

选填练习五

1. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$, 则集合 $A \cup (\complement_U B) = (\quad)$.
- A. $\{2\}$ B. $\{3, 5\}$ C. $\{1, 4, 6\}$ D. $\{2, 3, 5\}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$,

$\complement_U B = \{3, 5\}$,

$\therefore A \cup (\complement_U B) = \{2, 3, 5\}$.

故选D .

【标注】 【知识点】 交、并、补集混合运算

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x| > 1$ ”是“ $x^2 > x$ ”的 ($\quad$) .
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $x \in \mathbf{R}$, $|x| > 1 \Rightarrow x > 1$ 或 $x < -1$,

$\because x^2 > x$,

$\therefore x^2 - x > 0$,

$\therefore x(x - 1) > 0$,

$\therefore x < 0$ 或 $x > 1$,

$\therefore |x| > 1 \Rightarrow x^2 > x$,

$x^2 > x \nRightarrow |x| > 1$,

$\therefore |x| > 1$ 是 $x^2 > x$ 的充分不必要条件 .

故选A .

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

3. 已知圆 $C: (x - 1)^2 + y^2 = 6$, 在所有过点 $P(2, -1)$ 的弦中 , 最短的弦的长度为 ($\quad$) .
- A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】由圆方程可知：圆心坐标为 $C(1,0)$ ，半径为 $r = \sqrt{6}$ ，
当过点 $P(2,-1)$ 的直线与连接 P 与圆心 C 的直线垂直时，弦最短，

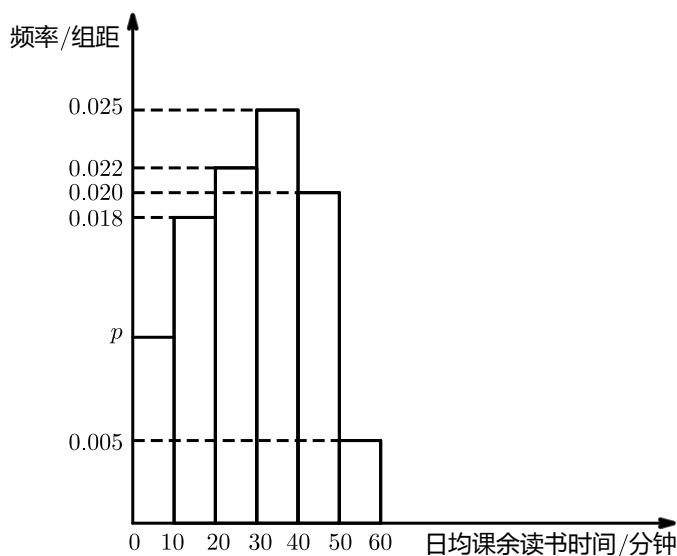
$$\therefore |CP| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{最短弦长为 } 2\sqrt{r^2 - |CP|^2} = 2\sqrt{6-2} = 4.$$

故选B.

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题

4. 某地区为了解学生课余时间的读书情况，随机抽取了 n 名学生进行调查，根据调查得到的学生日均课余读书时间绘制成如图所示的频率分布直方图，已知抽取的样本中日均课余读书时间低于10分钟的有10人，则图中的 n ， p 的值分别为（ ）.



A. 200 , 0.015

B. 100 , 0.010

C. 100 , 0.015

D. 1000 , 0.010

【答案】B

【解析】由频率分布直方图可知 $(p + 0.018 + 0.022 + 0.025 + 0.020 + 0.005) \times 10 = 1$ ，

解得 $p = 0.010$ ，

又 $\because$ 抽取的样本中日均课余读书时间低于10分钟的有10人，

$$\therefore 10pn = 10,$$

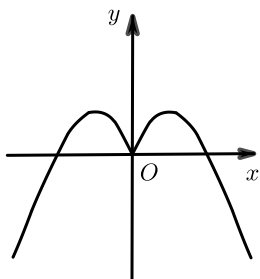
解得 $n = 100$ ，

故选B.

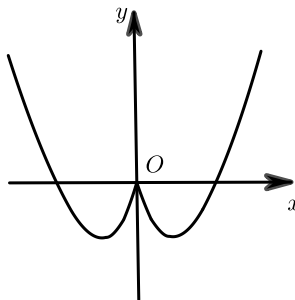
【标注】【知识点】频率与概率问题；频率分布直方图

5. 函数 $f(x) = e^{|x|} - 2x^2 - 1$ 的图象大致是 () .

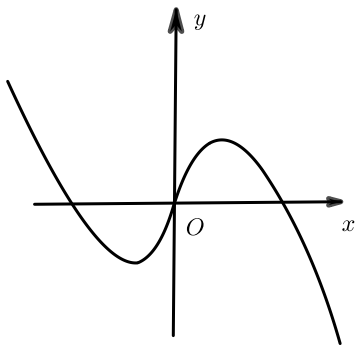
A.



