

选填练习十

1. 已知集合 $A = \{x|x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z}|0 \leq x \leq 4\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = (\quad)$.
A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0\}$

【答案】 C

【解析】 $\because A = \{x|x > 1\}$,

$\therefore \complement_{\mathbf{R}}A = \{x|x \leq 1\}$,

$\because B = \{x \in \mathbf{Z}|0 \leq x \leq 4\}$,

$\therefore (\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = \{0, 1\}$,

故选C.

【标注】 【知识点】 交、并、补集混合运算

2. 命题 “ $\forall x \in (-\infty, 0)$, $2^x \geq 3^x$ ” 的否定是 () .
A. $\exists x \in (-\infty, 0)$, $2^x \leq 3^x$ B. $\exists x \in (-\infty, 0)$, $2^x < 3^x$
C. $\forall x \in (-\infty, 0)$, $2^x \leq 3^x$ D. $\forall x \in (-\infty, 0)$, $2^x < 3^x$

【答案】 B

【解析】 $\because P: \forall x \in (-\infty, 0)$, $2^x \geq 3^x$,

$\therefore \neg P: \exists x \in (-\infty, 0)$, $2^x < 3^x$.

故选B.

【标注】 【知识点】 全称量词命题与存在量词命题的否定

3. 若复数 $\frac{a+i}{1-2i}$ (i 是虚数单位) 是纯虚数, 则实数 a 的值为 () .
A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

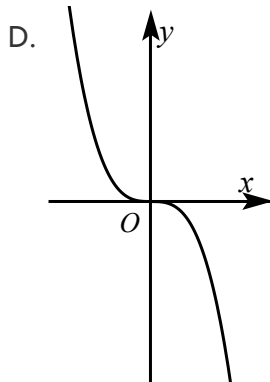
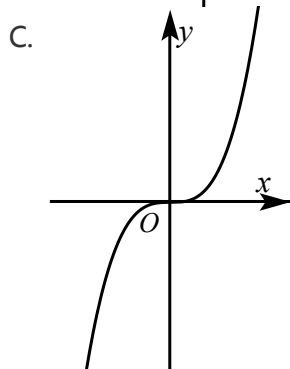
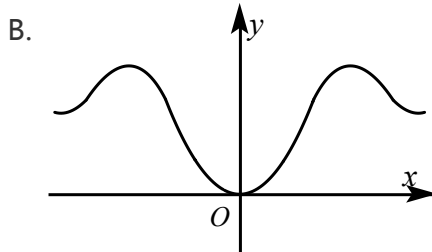
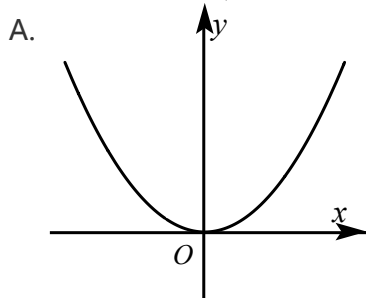
【答案】 D

【解析】 依题意, $\frac{a+i}{1-2i}$
 $= \frac{(a+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{a-2+(2a+1)i}{5}$ 为纯虚数,
故 $\begin{cases} a-2=0 \\ 2a+1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $a = -2$.

故选：D .

【标注】 【知识点】 实数、虚数、纯虚数；复数的乘法和除法

4. 函数 $f(x) = \frac{x(2^x + 2^{-x})}{2 + \cos x}$ 的部分图象大致为 () .



【答案】 C

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \frac{x(2^x + 2^{-x})}{2 + \cos x}$,

