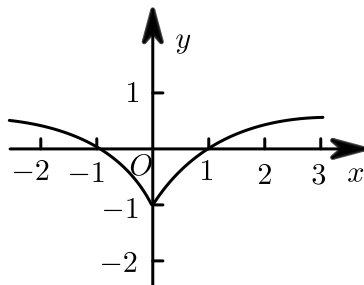
3. 函数 $f(x) = \frac{1-x^2}{e^x}$ 的图象大致为().
- A. B.



C.



D.



【答案】 A

【解析】 根据题意， $f(x) = \frac{1-x^2}{e^x}$ ，

有 $f(-x) = \frac{1-x^2}{e^{-x}}$ ，为非奇非偶函数，可以排除C、D，

又由 $f(0) = \frac{1-0}{e^0} = 1$ ，排除B。

故选：A。

【标注】 【知识点】根据奇偶性确定图象

4. 已知直线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 交于 A, B 两点，且线段 AB 的中点坐标为 $D(2, \sqrt{2})$ ，则 $|AB| = ($

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 A

【解析】 圆 C 的方程 $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 可化为 $(x-3)^2 + y^2 = 4$ ，

$\therefore$ 圆 C 的圆心 C 坐标为 $(3, 0)$ ，半径为2，

$\therefore$ 设线段 AB 的中点的坐标为 $D(2, \sqrt{2})$ ，

$\therefore |CD| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore |AB| = 2 \times \sqrt{4-3} = 2$ 。

故选A。

【标注】 【知识点】圆的弦长的相关问题

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，若 $a = f(\log_2 e)$ ， $b = f(\ln 2)$ ， $c = \left(\log_{\frac{1}{2}} 3\right)$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）。
- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

【答案】 D

【解析】 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore \log_2 e > 1, 0 < \ln 2 < 1$ ，

$\left|\log_{\frac{1}{2}} 3\right| = \log_2 3 > \log_2 e > 1$ ，

$\therefore f\left(\log_{\frac{1}{2}} 3\right) > f(\log_2 e) > f(\ln 2)$ ，

$\therefore c > a > b$ 。

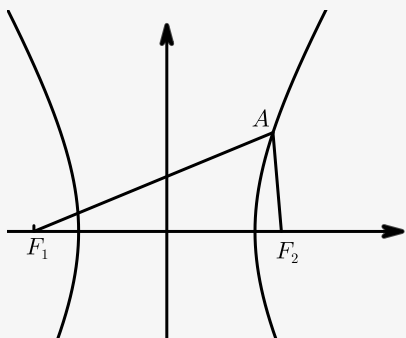
故选D。

【标注】 【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的离心率为2，左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点A在双曲线C上，若 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为10，则 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为（ ）。
- A. $\sqrt{15}$ B. $2\sqrt{15}$ C. 15 D. 30

【答案】 A

【解析】



$\triangle AF_1F_2$ 的周长为10，

故 $|AF_1| + |AF_2| + |F_1F_2| = 10$ ，

离心率 $e = 2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + 3}}{a}$ ，

$\therefore a^2 + 3 = 4a^2$ ，

$\therefore a = 1, c = 2$ ，

$$|F_1F_2| = 2c = 4,$$

$$\text{故}|AF_1| + |AF_2| = 6,$$

设A在双曲线右支上，而由双曲线定义可知，

$$|AF_1| - |AF_2| = 2a = 2,$$

$$\therefore \begin{cases} |AF_1| = 4 \\ |AF_2| = 2 \end{cases},$$

$$\text{故} S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{15} = \sqrt{15}.$$

故选A.

【标注】 【知识点】双曲线的焦点三角形问题（小题）

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$ ，则下列四个结论中：

① $f(x)$ 的周期为 π ；

② $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴；

③ $\left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right]$ 是 $f(x)$ 的一个单调递增区间；

④ $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上的最大值为 2.

所有正确结论的序号是（ ）.

