

## 综合练 1

### 一、单选题

1. 已知实数  $a, b, c$ , 则“ $ac^2 \geq bc^2$ ”是“ $a \geq b$ ”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【知识点】判断命题的必要不充分条件

【分析】根据充分条件和必要条件的定义判断.

【详解】若  $ac^2 \geq bc^2$ , 当  $c=0$  时, 无论  $a, b$  为何值,  $ac^2 = bc^2 = 0$  成立, 此时无法判断  $a, b$  的大小, 则充分条件不成立,

若  $a \geq b$ , 两边同乘以大于等于零的数, 根据不等式的性质可知  $ac^2 \geq bc^2$ , 则必要性成立, 故选: B.

2. 已知函数  $f(x) = \frac{e^{2x-4} - 1}{e^{x-2}} + x - 1$  在区间  $[a, b]$  上的值域为  $[m, M]$ . 若  $a + b = 4$ , 则  $m + M$  的值为 ( )

A. 8

B. 6

C. 4

D. 2

【答案】D

【知识点】利用函数单调性求最值或值域、求指数型复合函数的值域

【分析】根据题意可得函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上递增, 利用  $a + b = 4$  可得  $m + M$  的值.

【详解】解法 1: 因为  $f(x) = \frac{e^{2x-4} - 1}{e^{x-2}} + x - 1 = e^{x-2} - e^{2-x} + x - 1$ ,

所以  $f(4-x) + f(x) = 2$ ,

所以  $f(x)$  关于  $(2, 1)$  对称.

因为  $a + b = 4$ , 函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的值域为  $[m, M]$ , 所以  $m + M = 2$ .

解法 2: 因为  $f(x) = \frac{e^{2x-4} - 1}{e^{x-2}} + x - 1 = e^{x-2} - e^{2-x} + x - 1$  在  $[a, b]$  上递增,

所以  $m + M = f(a) + f(b) = f(4-a) + f(a) = 2$ .

解法 3: 取  $a = 0, b = 4$ , 因为  $f(x) = \frac{e^{2x-4} - 1}{e^{x-2}} + x - 1 = e^{x-2} - e^{2-x} + x - 1$  在  $[0, 4]$  上递增,

所以  $m+M=f(0)+f(4)=2$ .

故选 D.

3. 若  $a, b$  都是正数, 则  $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{4a}{b}\right)$  的最小值为 ( )

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

【答案】C

【知识点】基本不等式求和的最小值

【分析】将目标式展开, 利用基本不等式即可求得其最小值.

【详解】因为  $a, b$  都是正数, 所以  $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{4a}{b}\right)=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geq 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=9$ ,

当且仅当  $b=2a>0$  时取等号.

故选: C.

【点睛】本题考查利用基本不等式求和的最小值, 属基础题.

4. 第九届亚冬会在哈尔滨举行, 参加自由式滑雪女子大跳台决赛的六位选手的得分如下:

119.50, 134.75, 154.75, 159.50, 162.75, 175.50, 则该组数据的第 40 百分位数为 ( )

A. 134.75

B. 144.75

C. 154.75

D. 159.50

【答案】C

【知识点】总体百分位数的估计

【分析】根据百分位数的定义求解.

【详解】六位选手得分由小到大排列如下:

119.50, 134.75, 154.75, 159.50, 162.75, 175.50,

因为  $6\times 40\%=2.4$ ,

所以该组数据的第 40 百分位数为第三个数 154.75.

故选: C

5. 若  $2^a=3=\log_b 9$ ,  $c=e^{\frac{\ln 2}{3}}$ , 则实数  $a, b, c$  的大小顺序为 ( )

A.  $a>b>c$

B.  $a>c>b$

C.  $b>c>a$

D.  $b>a>c$

【答案】D

【知识点】比较对数式的大小、研究对数函数的单调性、比较指数幂的大小

【分析】求出  $a, b, c$ , 利用对数函数、幂函数的单调性可得出  $a, b, c$  的大小顺序.

【详解】由题意可得  $a=\log_2 3$ ,  $b^3=9$ , 可得  $b=9^{\frac{1}{3}}$ ,  $c=\frac{2}{3}$ ,

因为对数函数  $y = \log_2 x$  为  $(0, +\infty)$  上的增函数, 则  $2 = \log_2 4 > a = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$ ,

幂函数  $y = x^{\frac{1}{3}}$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数, 则  $b = 9^{\frac{1}{3}} > 8^{\frac{1}{3}} = 2$ ,

故  $b > a > c$ .

故选: D.

6. 已知函数  $f(x)$  同时满足性质: ①  $f(-x) = f(x)$ ; ② 当  $\forall x_1, x_2 \in (0, 1)$  时,  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ,

则函数  $f(x)$  可能为( )

A.  $f(x) = x^2$

B.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

C.  $f(x) = \cos 4x$

D.  $f(x) = \ln(1 - |x|)$

【答案】D

【知识点】定义法判断或证明函数的单调性、函数奇偶性的定义与判断

【分析】①  $f(-x) = f(x)$  说明  $f(x)$  为偶函数, ②  $\forall x_1, x_2 \in (0, 1)$ ,  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ , 说明函数

在  $(0, 1)$  上单调递减, 再逐项分析即可.

【详解】①  $f(-x) = f(x)$  说明  $f(x)$  为偶函数, ②  $\forall x_1, x_2 \in (0, 1)$ ,  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ , 说明函数

在  $(0, 1)$  上单调递减.

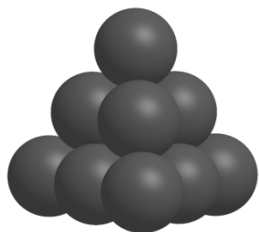
A 不满足②, B 不满足①,

C 不满足②, 因为  $f(x) = \cos 4x$  在  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  单调递减, 在  $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$  单调递增.

对于 D, 满足①, 当  $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) = \ln(1 - x)$ , 单调递减, 也满足②.

故选: D.

7. 如图所示的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解几章算术·商功》中, 后人称为“三角垛”. “三角垛”的最上层有 1 个球, 第二层有 3 个球, 第三层有 6 个球, 第一、二层的每一个球均分别与其下一层相邻的三个球相切. 现将“三角垛”放置在地面上, 若每个球的半径均为 1, 则第一层的球的表面上的点到地面的最大距离为( ).



A.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}+1$

B.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}+2$

C.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}+1$

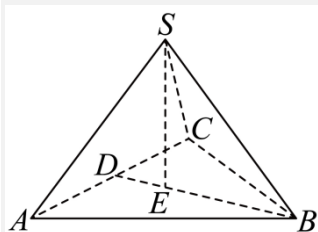
D.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}+2$

【答案】D

【知识点】正棱锥及其有关计算

【分析】连接顶层 1 个球和底层边缘 3 个球的球心，可得到一个正四面体  $S-ABC$ ，设底面  $\triangle ABC$  的中心为  $E$ ，连接  $SE$ ，得到“三角垛”的高度为  $SE+2$ ，结合正四面体的性质，即可求解.