由 $-1 \leq \cos x \leq 1$, 则 $2 + \cos x > 0$,

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x(2^{-x} + 2^x)}{2 + \cos(-x)} \\ &= -\frac{x(2^x + 2^{-x})}{2 + \cos x} \end{aligned}$$

$$= -f(x) ,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 , 则函数图象关于原点对称 ,

故 A、B 错误 ,

当 $x = \pi$ 时 , $f(\pi) = \frac{\pi(2^\pi + 2^{-\pi})}{2 + \cos \pi} > 0$,

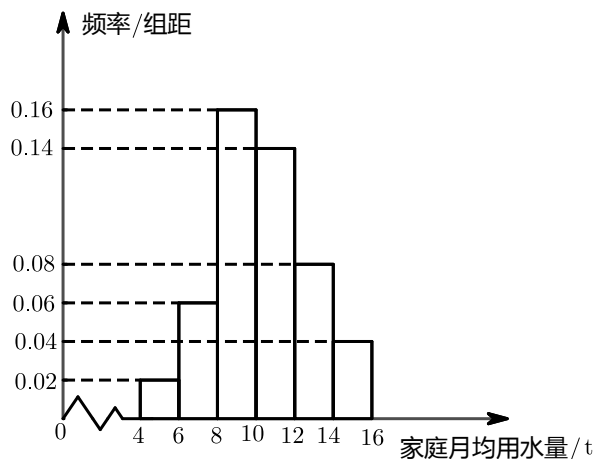
则点 $[\pi, f(\pi)]$ 在第一象限 ,

故 C 正确 , D 错误 .

【标注】 【素养】 直观想象；逻辑推理

【知识点】 函数图象的识别问题

5. 某小区为了解居民用水情况，通过随机抽样得到部分家庭月均用水量（单位：t），将所得数据分为6组：[4, 6)，[6, 8)，[8, 10)，[10, 12)，[12, 14)，[14, 16]，并整理得到如下频率分布直方图，若以频率替代概率，从该小区随机抽取5个家庭，则月均用水量在区间[8, 12)内的家庭个数 X 的数学期望为（ ）。



- A. 3.6 B. 3 C. 1.6 D. 1.5

【答案】 B

【解析】 方法一：由题中频率分布直方图知一个家庭月均用水量在8 ~ 12吨的概率为

$$(0.16 + 0.14) \times 2 = 0.6,$$

所以 $X \sim B(5, 0.6)$,

$$\text{所以 } E(X) = 5 \times 0.6 = 3,$$

故选B.

方法二：由题中频率分布直方图知一个家庭月均用水量在8 ~ 12吨的概率为

$(0.16 + 0.14) \times 2 = 0.6$ ，可得 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{32}{3125}$	$\frac{48}{625}$	$\frac{144}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{162}{625}$	$\frac{243}{3125}$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{32}{3125} + 1 \times \frac{48}{625} + 2 \times \frac{144}{625} + 3 \times \frac{216}{625} + 4 \times \frac{162}{625} + 5 \times \frac{243}{3125} = 3,$$

故选B.

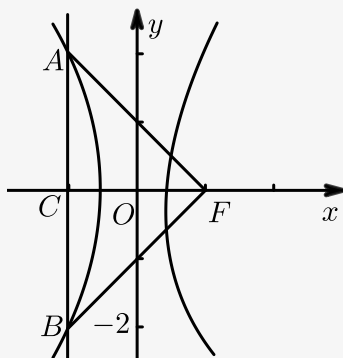
【标注】 【知识点】离散型随机变量的数学期望

6. 已知抛物线 $y^2 = 4\sqrt{2}x$ 的准线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 相交于A、B两点，F为抛物线的焦点，若 $\triangle FAB$ 为直角三角形，则实数 $a =$ （ ）。
- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

【答案】D

【解析】如图，



$\therefore$ 抛物线的准线为 $x = -\sqrt{2}$,

双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$,

将 $x = -\sqrt{2}$ 代入双曲线方程中 ,

得 : $y = \pm \frac{\sqrt{2-a^2}}{|a|}$,

设 $A\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2-a^2}}{|a|}\right)$,

$\therefore \triangle FAB$ 为等腰直角三角形 ,

$|FC| = 2\sqrt{2}$,

$\angle CAF = \angle AFC = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore AC = CF = 2\sqrt{2}$,

$\therefore \frac{\sqrt{2-a^2}}{|a|} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore |a| = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

故选D .