A. ①②

B. ①③

C. ①②④

D. ①③④

【答案】 B

$$\text{【解析】 } f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x \right)$$

$$= 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\text{① } T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故①正确；}$$

$$\text{② 对称轴 } 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi,$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 故②错误；}$$

$$\text{③ 单调递增区间：} \pi + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi + 2k\pi,$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,$$

$$\frac{5}{12}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{11}{12}\pi + k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, } -\frac{7}{12}\pi \leq x \leq -\frac{1}{12}\pi, \text{ 故③正确；}$$

$$\text{④ } x \in \left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$$

$$2x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right]$$

$$2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{4}{3}\pi\right]$$

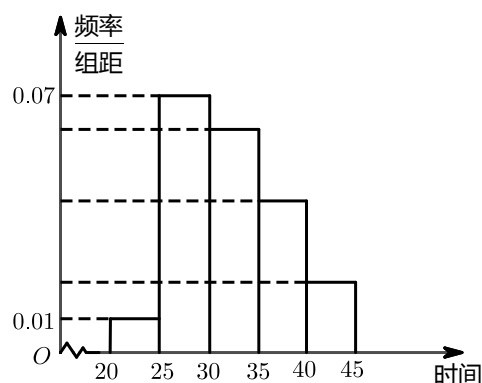
$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-2, \sqrt{3}]$, 故④错误.

故选B.

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数判定结论正误

8. 某健身俱乐部统计学员经训练后的平板支撑的时间增加值都在20s到45s之间, 其频率分布直方图如图所示. 现已知时间增加值在 $[30, 35)$, $[35, 40)$, $[40, 45]$ 的健身人数呈递减的等差数列, 则学员时间增加值是 $[30, 35)$ 或 $[40, 45]$ 的频率之和为().



- A. 0.5 B. 0.3 C. 0.6 D. 0.4

【答案】 D

【解析】 由题中频率分布直方图可知, 时间增加值在 $[20, 25)$ 或 $[25, 30)$ 的频率之和为

$$(0.01 + 0.07) \times 5 = 0.4,$$

设时间增加值在 $[30, 35)$, $[35, 40)$, $[40, 45]$ 的学员出现的频率为 x , y , z ,

$$\text{则} \begin{cases} x + z = 2y \\ x + y + z = 1 - 0.4 \end{cases}$$

解得 $y = 0.2$, 即时间增加值在 $[30, 35)$, $[40, 45]$ 的频率之和为0.4.

故选: D.

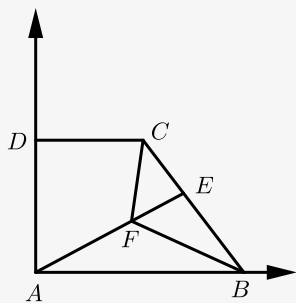
【标注】 【知识点】 频率分布直方图

9. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \perp AB$, $CD \parallel AB$, $AB = 2AD = 2DC = 2$, E 为 BC 边上一点, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$, F 为直线 AE 上一点, 则 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FB}$ 的最大值为().

- A. $\frac{6}{13}$ B. $-\frac{6}{13}$ C. $\frac{9}{20}$ D. $-\frac{9}{20}$

【答案】 C

【解析】如图建立坐标系，



$$\because AB = 2AD = 2DC = 2,$$

$$\therefore A(0,0), B(2,0), D(0,1), C(1,1),$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = (-1,1),$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC},$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\therefore E\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{直线} AE: y = \frac{1}{2}x,$$

$$\text{设} F(x_0, y_0), \text{则} \overrightarrow{CF} = (x_0 - 1, y_0 - 1), \overrightarrow{FB} = (2 - x_0, -y_0),$$

$$\therefore \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FB} = -x_0^2 + 3x_0 - 2 - \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{1}{2}x_0$$

$$= -\frac{5}{4}x_0^2 + \frac{7}{2}x_0 - 2,$$

$$\text{令} g(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - 2, g'(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2},$$

$$\therefore \text{令} g'(x) = 0, x = \frac{7}{5},$$

$$\therefore g'(x) > 0, x < \frac{7}{5}, g(x) \text{单调递增},$$

$$g'(x) < 0, x > \frac{7}{5}, g(x) \text{单调递减},$$

$$\therefore \text{当} x = \frac{7}{5} \text{时} g(x) \text{取最大值},$$

$$\therefore g(x)_{\max} = \frac{9}{20}.$$

故选C.