【详解】根据题意，连接顶层 1 个球和底层边缘 3 个球的球心，可得到一个正四面体  $S-ABC$ ，该正四面体的棱长为 4，如图所示，设底面  $\triangle ABC$  的中心为  $E$ ，连接  $BE$  并延长交  $AC$  于点  $D$ ，则  $D$  为  $AC$  的中点，连接  $SE$ ，则  $SE$  为正四面体  $S-ABC$  的高，所以该“三角垛”的高度为  $SE+2$ ，由  $BD=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ ，可得  $BE=\frac{2}{3}BD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，所以  $SE=\sqrt{4^2-(\frac{4\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ，所以“三角垛”的高度为  $\frac{4\sqrt{6}}{3}+2$ . 故选：D.



8. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，点  $A, B$  分别在  $C$  的左支和右支上，且满足  $AF_1 \parallel BF_2$ ， $5|AF_1|=3|BF_2|$ ， $|BF_1|=2|AF_1|$ ，则  $C$  的离心率为 ( )

A.  $\frac{\sqrt{34}}{2}$

B.  $\sqrt{34}$

C.  $\sqrt{5}$

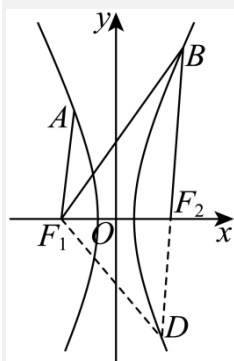
D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】A

【知识点】双曲线定义的理解、余弦定理解三角形、求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】设  $O$  为坐标原点，延长  $BF_2$  交双曲线  $C$  于点  $D$ ，连接  $DF_1$ ，根据双曲线的对称性可知  $AF_1 \parallel DF_2$ ，由双曲线的定义结合余弦定理求解。

【详解】如图，设  $O$  为坐标原点，延长  $BF_2$  交双曲线  $C$  于点  $D$ ，连接  $DF_1$ ，因为  $AF_1 \parallel BF_2$ ，点  $O$  为  $F_1F_2$  的中点，所以根据双曲线的对称性可知  $AF_1 \parallel DF_2$ ， $|AF_1| = |DF_2|$ ，（关键：双曲线的对称性的应用）。



根据  $5|AF_1| = 3|BF_2|$ ，不妨设  $|AF_1| = |DF_2| = 3t$ ，则  $|BF_2| = 5t$ ，

所以  $|BF_1| = 2a + |BF_2| = 2a + 5t$ ， $|DF_1| = 2a + |DF_2| = 2a + 3t$ ，（双曲线定义的应用）

又  $|BF_1| = 2|AF_1|$ ，所以  $2a + 5t = 2 \times 3t$ ，解得  $t = 2a$ ，因此  $|BF_1| = 12a$ ， $|BF_2| = 10a$ ，

$|DF_2| = 6a$ ， $|DF_1| = 8a$ 。在  $\triangle BF_1D$  中， $\cos \angle F_1BD = \frac{(12a)^2 + (16a)^2 - (8a)^2}{2 \times 12a \times 16a}$ ，

在  $\triangle BF_1F_2$  中， $\cos \angle F_1BF_2 = \frac{(12a)^2 + (10a)^2 - (2c)^2}{2 \times 12a \times 10a}$ ，

故  $\frac{(12a)^2 + (16a)^2 - (8a)^2}{2 \times 12a \times 16a} = \frac{(12a)^2 + (10a)^2 - (2c)^2}{2 \times 12a \times 10a}$ ，可得  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ 。

故选：A。

9. 若  $a, b \in \mathbb{R}$ ，则“ $\frac{a}{b} > 1$ ”是“ $a > b$ ”的（ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不

充分也不必要条件

【答案】D

【知识点】既不充分也不必要条件

【分析】利用不等式的性质去判断“ $\frac{a}{b} > 1$ ”与“ $a > b$ ”之间的逻辑关系即可解决.

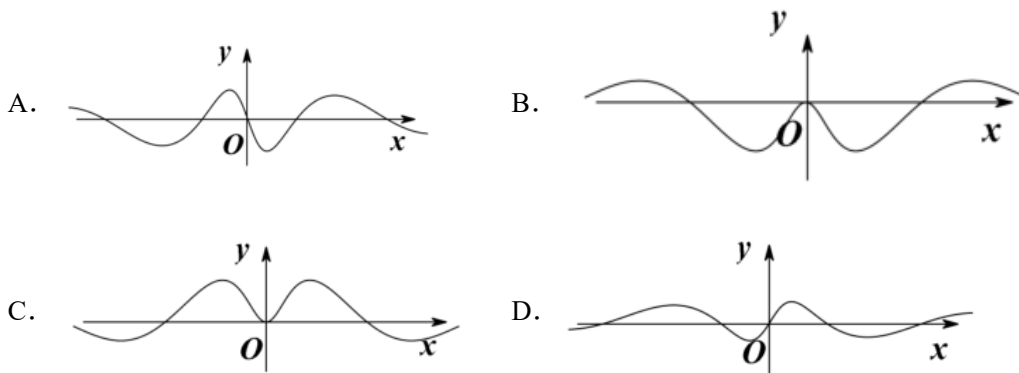
【详解】若  $\frac{a}{b} > 1$ , 当  $b > 0$  时,  $a > b$ , 当  $b < 0$  时,  $a < b$ ;

又当  $a > b > 0$  时, 两边除以  $b$ , 得  $\frac{a}{b} > 1$ , 当  $a > b$  且  $b < 0$  时, 两边除以  $b$ , 得  $\frac{a}{b} < 1$ .

故“ $\frac{a}{b} > 1$ ”是“ $a > b$ ”的既不充分也不必要条件.

故选: D

10. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \cdot \sin x$ , 则函数  $y = f(x)$  的图象大致为 ( )



【答案】C

【知识点】函数图像的识别

【解析】根据函数为偶函数和  $x \rightarrow 0$  时函数值为正, 即可得到答案.

【详解】因为  $f(x)$  定义域为  $R$ , 且  $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} \cdot \sin(-x) = f(x)$ ,

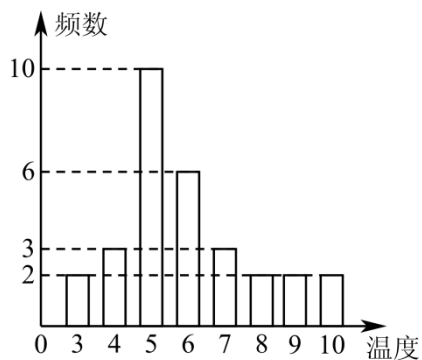
所以  $f(x)$  为偶函数, 故排除 A,D;

当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) > 0$ , 故排除 B.

故选: C

【点睛】本题考查根据函数的解析式选择对应的图象, 考查数形结合思想的应用, 求解时注意从解析式挖掘函数的性质, 并注意特殊值代入法的应用.

11. 某地气象局把当地某月(共 30 天)每一天的最低气温作了统计, 并绘制了如下图所示的统计图. 记这组数据的众数为  $M$ , 中位数为  $N$ , 平均数为  $P$ , 则 ( )



- A.  $M < N < P$     B.  $N < M < P$     C.  $P < M = N$     D.  $P < N < M$

【答案】A

【知识点】计算几个数的众数、由频率分布直方图估计平均数、由频率分布直方图估计中位数

【解析】由统计图分别求出该月温度的中位数，众数，平均数，由此能求出结果.