【标注】 【知识点】 直线和双曲线的位置关系；焦点三角形问题

7. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，且满足 $f(-x) = -f(x)$ ，若 $a = -f\left(\log_3 \frac{1}{10}\right)$ ， $b = f(\log_3 9.1)$ ， $c = f(2^{0.8})$ ，则 a, b, c 的大小关系为 () .
- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $c > a > b$

【答案】B

【解析】 $\because f(x)$ 是奇函数，

$$\therefore a = -f\left(\log_3 \frac{1}{10}\right) = f\left(-\log_3 \frac{1}{10}\right) = f(\log_3 10),$$

$$\because \log_3 10 > \log_3 9.1 > \log_3 9 = 2 > 2^{0.8},$$

又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

$$\therefore f(\log_3 10) < f(\log_3 9.1) < f(2^{0.8}),$$

即 $c > b > a$ 。

故选B。

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小；函数单调性与奇偶性综合问题

8. 将函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把所有点的横坐标伸长到原来的2倍

(纵坐标保持不变)得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是()。

A. $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

C. $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减

D. $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增

【答案】 D

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

将其图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把所有点的横坐标伸长为原来的2倍，

$$\text{得到 } g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{A: } \because g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi,$$

A错误，

$$\text{B: } \because g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 图象关于 } x = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 对称},$$

B错误，

$$\text{C: } \because \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$$

C错误,

$$D: \because -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$$

D正确.

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数判定结论正误

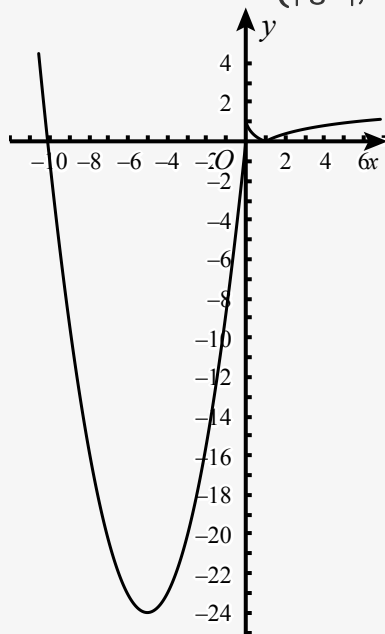
9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - a (a \in \mathbf{R})$ 有四个零点

$x_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 其中 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4)$ 的取值范围是 ().

- A. $(0, 99]$ B. $(0, 100]$ C. $(0, 101]$ D. $(0, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$ 的图象如图:



关于 x 的方程 $f(x) = a (a \in \mathbf{R})$ 有四个实数解,

可得 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 有四个交点,

可以判断 $0 < a \leq 1$,

$$x_1 + x_2 = 2 \times (-5) = -10,$$

$$|\lg x_3| = |\lg x_4| \leq 1.$$

且 $\frac{1}{10} \leq x_3 < 1, 1 < x_4 \leq 10$, 可得 $-\lg x_3 = \lg x_4$,

即 $\lg x_3 + \lg x_4 = 0$, 即有 $x_3 x_4 = 1$,

$$x_4 = \frac{1}{x_3}, \text{ 故 } (x_1 + x_2)(x_3 - x_4) = -10\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right),$$

又由函数 $y = x - \frac{1}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{10}, 1\right)$ 上递增,

可得函数 $y = x - \frac{1}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{10}, 1\right)$ 上的值域为 $[-9.9, 0)$,

可知 $-10\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right)$ 的取值范围为 $(0, 99]$.

故选: A.

【标注】 【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题 (图象与零点综合)

10. 二项式 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中含 x 项的系数为 _____.

【答案】 40

【解析】 $T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r$

$$= C_5^r \cdot 2^{5-r} \cdot x^{5-r} \cdot x^{-\frac{r}{3}}$$

$$= C_5^r \cdot 2^{5-r} \cdot x^{5-\frac{4}{3}r},$$

$$\text{令 } 5 - \frac{4}{3}r = 1,$$

$$\therefore r = 3,$$

$$\therefore x \text{ 的系数为 } C_5^3 \cdot 2^2 = 40.$$

【标注】 【知识点】求项的系数或二项式系数

11. 已知直线 $l: kx - y + 1 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2\sqrt{2}$, 则 k 的值为 _____.

