

选填练习六

1. 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{1, 3, 4\}$, $N = \{2, 3, 4\}$, 则集合 $(\complement_U M) \cup (\complement_U N) = (\quad)$.
- A. $\{5, 6\}$ B. $\{1, 5, 6\}$ C. $\{2, 5, 6\}$ D. $\{1, 2, 5, 6\}$

【答案】 D

【解析】 因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{1, 3, 4\}$, $N = \{2, 3, 4\}$,

所以 $\complement_U M = \{2, 5, 6\}$, $\complement_U N = \{1, 5, 6\}$,

所以 $(\complement_U M) \cup (\complement_U N) = \{1, 2, 5, 6\}$.

故选D.

【标注】 【知识点】 交、并、补集混合运算

2. 已知 $\varphi \in \mathbf{R}$, 则“ $\varphi = 0$ ”是“ $y = \sin(x + \varphi)$ 为奇函数”的 ().
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $\because$ 若 $\varphi = 0$ 时, 则 $f(x) = \sin x (x \in \mathbf{R})$ 是奇函数, 为真命题;

$\because \varphi = \pi$ 时, $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 为奇函数,

$\therefore f(x) = \sin(x + \varphi)$ 为奇函数, 则 $\varphi = 0$, 为假命题;

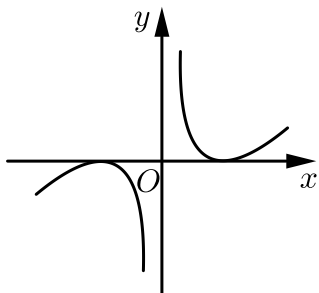
是充分不必要条件,

所以A选项是正确的.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质

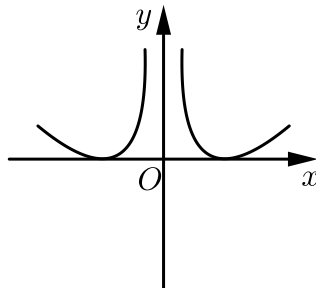
3. 已知函数 $f(x) = \frac{|x|-1}{x} \ln|x|$, 其图象大致为 ().

A.

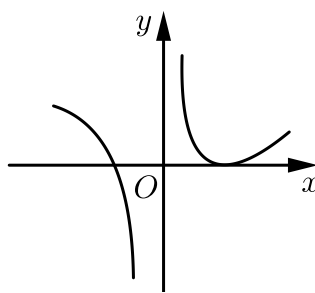
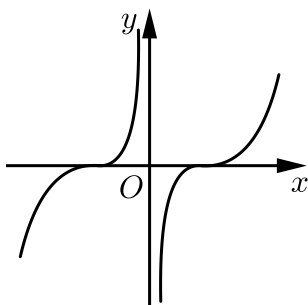


C.

B.



D.



【答案】A

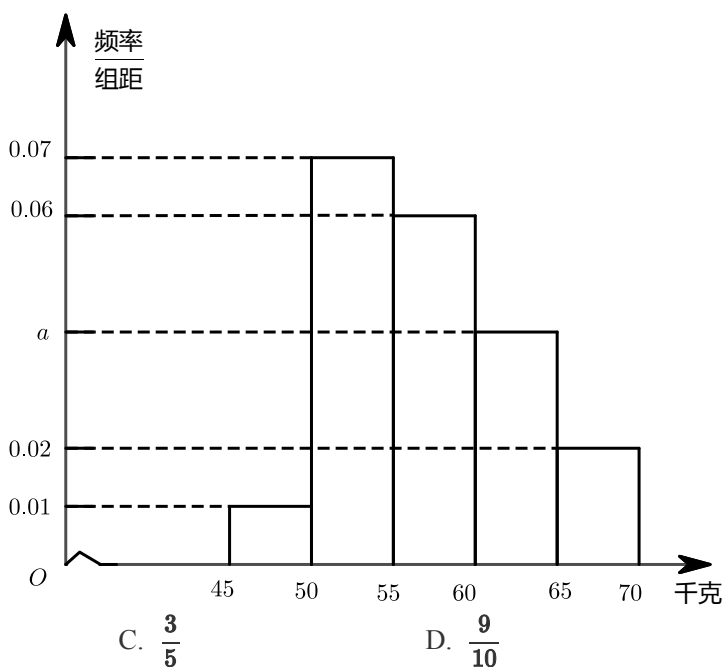
【解析】由题易知 $f(-x) = -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是奇函数，函数图象关于坐标原点对称，故排除选项B，D；

