

## 选填练习九

1. 已知集合  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{2, 4, 5\}$ ,  $B = \{0, 2, 4\}$ , 则  $A \cap \complement_U B = ( \quad )$ .

- A.  $\{2, 4\}$                       B.  $\{2, 5\}$                       C.  $\{5\}$                       D.  $\{0, 2, 4, 5\}$

【答案】C

【解析】由题意得： $\complement_U B = \{1, 3, 5\}$ ,

所以  $A \cap \complement_U B = \{5\}$ .

故选C.

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算

2. 已知  $x \in \mathbf{R}$ , “ $|x+1| > 3$ ”是“ $x^2 > 4$ ”的( ).

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】由  $|x+1| > 3$  解得： $x < -4$  或  $x > 2$ , 由  $x^2 > 4$  解得  $x < -2$  或  $x > 2$ ,

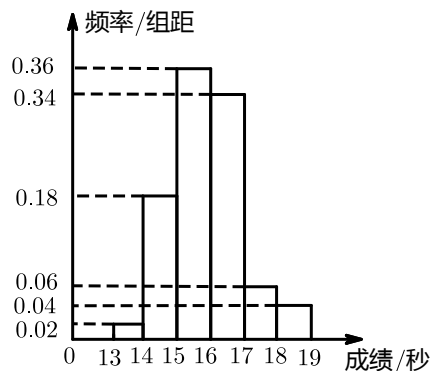
因为  $\{x|x < -4 \text{ 或 } x > 2\} \subsetneq \{x|x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$ ,

所以“ $|x+1| > 3$ ”是“ $x^2 > 4$ ”的充分不必要条件.

故选A.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

3. 某班50名学生在一次百米测试中, 成绩全部介于13秒与19秒之间, 将测试结果分成六组, 得到频率分布直方图(如图), 则成绩大于等于15秒且小于17秒的学生人数为( ).



A. 17

B. 18

C. 35

D. 45

**【答案】** C

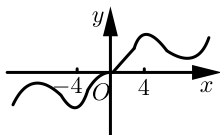
**【解析】** 由频率分布直方图可知，成绩大于等于15秒且小于17秒的频率为 $0.36 + 0.34 = 0.7$ ，则成绩大于等于15秒且小于17秒的学生人数为 $50 \times 0.7 = 35$ 人。

故选C。

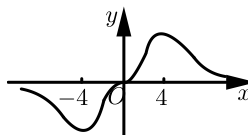
**【标注】** 【知识点】 频率分布直方图

4. 函数 $f(x) = \frac{x^4}{e^x + e^{-x}}$ 的大致图象为 ( )。

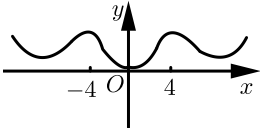
A.



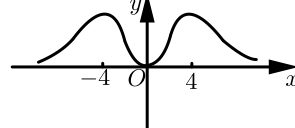
B.



C.



D.

**【答案】** D

**【解析】** 函数的定义域为 $\mathbf{R}$ ，

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{e^{-x} + e^x} = \frac{x^4}{e^x + e^{-x}} = f(x),$$

即 $f(x)$ 是偶函数，图象关于 $y$ 轴对称，排除A，B；

当 $x > 0$ 且趋向 $+\infty$ 时， $f(x)$ 趋向0，排除C。

故选：D。

**【标注】** 【知识点】 根据奇偶性确定图象

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上递减。若 $a = f(2^{0.7})$ ， $b = f(-\ln 2)$ ， $c = f(\log_3 2)$ ，则 $a$ ， $b$ ， $c$ 的大小关系为 ( )。

A.  $c < a < b$ B.  $c < b < a$ C.  $a < b < c$ D.  $b < a < c$ **【答案】** B

**【解析】** 因为 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上递减，所以在 $(0, +\infty)$ 上递增，

$$a = f(2^{0.7}), b = f(-\ln 2) = f(\ln 2), c = f(\log_3 2),$$

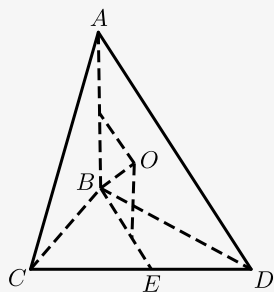
因为  $0 < \log_3 2 < \ln 2 < 1 < 2^{0.7}$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上递增,  
 所以  $f(\log_3 2) < f(\ln 2) < f(2^{0.7})$ , 即  $c < b < a$ .  
 故选B.