【答案】 1

【解析】
$$\begin{cases} kx - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore x^2 + k^2x^2 + 2kx + 1 + 2x - 4kx - 4 + 1 = 0,$$

$$\therefore (1 + k^2)x^2 + (2 - 2k)x - 2 = 0,$$

设方程两根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2k - 2}{1 + k^2} \\ x_1x_2 = \frac{-2}{1 + k^2} \end{cases},$$

$$\therefore |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\
&= \sqrt{\frac{4k^2 - 8k + 4}{(1 + k^2)^2} + \frac{8}{1 + k^2}} \\
&= \sqrt{\frac{4k^2 - 8k + 4 + 8 + 8k^2}{1 + k^2}} \\
&= 2 \cdot \sqrt{\frac{3k^2 - 2k + 3}{1 + k^2}}, \\
\therefore |AB| &= \sqrt{1 + k^2} \cdot |x_1 - x_2| \\
&= 2 \cdot \sqrt{\frac{3k^2 - 2k + 3}{1 + k^2}} \\
&= 2\sqrt{2}, \\
\therefore 3k^2 - 2k + 3 &= 2 + 2k^2, \\
\therefore k^2 - 2k + 1 &= 0, \\
\therefore (k - 1)^2 &= 0, \\
\therefore k &= 1.
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】圆的弦长的相关问题

12. 甲乙两人独立地破译一份密码，已知各人能破译的概率分别为 $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ，则两人都成功破译的概率为 _____，密码被破译的概率为 _____。

【答案】 $\frac{1}{12}$ ； $\frac{1}{2}$

【解析】 记 A 为“甲译出密码”， B 为“乙译出密码”， C 为“密码被成功破译”，

$$\text{则 } P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4},$$

$$\therefore P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$P(C) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

【标注】 【知识点】对立事件的概率和为1；相互独立事件的概率乘法公式

13. 一个四棱锥的所有棱长都相等，其表面积为 $16 + 16\sqrt{3}$ ，则该四棱锥的棱长为 _____，体积为 _____。

【答案】 $2\sqrt{2}$ ； $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

【解析】 设四棱锥的棱长为 a ，由题意得 $a^2 + 4 \times \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = 16 + 16\sqrt{3}$ ，

解得 $a = 4$ 或 -4 （舍），

所以该四棱锥的高为 $\sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$ ，

所以该四棱锥的体积 $V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{3}$ 。

【标注】 【知识点】 空间几何体的体积

14. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 2$ ， $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$ ，点 M 满足 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ ，则
 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的值为 _____。

【答案】 $-\frac{8}{9}$

【解析】 $\because \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{CA}|^2 - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 2，$$

$$\because AB = AC = 2，$$

$$\therefore 2^2 - 2 \times 2 \cos A = 2 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}，$$

$\therefore \triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，

$$\therefore \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}，$$

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \end{cases}，$$

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \end{cases}，$$

$$\therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}|\overrightarrow{CA}|^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - \frac{2}{9}|\overrightarrow{CB}|^2$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right) \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 2 - \frac{2}{9} \times 2^2$$

$$= -1 + 1 - \frac{8}{9}$$

$$= -\frac{8}{9}，$$

故答案为： $-\frac{8}{9}$ 。

【标注】 【知识点】 线性运算和数量积综合问题

15. 已知实数 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1}$ 的最小值为 ____ .

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】 解：由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 可得 $\frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a} > 0$, 则 $a-1 > 0$,
则 $b = \frac{a}{a-1}$, 则 $b-1 = \frac{a}{a-1} - 1 = \frac{1}{a-1}$,
 $\therefore \frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1} = \frac{3}{a-1} + 2(a-1) \geq 2\sqrt{\frac{3}{a-1} \cdot 2(a-1)} = 2\sqrt{6}$,
当且仅当 $\frac{3}{a-1} = 2(a-1)$, 即 $a = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时取等号,
故 $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{b-1}$ 的最小值为 $2\sqrt{6}$,
故答案为： $2\sqrt{6}$.

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值