当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) > 0$ ，故排除选项C，

故选A．

【标注】 【知识点】函数图象的识别问题

4. 为了解学生的身体状况，某校随机抽取了一批学生测量体重．经统计，这批学生的体重数据（单位：千克）全部介于45至70之间．将数据分成5组，并得到如图所示的频率分布直方图．现采用分层抽样的方法，从 $[55, 60)$ ， $[60, 65)$ ， $[65, 70]$ 这三个区间中随机抽取6名学生，再从这6名学生中随机抽取3人，则这三人中恰有两人位于区间 $[55, 60)$ 的概率是（ ）．



A. $\frac{8}{15}$

B. $\frac{9}{20}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{9}{10}$

【答案】B

【解析】∵频率分布直方图中所有矩形面积为1，

$$\therefore 5 \times (0.01 + 0.02 + a + 0.06 + 0.07) = 1 .$$

解得 $a = 0.04$,

由频率分布直方图可知, $[55, 60)$, $[60, 65)$, $[65, 70]$ 三个区间中的学生人数的比为 $3 : 2 : 1$,

则从 $[55, 60)$, $[60, 65)$, $[65, 70]$ 三个区间抽取的学生人数分别为 $3, 2, 1$,

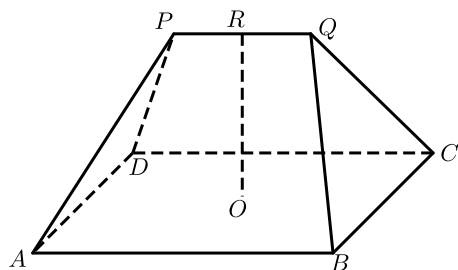
设事件 A 为从这 6 名学生中随机抽取 3 人, 这三人中恰有两人重量位于区间 $[55, 60)$,

$$\text{故 } P(A) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{3 \times 3}{20} = \frac{9}{20} .$$

故选 B .

【标注】 【知识点】 频率分布直方图；古典概型的概率计算（涉及计数原理）

5. 如图所示的屋脊状楔体 $PQ - ABCD$, 下底面 $ABCD$ 是矩形, 假设屋脊没有歪斜, 即 PQ 的中点 R 在底面 $ABCD$ 上的投影为矩形 $ABCD$ 的中心点 O , $PQ \parallel AB$, $AB = 4$, $AD = 3$, $PQ = 2$, $OR = 1$ (长度单位: 丈) 则楔体 $PQ - ABCD$ 的体积为 () (体积单位: 立方丈) .



A. $6\sqrt{2}$

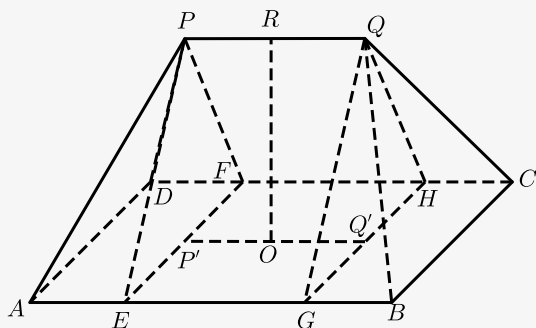
B. $3\sqrt{2}$

C. 8

D. 5

【答案】 D

【解析】 如图,



过点 O 作 $P'Q' \parallel PQ$, 且 $P'Q' = PQ$, 点 O 为 $P'Q'$ 的中点,

再过点 P' 作 $EF \parallel AD$ 交 AB 于点 E 、交 CD 于点 F , 过点 Q' 作 $GH \parallel BC$, 交 AB 于点 G 、交 CD 于点 H ,

$$\text{所以 } AE = BG = \frac{AB - PQ}{2} = 1 ,$$

$$\text{所以 } S_{AEFD} = S_{BCHG} = 1 \times 3 = 3 ,$$

$$S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2} ,$$

所以 $V_{P-AEFD} = V_{Q-BCHG} = \frac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1$,

$V_{PEF-QGH} = \frac{3}{2} \times 2 = 3$,

所以 $V_{PQ-ABCD} = V_{P-AEFD} + V_{PEF-QGH} + V_{Q-BCHG} = 1 + 3 + 1 = 5$.

