

椭圆弦长面积问题

一、解答题

1. 已知椭圆 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长为 2.

(1) 求椭圆 L 的标准方程;

(2) 过点 $Q(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 L 交于 A 、 B 两点, 若以 AB 为直径的圆恰好过坐标原点, 求直线 l 的方程.

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, A, B 分别为椭圆的左、右顶点, C 为椭圆的上顶点, 且 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -4$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若直线 $l: x = my + 3$ 交椭圆于 M, N 两点, 直线 AM 的斜率为 k_1 , 直线 BN 的斜率为 k_2 , 求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值.

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 l 过椭圆的右焦点 F_2 分别交椭圆于 A, B 两点, $\triangle ABF_1$ 周长为 $4\sqrt{2}$

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若弦 AB 长为 $\frac{8\sqrt{2}}{7}$, 求直线 l 的方程.

(3) 是否存在 l 使 AB 为直径的圆过 F_1 , 若存在求出直线方程, 若不存在, 说明理由.

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的长轴长为 4, 焦距为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程和离心率;

(2) 设 A 为椭圆 C 的右顶点, 若直线 l 与椭圆 C 有唯一的公共点 M (M 在第一象限), 直线 l 与 y 轴的正半轴交于点 N , 直线 NA 与直线 OM 交于点 P (O 为原点), 且 $S_{\triangle POA} = \frac{3}{5} S_{\triangle NOA}$, 求直线 l 的方程.

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 其短轴的一个端点到右焦点 F 的距离为 2, 且点

$A\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设过点 $R(4,0)$ 的一条直线与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 求 $\triangle FPQ$ 面积的最大值.