

椭圆弦长面积问题

一、解答题

1. 已知椭圆 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长为 2.

(1) 求椭圆 L 的标准方程;

(2) 过点 $Q(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 L 交于 A 、 B 两点, 若以 AB 为直径的圆恰好过坐标原点, 求直线 l 的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $y = \pm 2x + 2$

【知识点】根据离心率求椭圆的标准方程、根据直线与椭圆的位置关系求参数或范围、根据 a 、 b 、 c 求椭圆标准方程

【分析】(1) 根据已知条件求得 b 和 a^2 , 从而求得椭圆 L 的标准方程.

(2) 以 AB 为直径的圆恰好过坐标原点, 即 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 设出直线 l 的方程与椭圆方程联立, 整理成关于 x 的二次方程, 结合韦达定理, 计算 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 得出直线的斜率, 从而求得直线 l 的方程.

【详解】(1) 由 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$ 得 $a^2 = 4b^2$,

又 $\because$ 短轴长为 2, 可得 $b = 1$, $\therefore a^2 = 4$,

$\therefore$ 椭圆 L 的标准方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 易知直线 l 的斜率存在且不为零, 设直线 l 的斜率为 k ($k \neq 0$),

设直线 l 的方程为: $y = kx + 2$, 则联立 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$,

消元得: $(4k^2 + 1)x^2 + 16kx + 12 = 0$,

$\Delta = 16 \times 16k^2 - 48(4k^2 + 1) = 16(4k^2 - 3) > 0$, 即 $k^2 > \frac{3}{4}$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-16k}{4k^2 + 1}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{12}{4k^2 + 1}$,

由题意可知 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 即:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = (1+k^2)x_1 \cdot x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4 = 0,$$

$$\therefore \frac{12(1+k^2)}{1+4k^2} - \frac{32k^2}{1+4k^2} + 4 = 0, \text{ 解得 } k^2 = 4 > \frac{3}{4},$$

$\therefore k = \pm 2$, 所以直线 l 的方程为: $y = \pm 2x + 2$.

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, A, B 分别为椭圆的左、右顶点, C 为椭圆的上顶点, 且 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -4$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若直线 $l: x = my + 3$ 交椭圆于 M, N 两点, 直线 AM 的斜率为 k_1 , 直线 BN 的斜率为 k_2 , 求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

(2) $\frac{1}{7}$

【知识点】根据离心率求椭圆的标准方程、椭圆中的定值问题、根据 a 、 b 、 c 求椭圆标准方程、根据韦达定理求参数

【分析】(1) 根据数量积公式, 可得 a^2, b^2 关系, 根据离心率, 可得 a^2, b^2 的关系, 联立求解, 即可得答案.

(2) 将直线与椭圆联立, 结合韦达定理, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 可得 $y_1 + y_2, y_1 y_2$ 表达式, 由题意得 $\frac{k_1}{k_2}$ 的表达式, 化简整理, 即可得答案.

【详解】(1) 由题意 $A(-a, 0), B(a, 0), C(0, b)$, 所以 $\overrightarrow{CA} = (-a, -b), \overrightarrow{CB} = (a, -b)$,

因为 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -4$, 所以 $-a^2 + b^2 = -4$,

又离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{2}$, 解得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$,

联立解得 $a^2 = 16, b^2 = 12$,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

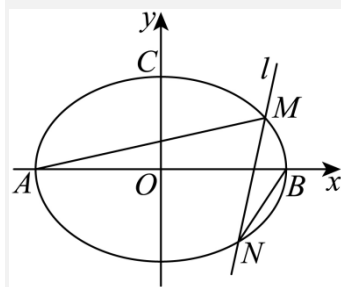
(2) 将直线与椭圆联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ x = my + 3 \end{cases}$, 得 $(3m^2 + 4)y^2 + 18my - 21 = 0$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-18m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-21}{3m^2 + 4}$,