故选D.

【标注】 【知识点】 空间几何体的体积

6. 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 满足 $2f(2) = f(16)$, 若 $a = f(\log_4 2)$, $b = f(\ln 2)$, $c = f(5^{-\frac{1}{2}})$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a > c > b$

B. $a > b > c$

C. $b > a > c$

D. $b > c > a$

【答案】 C

【解析】 由 $2f(2) = f(16)$ 可知 $2 \cdot 2^a = 2^{4a}$,

$\therefore 1 + a = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ 即 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$,

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又 $\therefore \log_4 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 4} = \frac{1}{2}$,

$\ln 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 e} = \frac{1}{\log_2 e}$,

$5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\therefore 1 < \log_2 e < 2 < \sqrt{5}$,

$\therefore \ln 2 > \log_4 2 > 5^{-\frac{1}{2}}$,

$\therefore b > a > c$.

故选C.

【标注】 【知识点】 幂函数的图象及性质

7. 已知第一象限内的点 M 既在双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上, 又在抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, 设 C_1 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若 C_2 的焦点为 F_2 , 且 $\triangle MF_1F_2$ 是以 MF_1 为底边的等腰三角形, 则双曲线的离心率为 ().

A. $1 + \sqrt{2}$

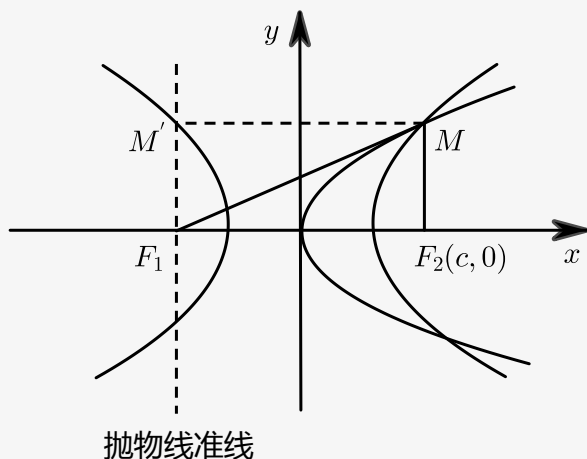
B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $2 + \sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】



因为 $y^2 = 2px$, $c = \frac{p}{2}$,

所以 $y^2 = 2cx$,

又因为 $MM' = F_1F_2$,

所以 $M(c, 2c)$,

代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中 ,

可得 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{4c^2}{b^2} = 1$ ① ,

又因为 $\frac{b^2}{a} = 2c$, 所以 $b^2 = 2ac$,

代入①中可得 $e^2 - 2e - 1 = 0$,

解得 $e = 1 + \sqrt{2}$,

$e = 1 - \sqrt{2}$ (舍去) .

【标注】 【知识点】求双曲线的离心率

8. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$, 则下列说法正确的是 () .

① $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有 2 个零点

② $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心

③ $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增

④ 要得到 $g(x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{4})$ 的图象 , 可以将 $y = f(x)$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度 , 再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

A. ①②③

B. ②③

C. ①②

D. ①④

【答案】 C

【解析】 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$,

由 $f(x) = 0$ 得 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$,

$K=0$ 时, $x = \frac{\pi}{12}$, $k=1$, 则 $x = \frac{7\pi}{12}$,

$\therefore \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$ 为 $(0, \pi)$ 上 2 个零点, 故①正确;

且 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心, 故②正确;

$x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$, 可知 $f(x)$ 在此区间上不单调, 故③错误;

$f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 $y = 2\sin 2x$, 再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 得到

$y = 2\sin 4x \neq g(x)$, 故④错误;

综上, 选 C①②.