【详解】解：由统计图得：

该月温度的中位数为  $N = \frac{5+6}{2} = 5.5$ ,

众数为  $M = 5$ ,

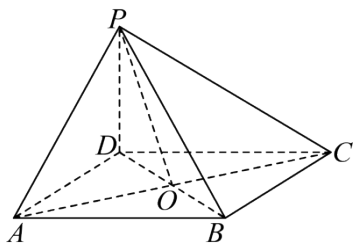
平均数为  $P = \frac{1}{30}(2 \times 3 + 3 \times 4 + 10 \times 5 + 6 \times 6 + 3 \times 7 + 2 \times 8 + 2 \times 9 + 2 \times 10) \approx 5.97$ .

$\therefore M < N < P$ .

故选：A.

12. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为菱形， $PD \perp$  底面  $ABCD$ ， $O$  为对角线  $AC$  与  $BD$  的交点，若  $PD=2$ ,  $\angle APD = \frac{\pi}{4}$ ,  $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ，则三棱锥  $P-OCD$  的外接球的体积为

( )



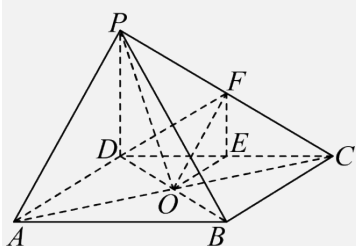
- A.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$     B.  $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$     C.  $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$     D.  $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

【答案】B

【知识点】球的体积的有关计算、多面体与球体内切外接问题

【分析】利用空间几何体及球的特征确定球心，结合球体体积公式计算即可.

【详解】



因为  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD, DC \subset$  底面  $ABCD$ , 即  $PD \perp AD, PD \perp CD$ ,

根据题意可知  $\triangle ABD$  为等边三角形,  $\triangle COD$  为直角三角形,

而  $PD=2, \angle APD = \frac{\pi}{4}, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ,

则  $PD=AD=2=DC, OD=1, OC=\sqrt{3}$ ,

取  $PC, CD$  的中点  $F, E$ , 连接  $OF, OE, FD$ , 所以  $EF \parallel PD, EF = \frac{1}{2}PD=1$ ,

易知  $OE = \frac{1}{2}CD=1, EF \perp OE, EF \perp DE$ , 则  $FP=FC=FD=FO$ ,

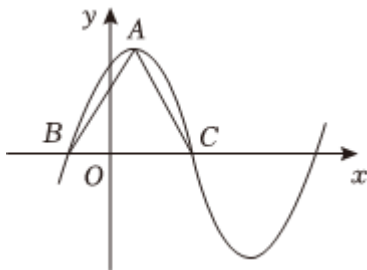
所以三棱锥  $P-OCD$  的外接球的球心为  $F$ ,

$\therefore DF=FO=\sqrt{OE^2+EF^2}=\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  该外接球的体积为  $\frac{4}{3}\pi \times (\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ .

故选: B

13. 函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的部分图象如图所示,  $A$  为图象的最高点,  $B, C$  为图象与  $x$  轴的交点, 且  $\triangle ABC$  为等边三角形. 若  $f(x_0) = \frac{4\sqrt{3}}{5}$ , 且  $x_0 \in (0, 1)$ , 则  $f\left(x_0 - \frac{1}{3}\right)$  的值为 ( )



A.  $\frac{6}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{10}$

B.  $\frac{4}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}$

C.  $\frac{6}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}$

D.  $\frac{4}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{10}$

【答案】C

【知识点】用和、差角的正弦公式化简、求值、由图象确定正（余）弦型函数解析式

【分析】由函数  $f(x)$  的部分图象知等边  $\triangle ABC$  底边上的高和边长，求出  $f(x)$  的最小正周期和  $\omega$ ，根据  $f(x_0)$  求出  $\sin\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right)$ ，利用  $x_0 \in (0,1)$ ，结合正弦函数的图象与性质，得出  $\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}$  的范围，求出  $\cos\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right)$  即可计算  $f\left(x_0 - \frac{1}{3}\right)$  的值.

【详解】由函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$  的部分图象知，等边  $\triangle ABC$  底边上的高为  $\sqrt{3}$ ，所以边长  $AB = 2$ ，

所以  $f(x)$  的最小正周期为  $T = 2AB = 4$ ，所以  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ ，

所以  $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，由  $f(x_0) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{5}$ ，得  $\sin\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5}$ ，

又  $x_0 \in (0,1)$ ，所以  $\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ ，

由  $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ ，得  $\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ ，

所以  $\cos\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$ ，

所以  $f\left(x_0 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(x_0 - \frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sqrt{3}\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right]$

$= \sqrt{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{6}\right]$

$= \sqrt{3} \times \left[\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{6}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}$ .

故选：C.

14. 已知正项数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}} + \frac{1}{3a_{n+1}} = \frac{1}{6}$ ，且  $a_1 = a_3$ ，则  $a_{10} =$  ( )

A. 27

B. 30

C. 33

D. 36

【答案】A

【知识点】由递推关系式求通项公式、等差数列通项公式的基本量计算

【分析】当  $n=1$  时, 可得  $a_2 = \frac{6+2a_1}{a_1}$ , 当  $n \geq 2$  时, 利用作差法可得到  $a_{n+1} - a_n = 3$ , 即当  $n \geq 2$  时, 数列  $\{a_n\}$  是公差为 3 的等差数列, 从而可得  $a_3 = a_2 + 3$ , 进而可得  $a_3 = \frac{6+2a_1}{a_1} + 3$ , 由  $a_1 = a_3$ , 可求解  $a_1$ ,  $a_3$  的值, 再利用等差数列的通项公式即可求解  $a_{10}$ .

【详解】当  $n=1$  时,  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{3a_2} = \frac{1}{6}$ , 可得  $a_2 = \frac{6+2a_1}{a_1}$ ,

因  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{3a_{n+1}} = \frac{1}{6}$  ①,

可知  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} + \frac{1}{3a_n} = \frac{1}{6}$  ②,

用①-②得:  $\frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{3a_{n+1}} - \frac{1}{3a_n} = 0$ ,

等式两边同乘  $3a_n a_{n+1}$ , 得到  $3 + a_n - a_{n+1} = 0$ , 即  $a_{n+1} - a_n = 3$ ,

即当  $n \geq 2$  时, 数列  $\{a_n\}$  是公差为 3 的等差数列,

所以  $a_3 = a_2 + 3$ , 又  $a_2 = \frac{6+2a_1}{a_1}$ , 所以  $a_3 = \frac{6+5a_1}{a_1}$ ,

又因为  $a_1 = a_3$ , 则  $a_1 = \frac{6}{a_1} + 5$

整理得  $a_1^2 - 5a_1 - 6 = 0$ , 即  $(a_1 - 6)(a_1 + 1) = 0$ ,

因为数列  $\{a_n\}$  是正项数列, 所以  $a_1 = 6$ ,

所以  $a_3 = 6$ , 所以  $a_{10} = a_3 + 7d = 6 + 7 \times 3 = 27$ .

故选: A

15. 下列说法中错误的是 ( )

- A. 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$
- B. 若  $X \sim N(1, 2^2)$ ,  $Y \sim N(2, 2^2)$ , 则  $P(X < 1) < P(Y < 2)$
- C.  $|r|$  越接近 1, 相关性越强
- D.  $|r|$  越接近 0, 相关性越弱

【答案】B

【知识点】相关系数的意义及辨析、指定区间的概率、特殊区间的概率

【分析】根据正态分布以及相关系数的概念直接判断即可.

