

选填练习八

1. 已知集合 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B = (\quad)$.
- A. $\emptyset$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{0\}$ D. $\{1\}$

【答案】C

【解析】 $\because$ 集合 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$,
 $\therefore \complement_U A = \{-1, 0\}$,
则 $(\complement_U A) \cap B = \{0\}$.
故选C.

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算

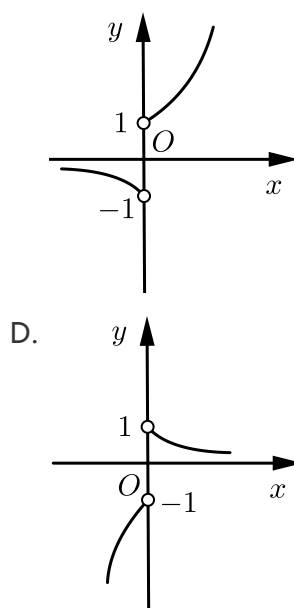
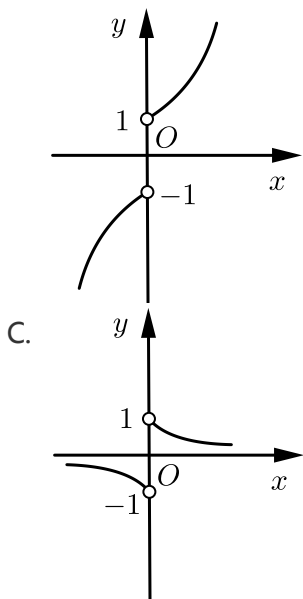
2. “ $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$ ” 是 “ $|2x-1| \geq 3$ ” 的 ().
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】 $\because \frac{x-2}{x+1} \geq 0$,
 $\therefore \begin{cases} (x-2)(x+1) \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$,
 $\therefore x \geq 2$ 或 $x < -1$,
 $\therefore |2x-1| \geq 3$,
 $\therefore 2x-1 \geq 3$ 或 $2x-1 \leq -3$,
 $\therefore x \geq 2$ 或 $x \leq -1$,
 $\therefore \{x|x \geq 2 \text{ 或 } x < -1\} \subsetneq \{x|x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -1\}$,
 $\therefore \frac{x-2}{x+1} \geq 0$ 是 $|2x-1| \geq 3$ 的充分不必要条件.
故选A.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

3. 函数 $f(x) = \frac{x}{|x| \cdot 3^x}$ 的图象大致为 ().
- A. B.



【答案】D

【解析】根据题意， $f(x) = \frac{x}{|x| \cdot 3^x}$ ，

则 $f(1) = \frac{1}{3}$ ，排除AB，

又由 $f(-1) = -3$ ，排除C，

故选D。

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

4. 已知 $a = 2021^{0.2}$ ， $b = 0.2^{2021}$ ， $c = \log_{2021} 0.2$ ，则（ ）。

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $c > b > a$

D. $a > c > b$

【答案】A

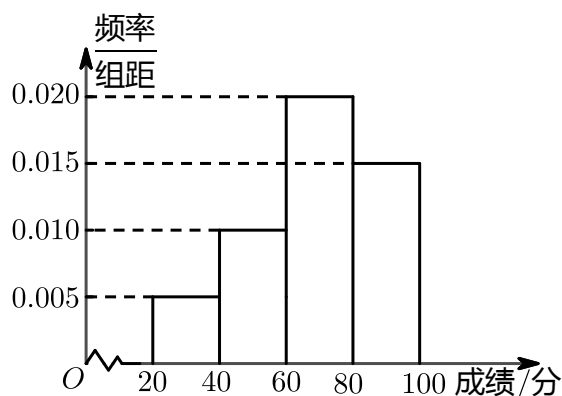
【解析】 $\because 2021^{0.2} > 2021^0 = 1$ ， $0 < 0.2^{2021} < 0.2^0 = 1$ ， $\log_{2021} 0.2 < \log_{2021} 1 = 0$

$\therefore a > b > c$ 。

故选A。

【标注】【知识点】指对幂比较大小

5. 某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如图，数据的分组依次为 $[20, 40)$ ， $[40, 60)$ ， $[60, 80)$ ， $[80, 100]$ 。若高于60分的人数是35人，则该班的学生人数是（ ）。



A. 45

B. 50

C. 55

D. 60

【答案】 B

【解析】 由频率分布直方图得高于60分的频率为：

$$(0.020 + 0.015) \times 20 = 0.7,$$

高于60分的人数是35人，

$$\therefore \text{该班的学生人数是：} \frac{35}{0.7} = 50.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 频数与频率

6. 已知三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心 O 在线段 SA 上，若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle SBC$ 均为面积是 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形，则三棱锥 $S-ABC$ 外接球的体积为（ ）.

A. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

B. $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

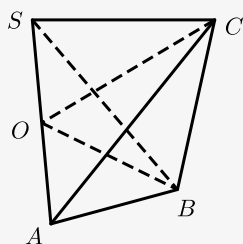
C. $\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}$

D. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$

【答案】 D

【解析】 如图，依题意， O 为三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心，

则 $OA = OS = OB = OC$.