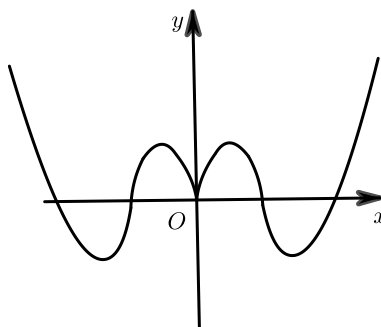
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 根据题意, $f(x) = e^{|x|} - 2x^2 - 1$, 有 $f(-x) = e^{|x|} - 2x^2 - 1 = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数, 排除 C

当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - 2x^2 - 1$, 其导数 $f'(x) = e^x - 4x$, 则 $f(x)$ 先增再减最后为增函数, 排除 A、B

故选 D .

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题

6. 已知双曲线的左, 右焦点分别为 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, P 为双曲线上一点且 $||PF_1| - |PF_2|| = 4$, 则双曲线的标准方程为 () .

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

D. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

【答案】 A

【解析】 由题知: $c = 3$,

$$\because ||PF_1| - |PF_2|| = 4,$$

$$\therefore 2a = 4, a = 2,$$

$$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5,$$

$$\therefore \text{双曲线标准方程为: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

故选A.

【标注】 【知识点】 双曲线的定义

7. 已知函数 $f(x) = x^2$, 设 $a = \log_5 4$, $b = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}$, $c = 2^{\frac{1}{5}}$, 则 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 的大小关系为 ().
- A. $f(a) > f(b) > f(c)$ B. $f(b) > f(c) > f(a)$ C. $f(c) > f(b) > f(a)$ D. $f(c) > f(a) > f(b)$

【答案】 D

【解析】 根据题意, 函数 $f(x) = x^2$, 是二次函数,

其对称轴为 y 轴, 且在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$$a = \log_5 4, \quad b = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3} = \log_5 3, \quad c = 2^{\frac{1}{5}},$$

则有 $b < a < 1 < c$,

则 $f(c) > f(a) > f(b)$.

故选D.

【标注】 【知识点】 用单调性比较大小

8. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x - 1$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π . 则下列说法正确的是 ().
- A. $\omega = 2$
- B. 函数 $f(x)$ 的最大值为1
- C. 函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增
- D. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到函数 $g(x) = 2\sin 2x$ 的图象

【答案】 C

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x - 1$

$$= \cos 2\omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x$$

$$= 2 \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\therefore f(x) = 2 \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right),$$

A选项: $\because$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π ,

$$\pi = \frac{2\pi}{2\omega},$$

$$\therefore \omega = 1,$$

故A错误;

B选项: $\because$ 函数 $f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最大值为2, 故B错误;

C选项： $\because$ 函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，
 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，
 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，故C正确；

D选项： $\because$ 函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，
 $\therefore g(x) = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$
 $= 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，故D错误。

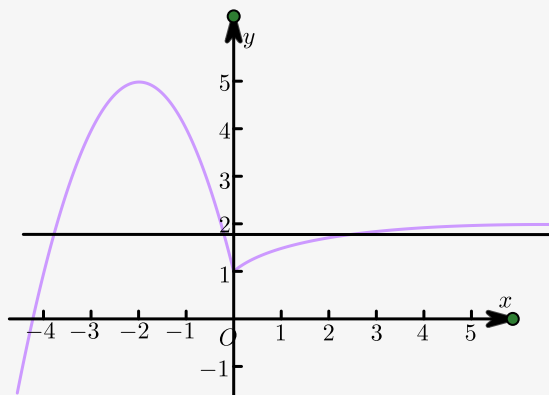
故选C。

【标注】【知识点】已知正弦型函数判定结论正误；二倍角的余弦；辅助角公式

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 1, & x \leq 0 \\ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x > 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $(f(x) - 1)(f(x) - m) = 0$ 恰有5个不同的实数根，则实数 m 的取值范围是（ ）。
- A. (1, 2) B. (1, 5) C. (2, 3) D. (2, 5)

【答案】 A

【解析】 方程 $(f(x) - 1)(f(x) - m) = 0$ 即为 $f(x) = 1$ ， $f(x) = m$ ，
 当 $f(x) = 1$ 时，即 $-x^2 - 4x + 1 = 1$ ，
 解得 $x = 0$ ， $x = -4$ ，或 $2 - 2^{-x} = 1$ ，解得 $x = 0$ （舍），
 若关于 x 的方程 $(f(x) - 1)(f(x) - m) = 0$ 恰有5个不同的实根，
 则 $f(x) = m$ 有3个根，即函数 $f(x)$ 图象与 $y = m$ 有3个交点，
 作出图象：



由图可知， $m \in (1, 2)$ 。

故选A。

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

10. 已知 i 是虚数单位，则复数 $\frac{3+5i}{i}$ 在复平面内对应的点的坐标为 _____ .