【标注】 【知识点】直接求函数的最值（不含参）

10. 若复数 $z = 2i + \frac{2}{1+i}$ ，其中 i 是虚数单位，则复数 z 的模为 _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

$$\text{【解析】 复数} z = 2i + \frac{2}{1+i} = 2i + \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 2i + 1 - i = 1 + i,$$

$$\text{则} |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

【标注】 【知识点】复数的四则运算综合

11. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中, 含 x^3 项的系数等于 ____ .

【答案】 15

【解析】 本题考查二项式定理的通项的应用, 属容易题.

$$T_{r+1} = C_6^r \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{6-r} \cdot (-1)^r \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^r = (-1)^r C_6^r \frac{x^{6-r}}{y^{\frac{6-r}{2}}} \cdot \frac{y^r}{x^{\frac{r}{2}}} = (-1)^r C_6^r \frac{x^{6-\frac{3}{2}r}}{y^{-\frac{3}{2}r+3}},$$

由已知得, $\frac{3}{2}r - 3 = 0$, $r = 2$,

$\therefore$ 含 x^3 项的系数为 $C_6^2(-1)^2 = 15$.

【标注】 【知识点】求二项式展开式的特定项

12. 某长方体的长、宽、高分别为4, 4, 2, 则该长方体的体积与其外接球的体积之比为 ____ .

【答案】 $8:9\pi$

【解析】 因为长方体的长、宽、高分别为4、4、2,

所以其体积 $V_{\text{长方形}} = 4 \times 4 \times 2 = 32$,

其外接球直径为 $2R = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$, 故 $R = 3$,

所以其外接球体积 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$,

因此, 长方体的体积与其外接球的体积之比为 $\frac{32}{36\pi} = \frac{8}{9\pi}$.

故答案为: $8:9\pi$.

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题

13. 甲、乙两人参加一次历史知识竞赛, 已知在备选的10道试题中, 甲、乙分别都能答对其中的8道题.

规定每人都从备选题中随机抽出3道题进行回答, 至少答对2道题才算合格. 则甲不合格的概率是 ____; 甲、乙两人中恰有一人合格的概率是 ____.

【答案】 $\frac{1}{15}$; $\frac{224}{225}$

【解析】 甲的不合格率:

设甲考试不合格为事件 A ,

$$P(A) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{8 \times 1}{120} = \frac{1}{15}.$$

设乙考试不合格为事件 B ,

$$\therefore P(B) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15};$$

又 $\because A, B$ 事件相互独立,

$\therefore$ 甲乙两人考试均不合格的概率为 $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{15} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{225}$,

$\therefore$ 甲乙两人至少一人合格的概率为 $P = 1 - P(AB) = \frac{224}{225}$.

【标注】 【知识点】 对立事件的概率和为1; 相互独立事件的概率乘法公式

14. 已知 $a > 0, b > 0, a + 2b = 1$, 则 $a^2 + 4b^2 + \frac{1}{4ab}$ 的最小值是 _____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 $\because$ 已知正实数 a, b 满足 $a + 2b = 1$,

$\therefore 1 = a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}$, 当且仅当 $a = 2b$ 时, 取等号,