故选 C.

【标注】 【知识点】已知正弦型函数判定结论正误

9. 对于函数 $f(x)$, $g(x)$, 设 $x_1 \in \{x|f(x)=0\}$, $x_2 \in \{x|g(x)=0\}$, 若存在 x_1, x_2 使得 $|x_1 - x_2| \leq 2$, 则称 $f(x), g(x)$ 互为“零点相邻函数”. 若 $f(x) = e^{x-2} + x - 3$ 与 $g(x) = x^2 - ax - a - 2$ 互为“零点相邻函数”, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-2, \frac{14}{5})$

B. $[-2, \frac{14}{5}]$

C. $(-\infty, 2) \cup (\frac{14}{5}, +\infty)$

D. $(-\infty, 2] \cup [\frac{14}{5}, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 $f(2) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

所以 $f(x)$ 只有唯一零点 2,

$f(x), g(x)$ 是“零点相邻函数”, $g(x)$ 在 $[0, 4]$ 至少有一零点,

由 $g(x) = x^2 - ax - a - 2 = 0$, 所以 $a = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$, $x \in [0, 4]$,

设 $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$, $x \in [0, 4]$, $y = a$, $h(x)$ 与 $y = a$ 在 $[0, 4]$ 有交点,

$$h(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2 - 2(x + 1) - 1}{x + 1} = x - \frac{1}{x + 1} - 1, x \in [0, 4],$$

一次函数和反比例函数的单调性可知 $h(x)$, $x \in [1, 4]$ 为增函数,

所以 $h(x) \in [-2, \frac{14}{5}]$, 要使 $h(x)$ 与 $y = a$ 在 $[0, 4]$ 有交点,

需 $-2 \leq a \leq \frac{14}{5}$, 即为 a 的取值范围.

故选 B.

【标注】 【知识点】函数的新定义问题; 已知零点情况求参数的取值范围

10. 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 且满足 $(1 + i)z = \frac{4 - 2i}{1 - i}$, 则 $\frac{b}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】 $z = \frac{4-2i}{(1-i)(1+i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i,$

又 $\because z = a+bi,$

$\therefore a=2, b=-1,$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$

【标注】 【知识点】复数的乘法和除法

11. 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, x^{-2} 的系数为 _____.

【答案】 -160

【解析】 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r (\sqrt[3]{x})^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r \cdot C_6^r x^{2-\frac{4r}{3}},$

令 $2 - \frac{4r}{3} = -2$, 得 $r=3,$

所以 x^{-2} 的系数为 $(-2)^3 C_6^3 = -160.$

故答案为: -160.

【标注】 【知识点】求项的系数或二项式系数

12. 已知直线 $l: kx+b(k>0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 且被圆 $(x-4)^2+y^2=4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则 $k =$ _____; $b =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】 由 $x^2+y^2=1$ 可得圆心 $C_1(0,0)$, $r_1=1,$

由题意可得: $\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ ①,

由 $(x-4)^2+y^2=4$ 可得圆心 $C_2(4,0)$, $r_2=2,$

因为直线 $l: y=kx+b(k>0)$ 被圆 $(x-4)^2+y^2=4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3},$

所以圆心 $C_2(4,0)$ 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1,$

所以 $\frac{|4k+b|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ ②,

由①②可得 $|b| = |4k+b|,$

当 $b=k+b$ 时, $k=0$ 不满足 $k>0,$

当 $b=-4k-b$ 时, 可得: $b=-2k$ 代入 $\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ 整理得 $4^2 = k+1,$

解得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍),

所以 $b = -\frac{2\sqrt{3}}{3},$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

【标注】 【知识点】 已知直线和圆的位置关系求参数

13. 某市有 A, B, C, D 四个景点, 一位游客来该市游览, 已知该游客游览 A 的概率为 $\frac{2}{3}$ 游览 B, C, D 的概率都是 $\frac{1}{2}$, 且该游客是否游览这四个景点相互独立, 则该游客至多游览一个景点的概率为 _____; 用随机变量 X 表示该游客游览的景点个数, 则随机变量 X 的数学期望 $E(X) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}; \frac{13}{6}$