【答案】 $(5, -3)$

【解析】 $\frac{3+5i}{i} = \frac{(3+5i)i}{i \cdot i} = \frac{3i+5i^2}{-1} = \frac{3i-5}{-1} = 5-3i$,
∴复数 $\frac{3+5i}{i}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(5, -3)$.

【标注】 【知识点】复平面内求点坐标

11. 二项式 $\left(\frac{1}{2x^2} - x\right)^6$ 的展开式中的常数项为 _____ .

【答案】 $\frac{15}{4}$

【解析】 ∵二项式 $\left(\frac{1}{2x^2} - x\right)^6$ 的通项，
 $T_{r+1} = C_6^r (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{6-r} x^{3r-12} (r = 0, 1, 2, \dots, 6)$,
令 $3r - 12 = 0$ ，解得 $r = 4$,
 $T_5 = C_6^4 (-1)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^0 = \frac{15}{4}$,
∴二项式 $\left(\frac{1}{2x^2} - x\right)^6$ 的展开式中的常数项为 $\frac{15}{4}$.
故答案为： $\frac{15}{4}$.

【标注】 【知识点】求项的系数或二项式系数

12. 袋子中有5个大小质地完全相同的小球，其中有3个红球，2个黄球，从袋中一次性随机取出3个小球后，再将小球放回. 则“取出的3个小球中有2个红球，1个黄球”的概率为 _____，记“取出的3个小球中有2个红球，1个黄球”发生的次数为 X ，若重复5次这样的实验，则 X 的数学期望为 _____ .

【答案】 $\frac{3}{5}; 3$

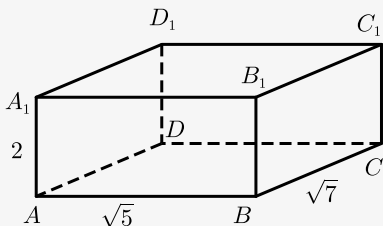
【解析】 设事件 A 为“取出的3个球中有2个红球，1个黄球”，
则 $P(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}$.
由题意得，重复5次这样的实验，事件 A 发生的次数 X 服从二项分布，
 $X \sim B\left(5, \frac{3}{5}\right)$,
则 $E(X) = 5 \times \frac{3}{5} = 3$,
故答案为： $\frac{3}{5}; 3$.

【标注】 【知识点】离散型随机变量的数学期望；古典概型的概率计算（涉及计数原理）

13. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{7}$, $AA_1 = 2$, 则三棱锥 $D_1 - ACD$ 的体积为 _____, 长方体的外接球的表面积为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{35}}{3}$; 16π

【解析】



由图可知 $V_{D_1-ACD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{7} \times 2 = \frac{\sqrt{35}}{3}$,

$A_1C = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7})^2 + 2^2} = \sqrt{5+7+4} = 4$,

$\therefore$ 长方体外接球半径为 2,

$\therefore$ 长方体外接球表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times 4 = 16\pi$.

【标注】 【知识点】 空间几何体的内切球、外接球问题; 空间几何体的表面积; 空间几何体的体积

14. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $2a + b = ab$, 则 $a + 2b$ 的最小值为 _____.

【答案】 9

【解析】 $\because a > 0, b > 0$, 且 $2a + b = ab$,

$\therefore a = \frac{b}{b-2} > 0$, 解得 $b > 2$,

则 $a + 2b = \frac{b}{b-2} + 2b = 1 + \frac{2}{b-2} + 2(b-2) + 4 \geq 5 + 2 \times 2\sqrt{\frac{1}{b-2} \cdot b-2} = 9$,

当且仅当 $b = 3$, $a = 3$ 时取等号,

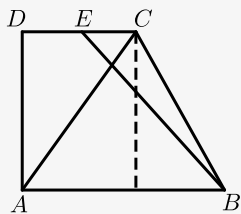
其最小值为 9.

【标注】 【知识点】 已知等式关系求最值

15. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{DC} (\lambda > 0)$, $\angle B = 60^\circ$, $AD = \sqrt{3}$, E 为 CD 中点, 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = -1$, 则 $|\overrightarrow{DC}|$ 的值为 _____, λ 的值为 _____.

【答案】 2; $\frac{3}{2}$

【解析】 根据题意画图,



$$\begin{aligned}
 & \text{设 } |\overrightarrow{DC}| = x, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) \\
 & = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CE} \\
 & = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \times \left(-\frac{x}{2}\right) \times 0 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)x + 1 \times \left(-\frac{x}{2}\right)x \\
 & = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 \\
 & = -1,
 \end{aligned}$$

$$\text{求得 } x = 2, \text{ 即 } |\overrightarrow{DC}| = 2,$$

$$\therefore \lambda = \frac{3}{2}.$$

故答案为：2； $\frac{3}{2}$ 。

【标注】 【知识点】利用向量数量积求模长