【详解】对于 A，根据正态分布对称性可知， $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$ ，A 说法正确；

对于 B，根据正态分布对称性可知， $P(X < 1) = P(Y < 2) = 0.5$ ，B 说法错误；

对于 C 和 D，相关系数  $|r|$  越接近 0，相关性越弱，越接近 1，相关性越强，故 C 和 D 说法正确。

故选：B

16. 函数  $f(x) = 0.3^x - \sqrt{x}$  的零点所在区间是 ( )

A. (0, 0.3)

B. (0.3, 0.5)

C. (0.5, 1)

D. (1, 2)

【答案】B

【知识点】由幂函数的单调性比较大小、比较指数幂的大小、判断零点所在的区间

【分析】利用指数函数与幂函数的单调性结合零点存在性定理计算即可。

【详解】由指数函数、幂函数的单调性可知： $y = 0.3^x$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减， $y = \sqrt{x}$  在  $[0, +\infty)$  单调递增，

所以  $f(x) = 0.3^x - \sqrt{x}$  在定义域上单调递减，

显然  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(0.3) = 0.3^{0.3} - 0.3^{0.5} > 0$ ,  $f(0.5) = 0.3^{0.5} - 0.5^{0.5} < 0$ ,

所以根据零点存在性定理可知  $f(x)$  的零点位于  $(0.3, 0.5)$ 。

故选：B

17. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，以右焦点  $F_2$  为焦点的抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  与双曲线交于第一象限的点  $P$ ，若  $|PF_1| + |PF_2| = 3|F_1F_2|$ ，则双曲线的离心率  $e = ( )$

A. 2

B. 5

C.  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】A

【知识点】根据抛物线方程求焦点或准线、求双曲线的离心率或离心率的取值范围、抛物线定义的理解

【分析】利用抛物线与双曲线的定义与性质得出  $\begin{cases} |PF_1| = 3c + a \\ |PF_2| = 3c - a = |PA| \end{cases}$ ，根据勾股定理从而确定  $P$  的坐标，利用点在双曲线上构造齐次方程计算即可。

【详解】根据题意可设  $F_2\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ，双曲线的半焦距为  $c$ ， $P(x_0, y_0)$ ，则  $p = 2c$ ，

过  $F_1$  作  $x$  轴的垂线  $l$ ，过  $P$  作  $l$  的垂线，垂足为  $A$ ，显然直线  $AF_1$  为抛物线的准线，

则  $|PA| = |PF_2|$ ，

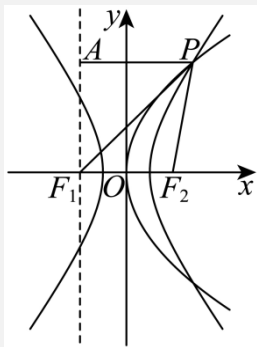
由双曲线的定义及已知条件可知  $\begin{cases} |PF_1| - |PF_2| = 2a \\ |PF_1| + |PF_2| = 6c \end{cases}$ ，则  $\begin{cases} |PF_1| = 3c + a \\ |PF_2| = 3c - a = |PA| \end{cases}$ ，

由勾股定理可知  $|AF_1|^2 = y_0^2 = |PF_1|^2 - |PA|^2 = 12ac$ ，

易知  $y_0^2 = 4cx_0$ ， $\therefore x_0 = 3a$ ，即  $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{9a^2}{a^2} - \frac{12ac}{c^2 - a^2} = 1$ ，

整理得  $2c^2 - 3ac - 2a^2 = 0 = (2c + a)(c - 2a)$ ， $\therefore c = 2a$ ，即离心率为 2.

故选：



## 二、填空题

18. 函数  $y = \sqrt{2\sin^2 x + \cos x - 1}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\{x \mid 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$

【知识点】解不含参数的一元二次不等式、已知正（余）弦求余（正）弦、解余弦不等式、求含  $\cos x$  型的函数的定义域

【分析】根据题意，由函数的解析式可得  $-2\cos^2 x + \cos x + 1 \geq 0$ ，求出  $x$  的取值范围，即可得到函数的定义域.

【详解】  $y = \sqrt{2\sin^2 x + \cos x - 1} = \sqrt{2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1} = \sqrt{-2\cos^2 x + \cos x + 1}$ ，

则  $-2\cos^2 x + \cos x + 1 \geq 0$ ，解得  $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$ ，

所以  $2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$ ，

即函数的定义域为  $\{x \mid 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$ .

故答案为:  $\{x \mid 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$

19. 已知函数  $y = \log_2(x^2 - 2ax + 8)$  在  $(1, 2)$  上单调递减, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

【答案】  $[2, 3]$

【知识点】由对数(型)的单调性求参数、已知二次函数单调区间求参数值或范围、对数型复合函数的单调性

【分析】由复合函数单调性可知,  $y = x^2 - 2ax + 8$  在  $(1, 2)$  上单调递减, 且  $x^2 - 2ax + 8 > 0$  恒成立, 再通过对称轴和函数的最值的限定, 列出不等式求解.

【详解】因为函数  $y = \log_2(x^2 - 2ax + 8)$  在  $(1, 2)$  上单调递减,  $y = \log_2 x$  在  $(0, +\infty)$  单调递增, 所以  $y = x^2 - 2ax + 8$  在  $(1, 2)$  上单调递减, 且  $x^2 - 2ax + 8 > 0$  恒成立,

即  $\begin{cases} a \geq 2 \\ 4 - 4a + 8 \geq 0 \end{cases}$ , 解得  $a \in [2, 3]$ .

故答案为:  $[2, 3]$ .

20. 一袋中装有 2 个红球, 3 个黑球, 现从中任意取出一球, 然后放回并放入 2 个与取出的球颜色相同的球, 再从袋中任意取出一球, 然后放回并再放入 2 个与取出的球颜色相同的球, 一直重复相同的操作, 则第二次取出的球是黑球的概率为\_\_\_\_; 在第一次取出的球是红球的条件下, 第 2 次和第 4 次取出的球都是黑球的概率为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{3}{5}$   $\frac{5}{21}$

【知识点】计算古典概型问题的概率、计算条件概率、利用全概率公式求概率

【分析】记  $A_i$  表示第  $i$  次取到黑球,  $i = 1, 2, 3, 4$ , 根据已知条件结合全概率公式即可求解; 根据已知条件利用样本空间法即可求解.

【详解】记  $A_i$  表示第  $i$  次取到黑球,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5};$$

$$n(\overline{A_1}A_2A_3A_4) = 2 \times 3 \times 5 \times 7, \quad n(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4) = 2 \times 3 \times 4 \times 5,$$

$$n(\overline{A_1}) = 2 \times 7 \times 9 \times 11,$$

$$P(A_2 A_4 | \overline{A_1}) = P(A_2 A_3 A_4 | \overline{A_1}) + P(A_2 \overline{A_3} A_4 | \overline{A_1})$$

$$= \frac{n(\overline{A_1} A_2 A_3 A_4)}{n(\overline{A_1})} + \frac{n(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4)}{n(\overline{A_1})}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 7 \times 9 \times 11} + \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 7 \times 9 \times 11} = \frac{5}{21}.$$

故答案为:  $\frac{3}{5}, \frac{5}{21}$ .