又 $A(-4, 0), B(4, 0)$, 所以 $k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 4}, k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 4}$,

$$\text{所以 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{y_1(x_2 - 4)}{y_2(x_1 + 4)} = \frac{y_1(my_2 - 1)}{y_2(my_1 + 7)} = \frac{my_1 y_2 - y_1}{my_1 y_2 + 7y_2} = \frac{\frac{-21m}{3m^2 + 4} - \left(\frac{-18m}{3m^2 + 4} - y_2\right)}{\frac{-21m}{3m^2 + 4} + 7y_2}$$

$$= \frac{\frac{-3m}{3m^2 + 4} + y_2}{7\left(\frac{-3m}{3m^2 + 4} + y_2\right)} = \frac{1}{7}.$$



3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 l 过椭圆的右焦点 F_2 分别交椭圆于 A, B 两点, $\triangle ABF_1$ 周长为 $4\sqrt{2}$

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若弦 AB 长为 $\frac{8\sqrt{2}}{7}$, 求直线 l 的方程.

(3) 是否存在 l 使 AB 为直径的圆过 F_1 , 若存在求出直线方程, 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2) $y = \sqrt{3}(x-1)$ 或 $y = -\sqrt{3}(x-1)$;

(3) 存在, 直线方程为 $y = \frac{\sqrt{7}}{7}(x-1)$ 或 $y = -\frac{\sqrt{7}}{7}(x-1)$.

【知识点】根据 a, b, c 求椭圆标准方程、椭圆中存在定点满足某条件问题、求椭圆中的弦长

【分析】(1) 根据椭圆性质和三角形周长解出 a , 进而确定 c, b 求椭圆方程;

(2) 假设直线 l 得方程并和椭圆联立, 根据韦达定理和弦长公式求解;

(3) 由以 AB 为直径的圆过 F_1 , 得 $\overrightarrow{F_1 A} \cdot \overrightarrow{F_1 B} = 0$, 再根据韦达定理结果解方程求 k .

【详解】(1) 由题知椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\triangle ABF_1$ 周长为 $4\sqrt{2}$,

则 $(|BF_1| + |BF_2|) + (|AF_1| + |AF_2|) = 4a = 4\sqrt{2}$ ，所以 $a = \sqrt{2}$ ，即得 $c = 1$

因为 $a^2 = b^2 + c^2$ ，所以 $b^2 = a^2 - c^2 = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1$ ，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(2) 椭圆右焦点为 $F_2(1, 0)$ ，当直线斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x = 1$ ，

假设交点 A 位于第一象限，则 $A\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，此时弦长 $|AB| = \sqrt{2} \neq \frac{8\sqrt{2}}{7}$ ，

故直线斜率存在，设直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

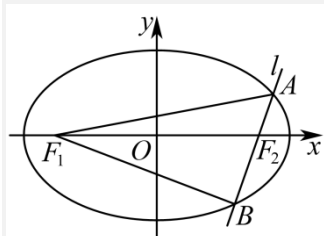
联立直线 l 和椭圆方程可得 $\begin{cases} y = k(x - 1) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$ ，消去 y 得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$ ，

由韦达定理可得 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}$ ， $x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2}$ ，

由弦长公式可知 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{\left(\frac{4k^2}{1 + 2k^2}\right)^2 - 4\left(\frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2}\right)} = \frac{8\sqrt{2}}{7}$ ，

整理得 $|AB| = \frac{2\sqrt{2}(1 + k^2)}{1 + 2k^2} = \frac{8\sqrt{2}}{7}$ ，解得 $k = \pm\sqrt{3}$ ；

所以直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}(x - 1)$ 或 $y = -\sqrt{3}(x - 1)$ 。



(3) 由以 AB 为直径的圆过 $F_1(-1, 0)$ ，可知 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = 0$ ，即 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) + y_1y_2 = 0$ ①，

又由 (2) 知当直线斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x = 1$ ，

假设交点 A 位于第一象限，则 $A\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，则 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = \frac{7}{2} \neq 0$ ，故直线 l 的斜率存在，

