

综合练 2

一、单选题

1. 下列条件中，使 $a > b$ 成立的必要而不充分条件是 ()

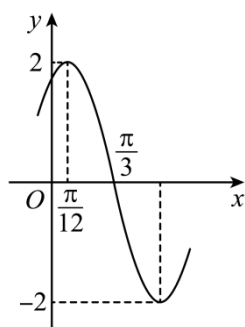
- A. $a - 1 > b$ B. $a + 1 > b$ C. $|a| > |b|$ D. $a^3 > b^3$

2. 中国雕刻技艺举世闻名，雕刻技艺的代表作“鬼工球”，取鬼斧神工的意思，制作相当繁复，成品美轮美奂. 1966 年，玉石雕刻大师吴公炎将这一雕刻技艺应用到玉雕之中，他把玉石镂成多层圆球，层次重叠，每层都可灵活自如的转动，是中国玉雕工艺的一个重大突破. 今一雕刻大师在棱长为 12 的整块正方体玉石内部套雕出一个可以任意转动的球，在球内部又套雕出一个正四面体（所有棱长均相等的三棱锥），若不计各层厚度和损失，则最内层正四面体的棱长最长为 ()



- A. $4\sqrt{6}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{6}$ D. 6

3. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，关于该函数有下列四个说法：

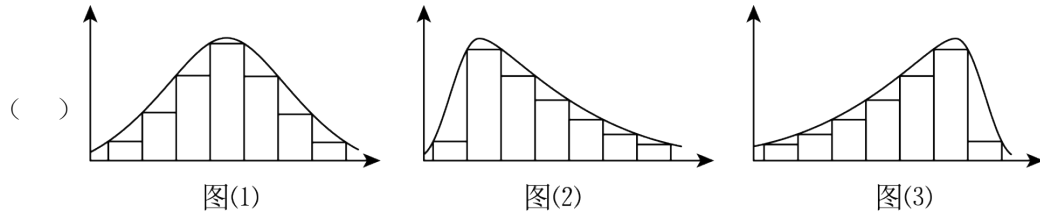


- ① $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 对称；
 ② $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称；
 ③ $f(x)$ 的图象可由 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到；
 ④ 若方程 $g(x) = f(tx)$ ($t > 0$) 在 $\left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有且只有两个极值点，则 t 的最大值为 $\frac{13}{10}$.

以上四个说法中，正确的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 如图所示，下列频率分布直方图显示了三种不同的形态. 图（1）形成对称形态，图（2）形成“右拖尾”形态，图（3）形成“左拖尾”形态，根据所给图做出以下判断，不正确的是



- A. 图（1）的平均数=中位数=众数 B. 图（2）的众数<中位数<平均数
C. 图（2）的平均数<众数<中位数 D. 图（3）的平均数<中位数<众数

5. 若 $0 < b < 1$ ，则“ $a > b^3$ ”是“ $a > b$ ”的（ ）

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

6. 根据最小二乘法由一组样本点 (x_i, y_i) （其中 $i = 1, 2, \dots, 300$ ），求得的回归方程是

$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，则下列说法正确的是（ ）

- A. 至少有一个样本点落在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上
B. 若所有样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上，则变量间的相关系数为 1
C. 当 $\hat{b} = -2$ 时， x 增加 1 个单位时， y 平均增加 2 个单位
D. 若回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率 $\hat{b} > 0$ ，则变量 x 与 y 正相关

7. 记函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T . 若 $\pi < T < 2\pi$ ，且 $y = f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{6}$ ，关于该函数有下列四个说法：

- ① $2 < \omega < 3$;
② $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
③ $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增;
④ 为了得到 $g(x) = \sin \omega x$ 的图象，只需将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度.

以上四个说法中，正确的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作一条渐近线的垂线, 垂足为 A , 延长 F_2A 与另一条渐近线交于点 B , 若 $S_{\triangle BOF_1} = 3S_{\triangle AOB}$ (O 为坐标原点), 则双曲线的离心率为 ()
- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$
9. “ $a > b$ ”是“ $a > |b| + 1$ ”的 ()
- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
10. 按从小到大顺序排列的两组数据: 甲组: 7, 11, 14, m , 22; 乙组: 5, 10, n , 18, 20, 若这两组数据的第 50 百分位数、第 80 百分位数分别对应相等, 则 $m + n =$ ()
- A. 28 B. 29 C. 30 D. 32
11. 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x < |y|$ ”是“ $x^2 < y^2$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
12. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x = 0$ ”是“ $\sin 2x = 0$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
13. 下列说法中错误的是 ()
- A. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$
- B. 若 $X \sim N(1, 2^2)$, $Y \sim N(2, 2^2)$, 则 $P(X < 1) < P(Y < 2)$
- C. $|r|$ 越接近 1, 相关性越强
- D. $|r|$ 越接近 0, 相关性越弱
14. $S_n = -n^2 + 8n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 12 项和为 ()
- A. 112 B. 48 C. 80 D. 64
15. 函数 $f(x) = 0.3^x - \sqrt{x}$ 的零点所在区间是 ()
- A. (0, 0.3) B. (0.3, 0.5) C. (0.5, 1) D. (1, 2)
16. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 是平面上两个非零的向量, 则“ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ”是“ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