【标注】 【知识点】用单调性比较大小

6. 在三棱锥  $A-BCD$  中,  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $\triangle BCD$  是边长为3的正三角形,  $AB = \sqrt{3}$ , 则该三棱锥的外接球的表面积为 ( ).
- A.  $24\pi$                       B.  $21\pi$                       C.  $15\pi$                       D.  $6\pi$

【答案】 C

【解析】 如图,



设  $CD$  中点  $E$ , 连接  $BE$ ,

$\because \triangle BCD$  是边长为3的正三角形,

则底面三角形  $BCD$  外接圆的半径为  $\frac{2}{3}BE = \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ,

又  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,

$\therefore$  三棱锥的外接球的半径  $R$  满足

$$R^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{15}{4},$$

$\therefore$  该三棱锥的外接球的表面积为  $4\pi \times R^2 = 15\pi$ .

故选C.

【标注】 【知识点】空间几何体的表面积

7. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  与抛物线  $y^2 = 8x$  有一个公共的焦点  $F$ , 且两曲线的一个交点为  $P$ , 若  $|PF| = 5$ , 则双曲线的离心率为 ( ).
- A.  $\sqrt{5}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       D. 2

【答案】 D

【解析】抛物线的焦点为 $F(2,0)$ ， $|PF|=5$ ，则点 $P$ 的横坐标为3.

代入 $y^2=8x$ 得 $y^2=24$ ，则 $P(3,2\sqrt{6})$ 或 $P(3,-2\sqrt{6})$ ，

设双曲线另一个焦点为 $F_1$ ，则 $F_1(-2,0)$ ，焦距 $|F_1F|=2c=4$ ，

由对称性知： $|PF_1|=7$ ，则 $|PF_1|-|PF|=2$ ，即 $2a=2$ ．

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{1}=2$ ．

故选D．

【标注】 【知识点】 求双曲线的离心率

8. 函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$  ( $A>0, \omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ) 的部分图像如图所示，且满足

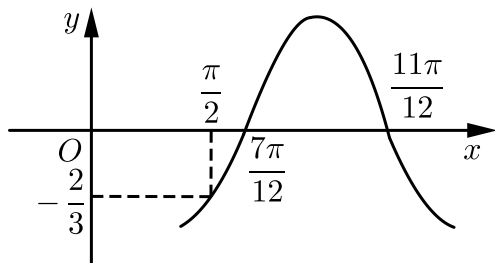
$f(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{3}$ ，现将图像沿 $x$ 轴向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图像，则下列说法正确的有 ( ) ．

① $g(x)$ 是奇函数；

② $g(x)$ 的图像关于 $x=\frac{5\pi}{6}$ 对称；

③ $g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}]$ 上是增函数；

④ $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 上的值域是 $[-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}]$ ．



A. ①②③④

B. ①③

C. ①②④

D. ②④

【答案】 C

【解析】 设 $f(x)$ 的最小正周期为 $T$ ，

由题图可知 $\frac{T}{2}=\frac{11\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$ ，

所以 $T=\frac{2\pi}{3}$ ， $\omega=3$ ，

当 $x=\frac{7\pi}{12}$ 时， $y=0$ ，即 $3\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$  ( $k\in\mathbf{Z}$ )，

所以 $\varphi=2k\pi-\frac{9\pi}{4}$  ( $k\in\mathbf{Z}$ )，

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ，

所以 $k=1$ ， $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ ，

所以 $f(x)=A\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ ，

又 $f(\frac{\pi}{2})=A\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}$ ，

$$\text{所以 } A = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{所以 } g(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 3x,$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 的周期 } T = \frac{2\pi}{3},$$

当  $x = \frac{\pi}{6}$  时, 函数取得最小值,  $x = -\frac{\pi}{6}$  函数取得最大值, 所以③不正确;

$$\text{当 } x = \frac{5\pi}{6} \text{ 时, } g(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \sin\left(3 \times \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

所以  $g(x)$  的图象关于  $x = \frac{5\pi}{6}$  对称, 所以②正确;

$g(x)$  是奇函数, 所以①正确;

$g(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$  上的值域是  $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}\right]$ , 所以④正确.

故选 C.

**【标注】** 【知识点】已知正弦型函数判定结论正误

9. 已知  $x \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 2x^2 - 7x, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$ , 若关于  $x$  的不等式  $f(x) - ax(2x+3) \geq 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 ( ).

