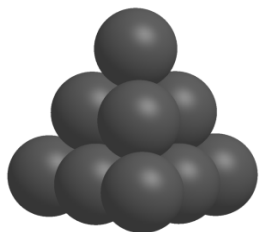


综合练 1

一、单选题

1. 已知实数 a, b, c , 则“ $ac^2 \geq bc^2$ ”是“ $a \geq b$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. 已知函数 $f(x) = \frac{e^{2x-4} - 1}{e^{x-2}} + x - 1$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[m, M]$. 若 $a + b = 4$, 则 $m + M$ 的值为 ()
- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2
3. 若 a, b 都是正数, 则 $\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{4a}{b}\right)$ 的最小值为 ()
- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10
4. 第九届亚冬会在哈尔滨举行, 参加自由式滑雪女子大跳台决赛的六位选手的得分如下: 119.50, 134.75, 154.75, 159.50, 162.75, 175.50, 则该组数据的第 40 百分位数为 ()
- A. 134.75 B. 144.75 C. 154.75 D. 159.50
5. 若 $2^a = 3 = \log_b 9$, $c = e^{\frac{\ln 2}{3}}$, 则实数 a, b, c 的大小顺序为 ()
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$
6. 已知函数 $f(x)$ 同时满足性质: ① $f(-x) = f(x)$; ② 当 $\forall x_1, x_2 \in (0, 1)$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则函数 $f(x)$ 可能为 ()
- A. $f(x) = x^2$ B. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
C. $f(x) = \cos 4x$ D. $f(x) = \ln(1 - |x|)$
7. 如图所示的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解几章算术·商功》中, 后人称为“三角垛”. “三角垛”的最上层有 1 个球, 第二层有 3 个球, 第三层有 6 个球, 第一、二层的每一个球均分别与其下一层相邻的三个球相切. 现将“三角垛”放置在地面上, 若每个球的半径均为 1, 则第一层的球的表面上的点到地面的最大距离为 ().



- A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}+1$ B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}+2$ C. $\frac{4\sqrt{6}}{3}+1$ D. $\frac{4\sqrt{6}}{3}+2$

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A, B 分别在 C 的左

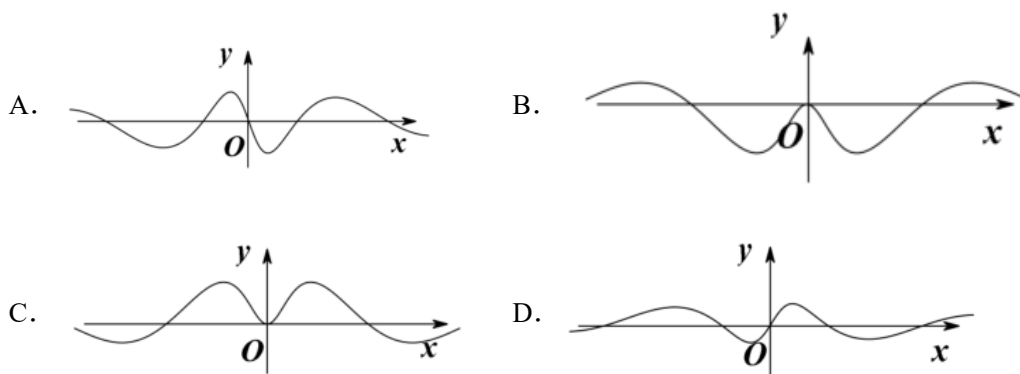
支和右支上, 且满足 $AF_1 \parallel BF_2$, $5|AF_1| = 3|BF_2|$, $|BF_1| = 2|AF_1|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{34}}{2}$ B. $\sqrt{34}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

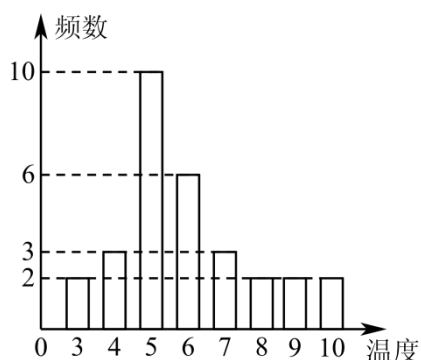
9. 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则“ $\frac{a}{b} > 1$ ”是“ $a > b$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \cdot \sin x$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象大致为 ()



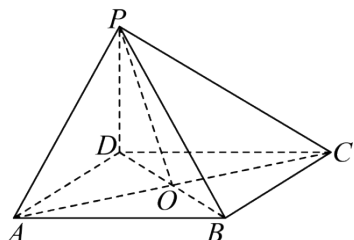
11. 某地气象局把当地某月(共 30 天)每一天的最低气温作了统计, 并绘制了如下图所示的统计图. 记这组数据的众数为 M , 中位数为 N , 平均数为 P , 则 ()



- A. $M < N < P$ B. $N < M < P$ C. $P < M = N$ D. $P < N < M$

12. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, O 为对角线 AC 与 BD 的交点, 若 $PD=2, \angle APD = \frac{\pi}{4}, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$, 则三棱锥 $P- OCD$ 的外接球的体积为

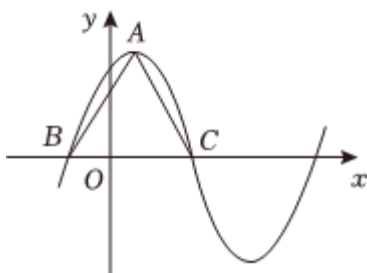
()



- A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ C. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ D. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