21. 函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ |x-1|, & x \leq 0 \end{cases}$ , 当  $f(x)-1=0$  时, 则  $x$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】e 或 0

【知识点】已知分段函数的值求参数或自变量

【分析】根据题设可得  $f(x)=1$ , 进而分  $x>0$ ,  $x \leq 0$  两种情况讨论求解即可.

【详解】由  $f(x)-1=0$ , 则  $f(x)=1$ ,

当  $x>0$  时,  $f(x)=\ln x=1$ , 即  $x=e$ ;

当  $x \leq 0$  时,  $f(x)=|x-1|=1$ , 即  $x=0$  或  $x=2$  (舍去).

综上所述,  $x=e$  或  $x=0$ .

故答案为: e 或 0.

22. 在  $(2-x)(x+1)^4$  的展开式中,  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_. (用数字作答)

【答案】8

【知识点】两个二项式乘积展开式的系数问题、求指定项的系数

【分析】先找到  $(x+1)^4$  的展开式通项为  $C_4^r x^{4-r}$ , 再由乘法分配律得展开式中  $x^2$  的系数为  $2C_4^2 - C_4^3$ , 即可得解.

【详解】 $(2-x)(x+1)^4 = 2(x+1)^4 - x(x+1)^4$ ,

因为  $(x+1)^4$  的展开式通项为  $C_4^r x^{4-r}$ ,

令  $4-r=2$  或  $4-r=1$ , 解得:  $r=2$  或  $r=3$ ,

所以  $x^2$  的系数为:  $2C_4^2 - C_4^3 = 12 - 4 = 8$ .

故答案为：8.

23. 2044 年，当同学们重返母校参加 140 周年校庆时，惊喜地发现，南院正门外真的出现了一家“南德琐艾奶茶店”，这里正出售 6 款饮品，分别为林林清风、金晓惠兰、明明如月、幽幽谭香、天天爆柠、雅韵冰酿. 甲、乙两位同学分别选购 3 款不同饮品，则甲选购的饮品中有“林林清风”的概率为\_\_\_\_\_；在甲选购了“林林清风”这款饮品的条件下，甲、乙二人所选饮品中恰有 1 款相同的概率为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{2}/0.5$   $\frac{9}{20}/0.45$

【知识点】 计算古典概型问题的概率、计算条件概率

【分析】 利用组合数，结合古典概型，并结合条件概率的定义计算即可.

【详解】 总共有 6 款饮品，甲选购 3 款不同饮品，总的选购方案数为组合数  $C_6^3 = 20$ ,

甲选购的饮品中包含“林林清风”的方案：固定“林林清风”被选中，

则甲需从剩余 5 款饮品中选购 2 款，方案数为  $C_5^2 = 10$ ，因此，概率为  $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ；

条件：甲已选购包含“林林清风”的 3 款饮品（记作集合  $S_{\text{甲}}$ ，其中必含“林林清风”），

乙独立选购 3 款不同饮品，总的选购方案数为  $C_6^3 = 20$ .

要求甲、乙所选饮品集合的交集大小恰好为 1（即恰有 1 款相同）；

设饮品全集为  $\{A, B, C, D, E, F\}$ ，其中  $A$  为“林林清风”，

不失一般性，设甲选购  $S_{\text{甲}} = \{A, B, C\}$ ，则剩余饮品为  $\{D, E, F\}$ .

乙选购时，恰有 1 款与甲相同，即乙从  $\{A, B, C\}$  中选 1 款，

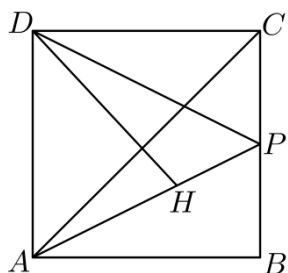
并从  $\{D, E, F\}$  中选 2 款. 从  $\{A, B, C\}$  选 1 款的方案数：  $C_3^1 = 3$ ，

从  $\{D, E, F\}$  选 2 款的方案数：  $C_3^2 = 3$ .

因此，满足条件的乙选购方案数为  $3 \times 3 = 9$ ，概率为  $\frac{9}{20}$ .

故答案为：  $\frac{1}{2}$ ；  $\frac{9}{20}$ .

24. 如图，边长为 2 的正方形  $ABCD$  中，点  $P$  满足  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ，则  $|\overrightarrow{PD}| =$ \_\_\_\_\_；若点  $H$  是线段  $AP$  上的动点，则  $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HD}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



【答案】  $\sqrt{5}$  [1, 2]

【知识点】数量积的坐标表示、利用坐标求向量的模

【分析】以  $A$  为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系，设  $P(x, y)$ ，由  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

可求出  $P$  点坐标；点  $H$  是线段  $AP$  上的动点，设  $H(2a, a)(0 \leq a \leq 1)$ ，由数量积的坐标运算结合  $a$  的范围即可求出  $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HD}$  的取值范围.

【详解】以  $A$  为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系，

则  $A(0, 0), B(2, 0), D(0, 2), C(2, 2)$ ，设  $P(x, y)$ ，

所以  $\overrightarrow{AP} = (x, y), \overrightarrow{AB} = (2, 0), \overrightarrow{AC} = (2, 2)$ ，

$$\text{由 } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \text{ 可得: } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(2+2) = 2 \\ y = \frac{1}{2}(0+2) = 1 \end{cases},$$

所以  $P(2, 1)$ ，所以  $\overrightarrow{PD} = (-2, 1)$ ，故  $|\overrightarrow{PD}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

点  $H$  是线段  $AP$  上的动点，所以  $\overrightarrow{AH} = a\overrightarrow{AP}(0 \leq a \leq 1)$ ，

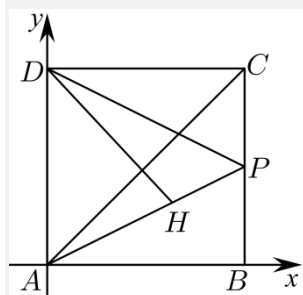
则  $H(2a, a)(0 \leq a \leq 1)$ ，

$$\overrightarrow{BP} = (0, 1), \quad \overrightarrow{HD} = (-2a, 2-a),$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HD} = 2-a, \quad \text{因为 } 0 \leq a \leq 1, \quad -1 \leq -a \leq 0,$$

所以  $1 \leq 2-a \leq 2$ . 故  $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{HD}$  的取值范围是  $[1, 2]$ .

故答案为:  $\sqrt{5}$ ;  $[1, 2]$ .



25.  $\left(x + \frac{2}{x}\right)(x-1)^5$  的展开式中  $x^3$  的系数为\_\_\_\_\_.

【答案】 -20

【知识点】 两个二项式乘积展开式的系数问题、求指定项的系数

【分析】 借助二项式的展开式的通项公式计算可得  $(x-1)^5$  的展开式中  $x^2$  项与  $x^4$  项的系数，  
则可得  $\left(x + \frac{2}{x}\right)(x-1)^5$  的展开式中  $x^3$  的系数.

【详解】 对  $(x-1)^5$  有  $T_{r+1} = C_5^r \cdot x^{5-r} \cdot (-1)^r$ ,

则  $(x-1)^5$  展开式中  $x^2$  项的系数为  $C_5^3 \cdot (-1)^3 = -10$ ,

展开式中  $x^4$  项的系数为  $C_5^1 \cdot (-1) = -5$ ,

则展开式中  $x^3$  的系数为  $1 \times (-10) + 2 \times (-5) = -20$ .

故答案为: -20.