$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle SBC$ 均为正三角形，且有公共边 BC ，

$\therefore AC = SC$ ，

$\therefore \triangle ACS$ 为等腰三角形，

$\therefore OC \perp AS$.

又 $OC = OA = OS$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ACS$ 为等腰直角三角形,

设 $\triangle ABC$ 边长为 a , 则其面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

故 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 4\sqrt{3}$, 解得 $a = 4$,

$\therefore AC = 4, AS = 4\sqrt{2}$,

$\therefore OA = \frac{1}{2}AS = 2\sqrt{2}$,

即外接球半径为 $2\sqrt{2}$,

体积为 $V = \frac{4\pi}{3} \times (2\sqrt{2})^3 = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

故选 D.

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题

7. 已知函数 $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 给出下列结论:

① $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;

② 点 $\left(\frac{2}{3}\pi, 0\right)$ 是曲线 $f(x)$ 的对称中心;

③ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增;

④ 把函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到 $f(x)$ 图象.

其中正确的结论个数有 ().

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 B

【解析】 函数 $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,

对于①, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故①错误;

对于②, 当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, 故点 $\left(\frac{2}{3}\pi, 0\right)$ 是曲线 $f(x)$ 的对称中心, 故②正确;

③ 由于 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 故 $x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

上不单调, 函数的单调性应该是先增后减, 故③错误;

④ 把函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 图的图象, 故④正确.

故选 B.

【标注】 【知识点】 已知余弦型函数判定结论正误

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点的距离为4, 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2, -1)$, 则双曲线的方程为 () .

A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点 $(-a, 0)$ 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$ 的距离为4,

$$\therefore \frac{p}{2} + a = 4,$$

又双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2, -1)$,

$\therefore$ 渐近线的方程应是 $y = \frac{a}{b}x$, 而抛物线的准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

$$\text{因此 } -1 = \frac{b}{a} \times (-2), \quad -2 = -\frac{p}{2},$$

$$\text{联立得 } \begin{cases} \frac{p}{2} + a = 4 \\ a = 2b \\ p = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 2, b = 1, p = 4.$$

故双曲线的标准方程为: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

故选C.

【标注】 【知识点】 双曲线的渐近线

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - tx + \frac{t}{2}, & x \geq 0 \\ -e^{-x}(x+1), & x < 0 \end{cases}$, (e 为自然对数的底数), 若 $f(x) + f(-x) \geq 0$ 恒成立,

则实数 t 的取值范围是 () .

A. $[e, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[0, e]$ D. $[0, 2e]$

【答案】 D

【解析】 函数 $g(x) = f(x) + f(-x) \geq 0$,

由 $g(-x) = g(x)$,

可得 $g(x)$ 是偶函数,

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } g(x) = e^x - tx + \frac{1}{2}t - e^x(1-x) = xe^x - tx + \frac{1}{2}t \geq 0,$$

$$\text{即 } t\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq xe^x \text{ ①},$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, ①式恒成立, 此时 $t \in \mathbf{R}$,

当 $0 \leq x < \frac{1}{2}$ 时, 由①式可得 $t \geq \frac{2xe^x}{2x-1}$, 令 $h(x) = \frac{2xe^x}{2x-1}$,

可得 $h'(x) = \frac{4x^2 - 2xe^x - 2e^2}{(2x-1)^2} = \frac{2e^x}{(2x-1)^2} (2x^2 - x - 1) < 0$,

那么 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递减, $h(0) = 0$,

$\therefore t \geq 0$;

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, 由①式可得 $t \leq \frac{2xe^x}{2x-1}$, 同理解得 $h'(x) = \frac{2e^x}{(2x-1)^2} (2x^2 - x - 1)$,

令 $g(x) = 2x^2 - x - 1$,

那么 $g'(x) = 4x - 1$, 可得 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增,

$g(x) = g(\frac{1}{2}) = -1$, 当 $x = 1$ 时, $g(1) = 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增;

$\therefore t \leq h(1) = 2e$,

综合可得实数 t 的取值范围为 $[0, 2e]$.

故选 D.

【标注】 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

10. i 是虚数单位, 复数 $z = \sqrt{3} - i + \frac{2}{\sqrt{3} - i}$, 则 $\bar{z}$ 为 _____.

【答案】 $\frac{3\sqrt{3} + i}{2}$

【解析】 $\because z = \sqrt{3} - i + \frac{2}{\sqrt{3} - i} = \sqrt{3} - i + \frac{2(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)}$,

$= \sqrt{3} - i + \frac{2(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} - i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{3\sqrt{3} - i}{2}$

$\therefore \bar{z} = \frac{3\sqrt{3} + i}{2}$,

故答案为: $\frac{3\sqrt{3} + i}{2}$.

【标注】 【知识点】复数的四则运算综合

11. 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{x} - x^2\right)^6$ 的展开式中, 常数项为 _____.

【答案】 60

【解析】 $\left(\frac{\sqrt{2}}{x} - x^2\right)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_6^r \cdot (-1)^r \cdot (\sqrt{2})^{6-r} \cdot x^{3r-6}$,

令 $3r - 6 = 0$, 求得 $r = 2$,

可得展开式的常数项为 $C_6^2 \cdot (\sqrt{2})^4 = 60$,

故答案为: 60.