13. 函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的部分图象如图所示, A 为图象的最高点, B, C 为图象与 x 轴的交点, 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 若 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, 且 $x_0 \in (0, 1)$, 则 $f\left(x_0 - \frac{1}{3}\right)$ 的值为

()



- A. $\frac{6}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{10}$
 B. $\frac{4}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}$
 C. $\frac{6}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}$
 D. $\frac{4}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{10}$

14. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{3a_{n+1}} = \frac{1}{6}$, 且 $a_1 = a_3$, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 27 B. 30 C. 33 D. 36

15. 下列说法中错误的是 ()

- A. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$
 B. 若 $X \sim N(1, 2^2)$, $Y \sim N(2, 2^2)$, 则 $P(X < 1) < P(Y < 2)$

C. $|r|$ 越接近 1, 相关性越强

D. $|r|$ 越接近 0, 相关性越弱

16. 函数 $f(x) = 0.3^x - \sqrt{x}$ 的零点所在区间是 ()

A. (0,0.3)

B. (0.3,0.5)

C. (0.5,1)

D. (1,2)

17. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以右焦点 F_2 为焦点的抛物线

$y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线交于第一象限的点 P , 若 $|PF_1| + |PF_2| = 3|F_1F_2|$, 则双曲线的离心率

$e =$ ()

A. 2

B. 5

C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

二、填空题

18. 函数 $y = \sqrt{2\sin^2 x + \cos x - 1}$ 的定义域为_____.

19. 已知函数 $y = \log_2(x^2 - 2ax + 8)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围为_____.

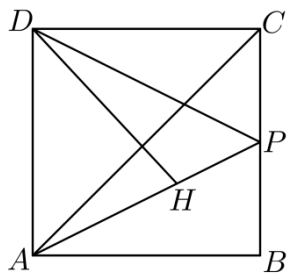
20. 一袋中装有 2 个红球, 3 个黑球, 现从中任意取出一球, 然后放回并放入 2 个与取出的球颜色相同的球, 再从袋中任意取出一球, 然后放回并再放入 2 个与取出的球颜色相同的球, 一直重复相同的操作, 则第二次取出的球是黑球的概率为_____; 在第一次取出的球是红球的条件下, 第 2 次和第 4 次取出的球都是黑球的概率为_____.

21. 函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ |x-1|, & x \leq 0 \end{cases}$, 当 $f(x) - 1 = 0$ 时, 则 x 的值为_____.

22. 在 $(2-x)(x+1)^4$ 的展开式中, x^2 的系数为_____. (用数字作答)

23. 2044 年, 当同学们重返母校参加 140 周年校庆时, 惊喜地发现, 南院正门外真的出现了一家“南德琐艾奶茶店”, 这里正出售 6 款饮品, 分别为林林清风、金晓惠兰、明明如月、幽幽谭香、天天爆柠、雅韵冰酿. 甲、乙两位同学分别选购 3 款不同饮品, 则甲选购的饮品中有“林林清风”的概率为_____; 在甲选购了“林林清风”这款饮品的条件下, 甲、乙二人所选饮品中恰有 1 款相同的概率为_____.

24. 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 则 $|\overrightarrow{PD}| =$ _____; 若点 H 是线段 AP 上的动点, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HD}$ 的取值范围是_____.



25. $\left(x + \frac{2}{x}\right)(x-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为_____.

26. 小桐操场跑圈,一周 2 次,一次 5 圈或 6 圈.第一次跑 5 圈或 6 圈的概率均为 0.5,若第一次跑 5 圈,则第二次跑 5 圈的概率为 0.4,6 圈的概率为 0.6;若第一次跑 6 圈,则第二次跑 5 圈的概率为 0.6,6 圈的概率为 0.4.小桐一周跑 11 圈的概率为_____;若一周至少跑 11 圈为运动量达标,则连续跑 4 周,记合格周数为 X ,则期望 $E(X)$ = _____

27. $\triangle ABC$ 中, D 为 AB 边中点, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AE}$ = _____ (用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示), 若 $|\overrightarrow{AE}| = 5$, $AE \perp CB$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD}$ = _____

三、解答题

28. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c , 且 $b \cos C + c \cos B = 2a \cos A$.

(1)若 $a = 2, b + c = \sqrt{13}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\sin B + \sin C$ 的取值范围.

29. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 $x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{2} = 0$ 经过椭圆 E 的左顶点 A 和下顶点 B .

(1)求椭圆 E 的方程和离心率;

(2)设过点 $G(0, s) (s > 0)$ 且斜率不为 0 的直线交椭圆 E 于 C, D 两点, 直线 BC, BD 与直线 $y = t$ 的交点分别为 P, Q , 线段 CD, PQ 的中点分别为 M, N . 若直线 MN 经过坐标原点, 求 $s + t$ 的取值范围.

30. 已知 $A(2, 1)$ 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点, 且 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 斜率存在且不过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 直线 AP 与直线 AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$

(1)求 E 的方程.

(2)证明: l 的斜率为定值.

(3) 设 O 为坐标原点, 若 l 与线段 OA (不含端点) 相交, 且四边形 $OPAQ$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 l 的方程.

31. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足: $a_1 = b_1 = 1$, $b_n \in \mathbf{N}^*$, $a_2 + a_8 = 18$, $b_2 b_4 = 81$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{n^2}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(3) 已知 $c_n = \frac{a_n}{3b_n}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 若对任意正整数 n , 不等式 $1 - T_n < \frac{\lambda}{2^n}$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

32. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_4 - a_2 = 12$, $S_4 + 2S_2 = 3S_3$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1), \quad n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \begin{cases} \frac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, T_n 为 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_{2n} .