【解析】 1: 记“该游客游览 i 个景点”为事件 $A_i, i = 0, 1,$

$$\text{则 } P(A_0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24},$$

$$P(A_1) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) C_3^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{24},$$

所以该游客至多游览一座山的概率为

$$P(A_0) + P(A_1) = \frac{1}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{4}.$$

2: 随机变量 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4,$

$$P(X=0) = P(A_0) = \frac{1}{24},$$

$$P(X=1) = P(A_1) = \frac{5}{24},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times C_3^1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},$$

$$P(X=3) = \frac{2}{3} \times C_3^2 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times C_3^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{24},$$

$$P(X=4) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12},$$

所以 X 的概率分布为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{5}{24} + 2 \times \frac{9}{24} + 3 \times \frac{7}{24} + 4 \times \frac{2}{24} = \frac{13}{6}.$$

故 X 的数学期望为 $\frac{13}{6}$.

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望; 相互独立事件的概率乘法公式

14. 已知实数 x, y 满足 $xy = 4x + y (x > 0, y > 0)$, 则 $\frac{4x + y + 4}{\sqrt{xy}}$ 的最小值是 _____.

【答案】 4

【解析】 $\because xy = 4x + y,$

$$\therefore 4x + y = \sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy},$$

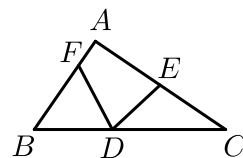
$$\therefore \frac{4x + y + 4}{\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{xy})^2 + 4}{\sqrt{xy}} = \sqrt{xy} + \frac{4}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4} = 4,$$

当且仅当 $\sqrt{xy} = \frac{4}{\sqrt{xy}}$ 时等号成立

$\therefore$ 最小值 = 4 .

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别为边 BC, CA, AB 上的点, 且 $CD = \frac{3}{5}BC$, $EC = \frac{1}{2}AC$, $AF = \frac{1}{3}AB$, 设 P 为四边形 $AEDF$ 内一点 (P 点不在边界上), 若 $\overrightarrow{DP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \lambda\overrightarrow{DE}$, 则实数 λ 的取值范围为 _____ .



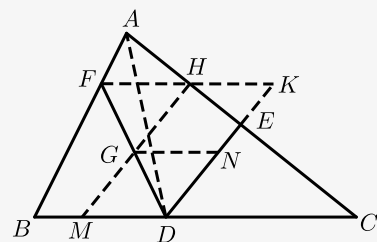
【答案】 $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$

【解析】 取 BD 的中点 M , 过 M 作 $MH \parallel DE$ 分别交 DF, AC 于点 G, H ,

连接 FH , 延长 FH , 交 DE 的延长线于点 K , 可得 $FK \parallel BC$,

过 G 作 $GN \parallel BC$, 交 DE 于点 N ,

如图,



则由 $\overrightarrow{DP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \lambda\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DM} + \lambda\overrightarrow{DE}$ 可知,

P 点在线段 GH 上运动 (不包括端点) 连接 AD ,

当 P 与 G 重合时, 根据 $\overrightarrow{DP} = t\overrightarrow{DF} = t(\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BD})$

$$= t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)$$

$$= \frac{2}{3}t(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) - \frac{2}{3}t\overrightarrow{DC}$$

$$= \frac{2}{3}t\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DE}\right) - \frac{2}{3}t\overrightarrow{DC}$$

$$= -\frac{8}{9}t\overrightarrow{DC} + \frac{4}{3}t\overrightarrow{DE}$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \lambda\overrightarrow{DE},$$

可知 $\lambda = \frac{1}{2}$,

当 P 与 H 重合时, 由 P, C, E 三点共线可知 $1 - \frac{1}{3} + \lambda = 1$,

即 $\lambda = \frac{4}{3}$,

结合图形可知 $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

【标注】 【知识点】 向量系数求值问题