解得 $ab \leq \frac{1}{8}$, 即 $ab \in \left(0, \frac{1}{8}\right]$,

由 $(a + 2b)^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab = 1$,

则 $a^2 + 4b^2 + \frac{1}{4ab} = 1 - 4ab + \frac{1}{4ab}$,

令 $t = ab, t \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$,

设 $f(t) = 1 - 4t + \frac{1}{4t}$ ($t \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$, $-4t$ 减函数 $\frac{1}{4t}$ 减函数),

故 $f(t) = 1 - 4t + \frac{1}{4t}$ 在 $\left(0, \frac{1}{8}\right]$ 上是减函数,

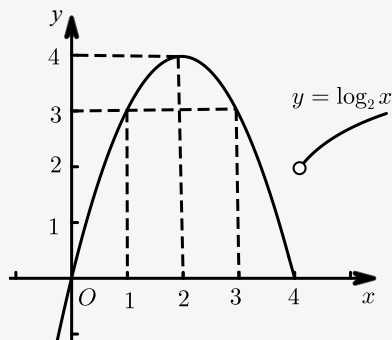
当 $t = \frac{1}{8}$ 时, $f(t)_{\min} = 1 - 4 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4 \times \frac{1}{8}} = \frac{5}{2}$.

【标注】 【知识点】 利用单调性求函数最值

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 4 \\ \log_2 x, & x > 4 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $(a, a+1)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 _____; 若函数 $g(x) = f[f(x)] - m$ 恰有5个零点, 则 m 的取值范围为 _____.

【答案】 $a \leq 1$ 或 $a \geq 4$; $(0, 2]$

【解析】 作 $f(x)$ 的图象如下:



欲使 $f(x)$ 在 $(a, a+1)$ 上单调递增,

则有 $a+1 \leq 2$ 或 $a \geq 4$, 即 $a \leq 1$ 或 $a \geq 4$.

由题意知 , $g(x) = f[f(x)] - m$ 有 5 个零点 ,

令 $f(x) = t$, 则有 $f(t) = m$.

①若 $m < 0$, 则 $f(t) = m$ 有 1 个根 , 且 $t < 0$,

同理 , $f(x) = t$ 有 1 个根 , 不合题意 .

②若 $0 \leq m \leq 2$, 则 $f(t) = m$ 有 2 个根 , 且 $0 \leq t \leq 2 - \sqrt{2}$ 或 $2 + \sqrt{2} \leq t \leq 4$,

当 $t \in [0, 2 - \sqrt{2}]$ 时 , $f(x) = t$ 有 2 个根 ;

当 $t \in [2 + \sqrt{2}, 4]$ 时 , $f(x) = t$ 有 3 个根 ;

当 $t = 4$ 时 , $f(x) = t$ 有 2 个根 ,

故 $t = 4$ 不满足 , 即 $m = 0$ 不满足 , $m \in (0, 2]$.

③若 $2 < m < 4$, 则 $f(t) = m$ 有 3 个根 , 且 $2 - \sqrt{2} < t < 2$ 或 $2 < t < 2 + \sqrt{2}$ 或 $4 < t < 16$,

当 $t \in (2 - \sqrt{2}, 2)$ 时 , $f(x) = t$ 有 2 个根 ,

当 $t \in (2, 2 + \sqrt{2})$ 时 , $f(x) = t$ 有 3 个根 ,

当 $t \in (4, 16)$ 时 , $f(x) = t$ 有 1 个根 ,

则共有 6 个根 , 不合题意 .

④当 $m = 4$ 时 , $f(t) = m$ 有 2 个根 , 且 $t = 2$ 或 16 ,

当 $t = 2$ 时 , $f(x) = t$ 有 2 个根 ,

当 $t = 16$ 时 , $f(x) = t$ 有 1 个根 , 不合题意 .

⑤若 $m > 4$, $f(t) = m$ 有 1 个根 , 且 $t > 16$,

当 $t > 16$ 时 , $f(x) = t$ 有 1 个根 , 不合题意 .

综上所述 , $m \in (0, 2]$.

【标注】 【知识点】 已知零点情况求参数的取值范围 ; 函数综合