26. 小桐操场跑圈, 一周 2 次, 一次 5 圈或 6 圈. 第一次跑 5 圈或 6 圈的概率均为 0.5, 若第一次跑 5 圈, 则第二次跑 5 圈的概率为 0.4, 6 圈的概率为 0.6; 若第一次跑 6 圈, 则第二次跑 5 圈的概率为 0.6, 6 圈的概率为 0.4. 小桐一周跑 11 圈的概率为\_\_\_\_\_; 若一周至少跑 11 圈为运动量达标, 则连续跑 4 周, 记合格周数为  $X$ , 则期望  $E(X) =$ \_\_\_\_\_

【答案】 0.6 3.2

【知识点】 二项分布的均值、计算条件概率、利用全概率公式求概率

【分析】 先根据全概率公式计算求解空一, 再求出概率根据二项分布数学期望公式计算求解.

【详解】 设小桐一周跑 11 圈为事件  $A$ , 设第一次跑 5 圈为事件  $B$ , 设第二次跑 5 圈为事件  $C$ ,

则  $P(A) = P(B)P(\bar{C}|B) + P(\bar{B})P(C|\bar{B}) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.6 = 0.6$ ;

设运动量达标为事件  $D$ ,  $P(D) = P(A) + P(\bar{B})P(\bar{C}|\bar{B}) = 0.6 + 0.5 \times 0.4 = 0.8$ ,

所以  $X \sim B(4, 0.8)$ ,  $E(X) = 4 \times 0.8 = 3.2$ ;

故答案为: 0.6; 3.2

27.  $\triangle ABC$  中,  $D$  为  $AB$  边中点,  $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ , 则  $\overrightarrow{AE} =$ \_\_\_\_\_ (用  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  表

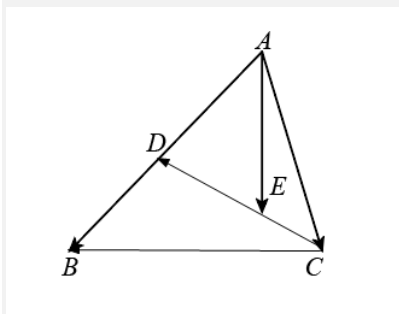
示), 若  $|\overrightarrow{AE}| = 5$ ,  $AE \perp CB$ , 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} =$ \_\_\_\_\_

【答案】  $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ ;  $-15$

【知识点】向量减法的法则、用基底表示向量、数量积的运算律

【分析】根据向量的线性运算求解即可空一，应用数量积运算律计算求解空二.

【详解】如图，



因为  $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ ，所以  $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$ ，所以  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$  .

因为  $D$  为线段  $AB$  的中点，所以  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$  ;

又因为  $|\overrightarrow{AE}| = 5, AE \perp CB$ ，所以  $\overrightarrow{AE}^2 = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)^2 = \frac{1}{36}\vec{a}^2 + \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b}^2 = 25$  ,

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{6}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b}^2 = 0$  , 所以  $\vec{a}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\vec{b}^2$

所以  $\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 180$  ,

所以  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{12}\vec{a}^2 + \frac{1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b}^2 = \frac{1}{12}(\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\vec{b}^2)$

$= \frac{1}{12}(\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{12}(-\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}) = -15$  .

故答案为:  $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ ;  $-15$  .

### 三、解答题

28. 在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  对应的边分别是  $a, b, c$ ，且  $b \cos C + c \cos B = 2a \cos A$  .

(1)若  $a = 2, b + c = \sqrt{13}$ ，求  $\triangle ABC$  的面积；

(2)若  $\triangle ABC$  为锐角三角形，求  $\sin B + \sin C$  的取值范围.

【答案】(1)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(2)  $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$

【知识点】三角恒等变换的化简问题、三角形面积公式及其应用、正弦定理边角互化的应用、

求含  $\sin x$ (型)函数的值域和最值

【分析】(1) 根据正弦定理边化角可得  $\sin A = 2 \sin A \cos A$ ，求出  $A = \frac{\pi}{3}$ ，再由余弦定理  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ，结合  $a = 2, b + c = \sqrt{13}$ ，求出  $bc = 3$ ，再根据三角形面积公式求解即可；

(2) 由三角形内角和为  $\pi$ ，结合  $A = \frac{\pi}{3}$ ，化简可得  $\sin B + \sin C = \sqrt{3} \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)$ ，再由锐角三角形求出  $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$ ，然后求解即可。

【详解】(1) 由正弦定理可得  $\sin B \cos C + \sin C \cos B = 2 \sin A \cos A$ ，即  $\sin A = 2 \sin A \cos A$ ，因为  $0 < A < \pi$ ，所以  $\sin A \neq 0$ ，所以  $\cos A = \frac{1}{2}$ ，则  $A = \frac{\pi}{3}$ ，

由余弦定理知  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2 - 2bc}{2bc}$ ，代入数据得  $\frac{1}{2} = \frac{13 - 4 - 2bc}{2bc}$ ，解得

$bc = 3$ ，

所以  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，所以  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 。

(2)  $\sin B + \sin C = \sin B + \sin(A + B) = \sin B + \sin A \cos B + \sin B \cos A$ ，

因为  $A = \frac{\pi}{3}$ ，所以  $\sin B + \sin C = \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B = \frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = \sqrt{3} \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

因为  $\triangle ABC$  为锐角三角形，所以  $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，所以  $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$ ，

所以  $\frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$ ，所以  $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ ，所以  $\frac{3}{2} < \sin B + \sin C \leq \sqrt{3}$ ，

所以  $\sin B + \sin C$  的取值范围为  $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$ 。

29. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，直线  $x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{2} = 0$  经过椭圆  $E$  的左顶点  $A$  和下顶点  $B$ 。

(1) 求椭圆  $E$  的方程和离心率；

(2) 设过点  $G(0, s) (s > 0)$  且斜率不为 0 的直线交椭圆  $E$  于  $C, D$  两点，直线  $BC, BD$  与直线  $y = t$  的交点分别为  $P, Q$ ，线段  $CD, PQ$  的中点分别为  $M, N$ 。若直线  $MN$  经过坐标原点，求  $s + t$  的取值范围。

【答案】(1)  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 离心率  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)  $[4, +\infty)$

【知识点】求椭圆的离心率或离心率的取值范围、根据  $a$ 、 $b$ 、 $c$  求椭圆标准方程、根据直线与椭圆的位置关系求参数或范围

【分析】(1) 由直线方程确定  $a, b$ , 进而可求解;

(2) 设  $CD$  方程为  $y = kx + s (k \neq 0)$ , 点  $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ , 联立椭圆方程, 结合韦达定理得到  $N$  的坐标为  $(-2kt, t)$ , 再由直线  $BC: y = \frac{y_1+2}{x_1} \cdot x - 2$ , 直线  $BD: y = \frac{y_2+2}{x_2} \cdot x - 2$ . 得点  $P\left(\frac{(t+2)x_1}{y_1+2}, t\right), Q\left(\frac{(t+2)x_2}{y_2+2}, t\right)$ . 再由线段  $PQ$  的中点为  $N$ , 得  $\frac{(t+2)x_1}{y_1+2} + \frac{(t+2)x_2}{y_2+2} = -4kt$ , 化简得到  $st = 4$ , 进而可求解.