- A.  $[-2, 3]$       B.  $\left[-2, \frac{e\sqrt{e}}{9}\right]$       C.  $\left[-\frac{7}{3}, \frac{e\sqrt{e}}{9}\right]$       D.  $\left[-\frac{7}{3}, 3\right]$

**【答案】** B

**【解析】** 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) - ax(2x+3) \geq 0$ , 即  $-x^3 - 2x^2 - 7x - a \times (2x+3) \geq 0$  只需

$$x^3 + 2x^2 + 7x + a(2x+3) \geq 0 \text{ 即可,}$$

$$\text{令 } g(x) = x^3 + 2x^2 + 7x + a(2x+3) = [x + (1+a)]^2 - a^2 + a + 6,$$

$$\text{当 } 1+a \geq 0 \text{ 即 } a \geq -1 \text{ 时, } g(x)_{\min} = g(0) = 7+3a \geq 0,$$

$$\therefore a \geq -\frac{7}{3};$$

$$\text{当 } 1+a < 0,$$

$$\text{即 } a < -1 \text{ 时, } g(x)_{\min} = -a^2 + a + 6 \geq 0 \Rightarrow (-a+3)(a-2) \geq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 3,$$

综上  $a \geq -2$ ,

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } e^x - a \times (2x+3) \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{e^x}{x(2x+3)}, \text{ 令 } h(x) = \frac{e^x}{x(2x+3)},$$

$$h'(x) = \frac{e^x(2x-3)(x+1)}{x^2(2x+3)^2}, \text{ 令 } h'(x) = 0,$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \text{ 或 } x = -1 \text{ (舍去)},$$

$$x \in \left(0, \frac{3}{2}\right), h'(x) < 0, h(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ 单调递减},$$

$$x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right), h'(x) > 0, h(x) \text{ 在 } \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \text{ 单调递增},$$

$$\therefore h(x)_{\min} = h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\left(2 \times \frac{3}{2} + 3\right)} = \frac{e\sqrt{e}}{9},$$

$$\text{即 } a \leq \frac{e\sqrt{e}}{9},$$

$$\text{综上 } a \in \left[-2, \frac{e\sqrt{e}}{9}\right).$$

故选B.

**【标注】** 【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

10. 已知复数  $z = \frac{a+2i}{2-i}$  是纯虚数 (其中  $i$  是虚数单位), 则实数  $a$  的值为 \_\_\_\_.

**【答案】** 1

**【解析】** 复数  $z = \frac{a+2i}{2-i} = \frac{(a+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2a-2+(4+a)i}{2^2+1^2} = \frac{2a-2}{5} + \frac{4+a}{5}i$  是纯虚数 (其中  $i$  是虚数单位),

$$\therefore \frac{2a-2}{5} = 0, \quad \frac{4+a}{5} \neq 0.$$

解得  $a = 1$ .

**【标注】** 【知识点】复数的乘法和除法

11.  $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^6$  展开式中的常数项是 \_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{15}{16}$

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } T_{r+1} &= C_6^r (x^2)^{6-r} \left(-\frac{1}{2x}\right)^r \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^r C_6^r x^{12-3r}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } 12-3r=0, \text{ 解得 } r=4,$$

$$\therefore \text{常数项} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 C_6^4 = \frac{15}{16}.$$

故答案为:  $\frac{15}{16}$ .

**【标注】** 【知识点】求二项式展开式的特定项

12. 已知圆  $C$  的圆心在直线  $y = -4x$  上, 且与直线  $l: x + y - 1 = 0$  切于点  $P(3, -2)$ , 则圆  $C$  被直线  $3x - 4y - 9 = 0$  截得的弦长为 \_\_\_\_.

**【答案】** 4

【解析】过切点 $P(3, 2)$ 且与 $x + y - 1 = 0$ 垂直的直线为 $y + 2 = x - 3$ ，即 $y = x - 5$ ，

与直线 $y = -4x$ 联立，解得 $x = 1$ ， $y = -4$ ，

∴圆心为 $(1, -4)$ ，

∴半径 $r = \sqrt{(3-1)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$ ，

圆心 $(1, -4)$ 到直线 $3x - 4y - 9 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3 + 16 - 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$ ，

∴圆被直线 $3x - 4y - 9 = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{8 - 4} = 4$ ．

故答案为：4．

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

13. 已知 $A$ 袋内有大小相同的1个红球和3个白球， $B$ 袋内有大小相同的2个红球和4个白球，现从 $A$ 、 $B$ 两个袋内各任取2个球，则恰好有1个红球的概率为 \_\_\_\_\_；记取出的4个球中红球的个数为随机变量 $X$ ，则 $X$ 的数学期望为 \_\_\_\_\_．

【答案】  $\frac{7}{15}$ ； $\frac{7}{6}$

【解析】方法一：列表计算：

$$P(\xi = 1) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_4^2} \cdot \frac{C_2^2}{C_6^2} + \frac{C_3^2}{C_4^2} \cdot \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2} = \frac{7}{15}，$$