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项

12. 已知直线 $l: mx + y - 2m - 2 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 8y = 0$ 交于 A, B 两点, 若 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, 则直线 l 的方程为 _____.

【答案】 $x - y = 0$

【解析】直线 $l: mx + y - 2m - 2 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 8y = 0$ 交于 A, B 两点,

圆的圆心 $(0, 4)$, 圆的半径为: 4, 直线恒过 $P(2, 2)$,

$\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $|CP| = 2\sqrt{2}$, 所以 AB 的斜率为: 1, 所以 $m = -1$,

所以直线 l 的方程为: $y - 2 = x - 2$.

故答案为: $x - y = 0$.

【标注】【知识点】已知直线和圆的位置关系求直线的方程

13. 受新冠肺炎疫情的影响, 2020年一些企业改变了针对应届毕业生的校园招聘方式, 将线下招聘改为线上招聘. 某企业的线上招聘方式分为资料初审、笔试、面试这三个环节进行, 资料初审通过后才能进行笔试, 笔试合格后才能参加面试, 面试合格后便正式录取, 且这几个环节能否通过相互独立. 现有甲、乙两名大学生报名参加了该企业的线上招聘, 并均已通过了资料初审环节. 若甲、乙通过笔试的概率分别为 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$, 甲、乙通过面试的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$, 则甲被正式录取的概率为 _____; 若甲、乙被正式录取的人数之和为变量 ξ , 则 ξ 的数学期望 $E(\xi) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{5}; \frac{9}{20}$

【解析】设事件 A 表示甲被正式录取, 事件 B 表示乙被正式录取,

甲被正式录取的概率为: $P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$,

乙被正式录取的概率为: $P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$,

甲、乙被正式录取的人数之和为变量 ξ , 则 ξ 的可能取值为 0, 1, 2,

$P(\xi = 0) = P(\overline{AB}) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$,

$$P(\xi = 1) = P(\overline{AB} + A\overline{B}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{20},$$

$$P(\xi = 2) = P(AB) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20},$$

$$\therefore \xi \text{ 的数学期望 } E(\xi) = 0 \times \frac{3}{5} + 1 \times \frac{7}{20} + 2 \times \frac{1}{20} = \frac{9}{20}.$$

故答案为: $\frac{1}{5}, \frac{9}{20}$.

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望

14. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $ab + 2ac = 4$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{2}{b+2c} + \frac{8}{a+b+2c}$ 的最小值是 _____.

【答案】 4

【解析】 根据题意,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{a} + \frac{2}{b+2c} + \frac{8}{a+b+2c} \\ &= \frac{2(b+2c) + 2a}{2(b+2c) + 2a} + \frac{8}{a+b+2c} \\ &= \frac{a(b+2c)}{a(b+2c)} + \frac{8}{a+b+2c} \\ &= \frac{a+b+2c}{2} + \frac{8}{a+b+2c} \geq 2\sqrt{4} \\ &= 4, \end{aligned}$$

当且仅当 $a+b+2c = 4$ 时等号成立,

则 $\frac{2}{a} + \frac{2}{b+2c} + \frac{8}{a+b+2c}$ 的最小值是 4.

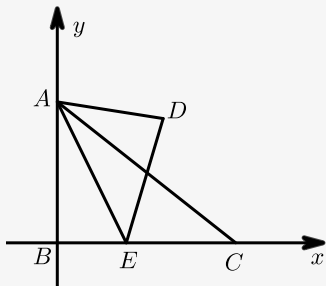
故答案为: 4.

【标注】 【知识点】 已知等式关系求最值

15. 已知平面四边形 $ABCD$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 3$, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 E 在线段 BC 上, $\angle ADE = 90^\circ$, 且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 18$, 则实数 λ 为 _____, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$ 取值范围为 _____.

【答案】 $\frac{2}{3}; (-12, 4)$

【解析】



建立平面直角坐标系如图,

则 $A(0, 2\sqrt{3})$, $B(0, 0)$, $C(3, 0)$,

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC},$$

$$\therefore E(3\lambda, 0),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = (3, -2\sqrt{3}) \cdot (3\lambda, -2\sqrt{3}) = 9\lambda + 12 = 18,$$

$$\therefore \lambda = \frac{2}{3},$$

则 $E(2, 0)$, $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 4$, 且 AE 的中点坐标为 $(1, \sqrt{3})$,

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$\therefore D$ 在以 $(1, \sqrt{3})$ 为圆心, 以 2 为半径的圆上,

$$\text{设 } D(2\cos\theta + 1, 2\sin\theta + \sqrt{3}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = (2, -2\sqrt{3}) \cdot (2\cos\theta + 1, 2\sin\theta + \sqrt{3})$$

$$= 4\cos\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta - 4 = 8\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 4,$$

$\therefore D$ 与 A, E 不重合,

$$\therefore \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \in (-1, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} \in (-12, 4),$$

故答案为: $\frac{2}{3}, (-12, 4)$.

【标注】 【知识点】数量积的最值问题