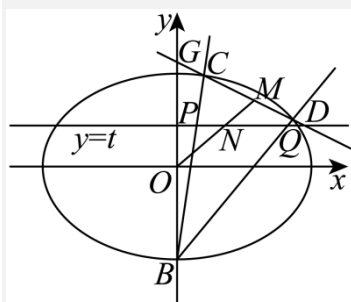
【详解】(1) 因为直线  $x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{2} = 0$  与坐标轴交点为  $A(-2\sqrt{2}, 0)$  和  $B(0, -2)$ ,

所以  $a = 2\sqrt{2}, b = 2$ .

由  $a^2 = b^2 + c^2$ , 解得  $c = 2$ ,

所以椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(2)



由题意, 直线  $CD$  的斜率存在, 故设其方程为  $y = kx + s (k \neq 0)$ ,

设点  $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + s, \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (2k^2 + 1)x^2 + 4ksx + 2s^2 - 8 = 0,$$

$$\text{所以 } \Delta = 16k^2s^2 - 4(2k^2 + 1)(2s^2 - 8) > 0, x_1 + x_2 = \frac{-4ks}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2s^2 - 8}{2k^2 + 1}.$$

所以点  $M$  的横坐标  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2ks}{2k^2 + 1}$ , 纵坐标  $y_M = kx_M + s = \frac{s}{2k^2 + 1}$ .

结合直线  $MN$  过坐标原点, 可得直线  $MN$  的方程为  $x + 2ky = 0$ .

令  $y = t$ , 得点  $N$  的坐标为  $(-2kt, t)$ .

当  $s \neq 2$  时, 显然点  $C, D$  不在  $y$  轴上.

则直线  $BC$ :  $y = \frac{y_1 + 2}{x_1} \cdot x - 2$ , 直线  $BD$ :  $y = \frac{y_2 + 2}{x_2} \cdot x - 2$ .

令  $y = t$ , 得点  $P\left(\frac{(t+2)x_1}{y_1 + 2}, t\right), Q\left(\frac{(t+2)x_2}{y_2 + 2}, t\right)$ .

由线段  $PQ$  的中点为  $N$ , 得  $\frac{(t+2)x_1}{y_1 + 2} + \frac{(t+2)x_2}{y_2 + 2} = -4kt$ ,

整理, 得  $(4k^3t + 2kt + 4k)x_1x_2 + (4k^2t + t + 2)(s+2)(x_1 + x_2) + 4kt(s+2)^2 = 0$ ,

即  $(4k^3t + 2kt + 4k) \cdot \frac{2s^2 - 8}{2k^2 + 1} + (4k^2t + t + 2)(s+2) \cdot \frac{-4ks}{2k^2 + 1} + 4kt(s+2)^2 = 0$ ,

化简, 得  $k(s+2)(st-4) = 0$ .

由  $k \neq 0, s > 0$ , 得  $st = 4$ .

当  $s = 2$  时, 由题意, 点  $C, D$  中有一个与点  $G$  重合 (不妨设点  $D$  与点  $G$  重合),

处  $O$  为  $BD$  中点, 且  $O(0, t)$ ,

在  $\triangle BCD$  中,  $OM \parallel BC$ , 则直线  $BC$  的方程为  $y = -\frac{1}{2k}x - 2$ ,

由  $FQ$  的中点为  $N$ , 则  $-k(t+2) = -2kt$ , 即  $t = 2$ , 故  $st = 4$ ,

所以  $s + t \geq 2\sqrt{st} = 4$ , 当且仅当  $s = t = 2$  时等号成立.

综上,  $s + t$  的取值范围为  $[4, +\infty)$ .

30. 已知  $A(2, 1)$  是椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上的一点, 且  $E$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 斜率存在

且不过点  $A$  的直线  $l$  与  $E$  相交于  $P, Q$  两点, 直线  $AP$  与直线  $AQ$  的斜率之积为  $\frac{1}{4}$

(1) 求  $E$  的方程.

(2) 证明:  $l$  的斜率为定值.

(3) 设  $O$  为坐标原点, 若  $l$  与线段  $OA$  (不含端点) 相交, 且四边形  $OPAQ$  的面积为  $2\sqrt{3}$ , 求  $l$  的方程.

【答案】(1)  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 证明见解析

(3)  $y = -\frac{1}{2}x + 1$

【知识点】根据 a、b、c 求椭圆标准方程、椭圆中的定值问题、椭圆中三角形（四边形）的面积

【分析】(1) 将点 A(2,1) 的坐标代入椭圆方程，并与离心率联立求出 a, b, c;

(2) 设直线 l 的方程，与椭圆方程联立，运用韦达定理，再根据条件即可证明.

(3) 利用 (2) 中直曲联立的结果，结合弦长公式求出 |PQ|，再利用点到直线距离求出四边形面积，得到方程，求解方程即可.

【详解】(1) 由题可知 
$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2 = 8, b^2 = 2,$$

故 E 的方程为  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

(2) 设 l 的方程为  $y = kx + m$ ,  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ ,  $x_1 \neq 2, x_2 \neq 2$ .

联立方程组 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$$

整理得  $(4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 8 = 0$ ,

$\Delta = 64k^2m^2 - (16k^2 + 4)(4m^2 - 8) = 128k^2 - 16m^2 + 32 > 0$

即  $m^2 < 8k^2 + 2$ , 则  $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}$ ,  $x_1x_2 = \frac{4m^2 - 8}{4k^2 + 1}$ ,

$k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{(kx_1 + m - 1)(kx_2 + m - 1)}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4}$

$$= \frac{k^2x_1x_2 + k(m-1)(x_1+x_2) + (m-1)^2}{x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4}$$

$$= \frac{k^2(4m^2 - 8) - 8k^2m(m-1) + (4k^2 + 1)(m^2 - 2m + 1)}{4m^2 - 8 + 16km + 16k^2 + 4}$$

$$= \frac{m^2 - 2m - 4k^2 + 1}{4m^2 + 16km + 16k^2 - 4} = \frac{1}{4},$$

整理得  $(2k+1)(m+2k-1)=0$ ，则  $k=-\frac{1}{2}$  或  $m+2k-1=0$ ，

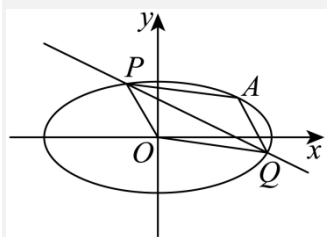
若  $m+2k-1=0$ ，则  $y=kx+1-2k$ ，则  $l$  过点  $A$ ，不符合题意，

故  $k=-\frac{1}{2}$ ，即  $l$  的斜率为定值.

(3) 由 (2) 可得直线  $l: \frac{1}{2}x + y - m = 0$ ， $x_1 + x_2 = 2m$ ， $x_1x_2 = 2m^2 - 4$ ，

因为  $l$  与线段  $OA$  (不含端点) 相交，所以  $0 < m < 2$ ，

$$|PQ| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{20-5m^2},$$



$$\text{点 } O \text{ 到 } l \text{ 的距离 } d_1 = \frac{|-m|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}} = \frac{2m}{\sqrt{5}},$$

$$\text{点 } A \text{ 到 } l \text{ 的距离 } d_2 = \frac{|1+1-m|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}} = \frac{4-2m}{\sqrt{5}},$$

$$\text{四边形 } OPAQ \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |PQ| (d_1 + d_2) = 2\sqrt{4-m^2} = 2\sqrt{3},$$

解得  $m=1$  或  $m=-1$  (舍去)，

故  $l$  的方程为:  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ .

【点睛】方法点睛：解答直线与圆锥曲线的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去  $x$  (或  $y$ )，

建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件，

建立有关参变量的等量关系，涉及到直线方程的设法时，务必考虑全面，

不要忽略直线斜率为 0 或不存在等特殊情形，

强化有关直线与圆锥曲线联立得出一元二次方程后的运算能力，

重视根与系数之间的关系，解决弦长、斜率、三角形的面积等问题.

31. 已知等差数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$  满足:  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $b_n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_2 + a_8 = 18$ ,  $b_2 b_4 = 81$

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)求数列 $\left\{\frac{n^2}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ ;

(3)已知 $c_n = \frac{a_n}{3b_n}$ , 数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ , 若对任意正整数 $n$ , 不等式 $1-T_n < \frac{\lambda}{2^n}$ 恒成立, 求实数 $\lambda$ 的取值范围.

【答案】(1) $a_n = 2n-1; b_n = 3^{n-1}$

(2) $\frac{n^2+n}{4n+2}$

(3) $\lambda \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

【知识点】等比数列通项公式的基本量计算、裂项相消法求和、错位相减法求和、等差数列通项公式的基本量计算

【分析】(1) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q$ 即可求解;

(2) 令 $d_n = \frac{n^2}{a_n a_{n+1}} = \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$ , 利用裂项相消法即可求解;

(3) 利用错位相减法先求 $T_n$ , 由 $1-T_n < \frac{\lambda}{2^n}$ 有 $\lambda > (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n$ , 令 $e_n = (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n$ , 研究数列 $\{e_n\}$ 的单调性即可求解.

【详解】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ , 数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q$ , 则有

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 + a_8 = 2a_1 + 8d = 18 \end{cases} \Rightarrow d = 2,$$

所以 $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ ,

所以 $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 b_4 = q^4 = 81 \end{cases} \Rightarrow q = \pm 3$ , 又 $b_n \in \mathbf{N}^*$ , 所以 $q = 3$ ,

所以 $b_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$ ,

所以 $a_n = 2n-1; b_n = 3^{n-1}$ ;

$$(2) \text{ 令 } d_n = \frac{n^2}{a_n a_{n+1}} = \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n^2}{4n^2-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_n &= d_1 + d_2 + \cdots + d_n = \frac{1}{4}n + \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{4}n + \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n^2 + n}{4n+2}; \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 由已知有 } c_n = \frac{a_n}{3b_n} = \frac{2n-1}{3^n} = (2n-1) \frac{1}{3^n},$$

$$\text{所以 } T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3^2} + 5 \times \frac{1}{3^3} + \cdots + (2n-1) \frac{1}{3^n} \text{ ①},$$

$$\frac{1}{3} T_n = 1 \times \frac{1}{3^2} + 3 \times \frac{1}{3^3} + \cdots + (2n-1) \times \frac{1}{3^{n+1}} \text{ ②},$$

所以①-②有:

$$\frac{2}{3} T_n = \frac{1}{3} + 2 \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right) - (2n-1) \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{\frac{1}{3^2} \left( 1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{3}} - (2n-1) \times \frac{1}{3^{n+1}}, \text{ 解得}$$

$$T_n = 1 - (n+1) \times \frac{1}{3^n},$$

$$\text{由 } 1 - T_n < \frac{\lambda}{2^n} \text{ 有 } 1 - T_n = (n+1) \times \frac{1}{3^n} < \frac{\lambda}{2^n}, \text{ 即 } \lambda > (n+1) \left( \frac{2}{3} \right)^n, \text{ 令 } e_n = (n+1) \left( \frac{2}{3} \right)^n,$$

$$\text{所以 } e_n - e_{n-1} = (n+1) \left( \frac{2}{3} \right)^n - n \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} = \frac{(2-n) \times 2^{n-1}}{3^n},$$

所以当  $n > 2$  时,  $e_n - e_{n-1} < 0$ , 即  $e_n < e_{n-1}$ , 所以当  $n > 2$  时, 数列  $\{e_n\}$  单调递减, 又

$$e_1 = e_2 = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } \lambda > \frac{4}{3},$$

$$\text{所以 } \lambda \in \left( \frac{4}{3}, +\infty \right).$$

32. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $a_4 - a_2 = 12$ ,  $S_4 + 2S_2 = 3S_3$ , 数列  $\{b_n\}$  满足

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1), \quad n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 求数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式;

$$(2) \text{ 设 } c_n = \begin{cases} \frac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, \quad T_n \text{ 为 } \{c_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和, 求 } T_{2n}.$$

【答案】(1)  $a_n = 2^n$ ,  $b_n = n^2$

$$(2) T_{2n} = \frac{16}{9} - \frac{6n+8}{9 \times 2^{2n-1}} + \frac{n}{2n+1}$$

【知识点】求等比数列前  $n$  项和、利用  $a_n$  与  $s_n$  关系求通项或项、错位相减法求和、写出等比数列的通项公式

【分析】(1) 由题意可得  $q=2$ ，即可求出  $a_n=2^n$ ，再根据  $nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$  两边同除以  $n(n+1)$ ，可得  $\frac{b_{n+1}}{n+1}-\frac{b_n}{n}=1$ ，即可求出  $b_n=n^2$ 。

(2) 根据分组求和、裂项求和及错位相减法，即可求出答案。

【详解】(1)  $\because S_4+2S_2=3S_3$ ， $\therefore S_4-S_3=2(S_3-S_2)$ ，

$$\therefore a_4=2a_3, \therefore q=2,$$

$$\text{又 } a_4-a_2=12, \therefore a_1q^3-a_1q=12,$$

$$\therefore a_1=2, \therefore a_n=2 \cdot 2^{n-1}=2^n,$$

由  $nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$  两边同除以  $n(n+1)$ ，

$$\text{得 } \frac{b_{n+1}}{n+1}-\frac{b_n}{n}=1,$$

从而数列  $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$  为首项  $b_1=1$ ，公差  $d=1$  的等差数列，

$$\therefore \frac{b_n}{n}=n,$$

从而数列  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n=n^2$ 。

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } c_n = \begin{cases} \frac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} \frac{1}{n(n+2)}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{2^{n-1}}, n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

$$\therefore T_{2n} = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{2n} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left( \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^3} + \frac{6}{2^5} + \cdots + \frac{2n}{2^{2n-1}} \right)$$

$$= \frac{n}{2n+1} + \left( \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^3} + \frac{6}{2^5} + \cdots + \frac{2n}{2^{2n-1}} \right),$$

$$\text{设 } A = \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^3} + \frac{6}{2^5} + \cdots + \frac{2n}{2^{2n-1}},$$

$$\text{则 } \frac{1}{4}A = \frac{2}{2^3} + \frac{4}{2^5} + \frac{6}{2^7} + \cdots + \frac{2n}{2^{2n+1}},$$

两式相减得  $\frac{3}{4}A = 1 + 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) - \frac{2n}{2^{2n+1}}$ ,

整理得  $A = \frac{16}{9} - \frac{6n+8}{9 \times 2^{2n-1}}$ ,

$\therefore T_{2n} = \frac{16}{9} - \frac{6n+8}{9 \times 2^{2n-1}} + \frac{n}{2n+1}$ .