所以 $\xi$ 的所有可能取值为：0，1，2，3，

$$P(\xi = 0) = \frac{C_3^2}{C_4^2} \cdot \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}，$$

$$P(\xi = 3) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_4^2} \cdot \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{30}，$$

$$P(\xi = 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 3) = \frac{3}{10}，$$

| $\xi$ | 0             | 1              | 2              | 3              |
|-------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| $P$   | $\frac{1}{5}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ |

$$\text{则 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{7}{6}．$$

方法二：从 $A$ 袋中取出红球的个数为 $\xi_1$ ，

则 $\xi_1 \sim B\left(2, \frac{1}{4}\right)$ ，从 $B$ 袋中取出红球个数为 $\xi_2 \sim B\left(2, \frac{1}{3}\right)$ ，

$$\text{所以 } E(\xi) = E(\xi_1) + E(\xi_2) = 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{6}．$$

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望

14. 设 $a > b > 0$ ，那么 $\frac{a^4 + 1}{b(a - b)}$ 的最小值是 \_\_\_\_\_．

【答案】 8

【解析】  $\because a > b > 0$ ,

$$\therefore a - b > 0,$$

$$\therefore b(a-b) \leq \left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

当且仅当  $b = a - b$ , 即  $a = 2b$  时等号成立,

$$\therefore \frac{a^4 + 1}{b(a-b)} \geq \frac{a^4 + 1}{a^2} = 4\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$$

$$\geq 4 \times 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}}$$

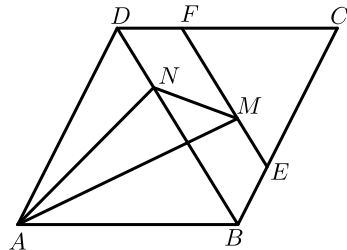
$$= 8.$$

当且仅当  $a^2 = \frac{1}{a^2}$ , 即  $a = 1$  时等号成立.

$$\therefore a = 1, b = \frac{1}{2} \text{ 时, } \left[\frac{a^4 + 1}{b(a-b)}\right]_{\min} = 8.$$

【标注】 【知识点】 利用两次基本不等式求最值

15. 如图, 在菱形  $ABCD$  中,  $AB = 2$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $E$ 、 $F$  分别为  $BC$ 、 $CD$  上的点,  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ ,  $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FD}$ , 点  $M$  在线段  $EF$  上, 且满足  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 则  $x =$  \_\_\_\_\_; 若点  $N$  为线段  $BD$  上一动点, 则  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN}$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{1}{2}; \left[-\frac{37}{36}, \frac{1}{3}\right]$

【解析】  $\because E, M, F$  三点共线,

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AE} + (1-\lambda) \overrightarrow{AF}$$

$$= \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) + (1-\lambda)(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$$

$$= \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \lambda \overrightarrow{AD} + (1-\lambda) \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} (1-\lambda) \overrightarrow{AB}$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \lambda\right) \overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{2}{3} \lambda\right) \overrightarrow{AD}.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + \frac{5}{6} \overrightarrow{AD},$$

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \lambda = x \\ 1 - \frac{2}{3} \lambda = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases}.$$



$$\begin{aligned}
& \text{又 } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} \cdot (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}), \text{ 设 } |\overrightarrow{DN}| = x, \text{ 则 } |\overrightarrow{BN}| = 2 - x, \\
& \text{又 } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}, \text{ 故 } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) \left( \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{5}{6} \overrightarrow{AD} \right) \\
& = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) \left( \frac{1}{6} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \\
& = \frac{1}{6} \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DN} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{DN}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DN} \\
& = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AD}|^2 + \frac{7}{6} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DN} + |\overrightarrow{DN}|^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DN} \\
& = \frac{1}{6} \times 2^2 + \frac{7}{6} \times 2 \times x \times \cos 120^\circ + x^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \cos 60^\circ - \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \cos 60^\circ \\
& = \frac{2}{3} - \frac{7}{6}x + x^2 - 1 - \frac{1}{2}x \\
& = x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{又 } x \in [0, 2], \text{ 对称轴 } x = -\frac{-\frac{5}{3}}{2 \times 1} = \frac{5}{6}, \\
& \text{故 } \left( \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} \right)_{\min} = \left( \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{5}{3} \times \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{37}{36}. \\
& \text{当 } x = 0 \text{ 时, } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}; \\
& \text{当 } x = 2 \text{ 时, } \left( \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} \right) = 2^2 - \frac{5}{3} \times 2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \\
& \text{因此 } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} \in \left[ -\frac{37}{36}, \frac{1}{3} \right].
\end{aligned}$$

**【标注】** 【知识点】线性运算和数量积综合问题