17. 已知公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若数列 $\{S_n + a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列, 则 $a_3 =$ ()

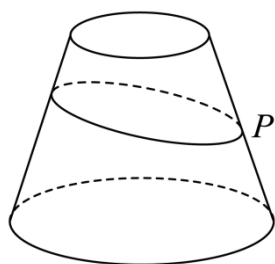
A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{5}{8}$

18. 圆台的上底面半径为 1, 下底面半径为 2, 母线长为 4. 已知 P 为该圆台某条母线的中点, 若一质点从点 P 出发, 绕着该圆台的侧面运动一圈后又回到点 P , 则该质点运动的最短路径长为 ()



A. $6\sqrt{2}$

B. 6

C. 6π

D. 3π

19. 下列结论中, 错误的是 ()

A. 数据 4, 1, 6, 2, 9, 5, 8 的第 60 百分位数为 6

B. 若随机变量 $\xi \sim N(1, \sigma^2)$, $P(\xi \leq -2) = 0.21$, 则 $P(\xi \leq 4) = 0.79$

C. 已知经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 1.8$, 且 $\bar{x} = 2, \bar{y} = 20$, 则 $\hat{b} = 9.1$

D. 根据分类变量 X 与 Y 成对样本数据, 计算得到 $\chi^2 = 9.632$, 依据小概率值 $\alpha = 0.001$

的 χ^2 独立性检验 ($\chi_{0.001}^2 = 10.828$), 可判断 X 与 Y 有关联, 此推断犯错误的概率不大于

0.001

20. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 上的点 P 到 C 的两条渐近线的距离分别为 d_1, d_2 , 若 $d_1 = \frac{1}{4}d_2$,

则点 (d_1, d_2) 到 C 的右焦点的距离为 ()

A. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{13}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

21. 若 $a \in \mathbf{R}$, 直线 $l_1: x + 2ay - 1 = 0$, 直线 $l_2: (3a - 1)x - ay - 1 = 0$, 则“ $a = 0$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”

的 ()

A. 充分不必要条件

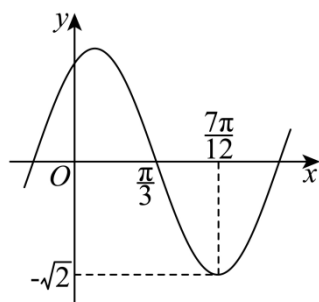
B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

22. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示, 要得到

$y = \sqrt{2} \sin x$ 的图象, 只需将函数 $f(x)$ 的图象上所有的点 ()



A. 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

B. 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向左平行移动 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度

C. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再向左平行移动 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度

二、填空题

23. 在 $(x^2 - x - 2)^3$ 的展开式中 x^5 的系数是_____。(用数字作答)

24. 在 $(2x + a)(x + \frac{2}{x})^6$ 的展开式中, x^2 的系数为 -160, 则实数 a 为_____.

25. 在 $(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^n$ 的二项式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于_____.

26. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x + c$ ($x \in \mathbf{R}$) 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{1}{c} + \frac{4}{a}$ 的最小值为_____.

27. 小桐操场跑圈, 一周 2 次, 一次 5 圈或 6 圈. 第一次跑 5 圈或 6 圈的概率均为 0.5, 若第一次跑 5 圈, 则第二次跑 5 圈的概率为 0.4, 6 圈的概率为 0.6; 若第一次跑 6 圈, 则第二次跑 5 圈的概率为 0.6, 6 圈的概率为 0.4. 小桐一周跑 11 圈的概率为_____; 若一周至少跑 11 圈为运动量达标, 则连续跑 4 周, 记合格周数为 X , 则期望 $E(X)$ = _____

三、解答题

28. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(1)求椭圆 C 的离心率和长轴长;

(2)已知直线 $y = kx + 2$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 A, B , P 为 x 轴上一点.是否存在实数 k , 使得 $\triangle PAB$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 求出 k 的值及点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

29. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列. $a_1 = 1$, 且

$$a_3 - b_1 = 1, \quad a_4 - b_1 = b_3 - a_6.$$

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

$$(2) \text{若 } c_k = \begin{cases} \left(a_k - \frac{1}{a_k}\right)b_k, & k \text{ 为奇数,} \\ \left(a_{2n+1-k} + \frac{1}{a_{2n+1-k}}\right)b_{2n+1-k}, & k \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

①当 k 为奇数, 求 $c_k + c_{2n+1-k}$;

②求 $\sum_{k=1}^{2n} c_k$.

30. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上、下顶点与一个焦点是等腰直角三角形的三个顶点, 且点 $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆上.

(1)求椭圆 C 的离心率及标准方程;

(2)过点 $P(0,1)$ 且斜率存在的动直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 问在 y 轴上是否存在与点 P

不同的定点 Q , 使得 $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle BPQ}}$ 恒成立? 若存在, 求出定点 Q 的坐标; 若不存在, 请说

明理由.