在，

设直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$ ，则 $y_1 = k(x_1 - 1)$ ②， $y_2 = k(x_2 - 1)$ ③，

联立 ①②③ 可得 $(1 - k^2)(x_1 + x_2) + (1 + k^2)x_1x_2 + 1 + k^2 = 0$ ，

$$\text{因为 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2k^2-2}{1+2k^2},$$

$$\text{所以 } (1-k^2)\left(\frac{4k^2}{1+2k^2}\right) + (1+k^2)\left(\frac{2k^2-2}{1+2k^2}\right) + 1+k^2 = 0, \text{ 解得 } 7k^2 = 1, \text{ 即 } k = \pm \frac{\sqrt{7}}{7},$$

$$\text{故直线 } l \text{ 存在, 直线方程为 } y = \frac{\sqrt{7}}{7}(x-1) \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{7}}{7}(x-1).$$

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, 焦距为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程和离心率;

(2) 设 A 为椭圆 C 的右顶点, 若直线 l 与椭圆 C 有唯一的公共点 M (M 在第一象限), 直线 l 与 y 轴的正半轴交于点 N , 直线 NA 与直线 OM 交于点 P (O 为原点), 且 $S_{\triangle POA} = \frac{3}{5} S_{\triangle NOA}$, 求直线 l 的方程.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1; \frac{1}{2}$

(2) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

【知识点】椭圆中三角形（四边形）的面积、根据 a 、 b 、 c 求椭圆标准方程、求椭圆的离心率或离心率的取值范围

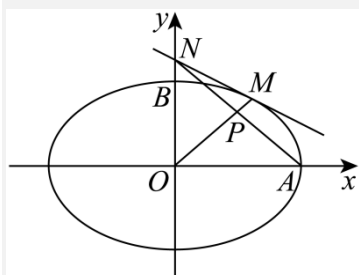
【分析】(1) 依题意可得 a 、 c 的值, 从而求出 b , 即可得到椭圆方程与离心率;

(2) 根据截距式设得直线 NA 的方程为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{n} = 1$, 联立直线 l 与椭圆方程 C , 根据相切判别式 $\Delta = 0$ 得, $4k^2 + 3 = n^2$, 再联立直线 OM 与 NA 的方程得 P 坐标, 即可根据面积比例关系求解.

【详解】(1) 依题意可得 $\begin{cases} 2a = 4 \\ 2c = 2 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases}$, 则 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$;

(2) 如图所示:



由题可知, 直线 l 的斜率存在且为负数, 设直线 $l: y = kx + n (k < 0, n > 0)$.

则有 $N(0, n)$, $A(2, 0)$, 所以直线 NA 的方程为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{n} = 1$,

将 $y = kx + n$ 与椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立, 消去 y 并整理得, $(4k^2 + 3)x^2 + 8knx + 4n^2 - 12 = 0$,

由题意直线 l 与椭圆相切于点 M , 则 $\Delta = 64k^2n^2 - 4(4k^2 + 3)(4n^2 - 12) = 48(4k^2 + 3 - n^2) = 0$,

即 $4k^2 + 3 = n^2$, 所以

$x_M = \frac{-8kn}{2(4k^2 + 3)} = \frac{-4kn}{(4k^2 + 3)} = \frac{-4kn}{n^2} = \frac{-4k}{n}$, $y_M = kx_M + n = \frac{-4k^2}{n} + n = \frac{n^2 - 4k^2}{n} = \frac{3}{n}$, 即点 M 的坐标为 $(\frac{-4k}{n}, \frac{3}{n})$,

所以直线 OM 的方程为 $y = -\frac{3}{4k}x$, 将其与直线 NA 的方程 $\frac{x}{2} + \frac{y}{n} = 1$ 联立, 解得 $x_P = \frac{4kn}{2kn - 3}$,

$y_P = \frac{-3n}{2kn - 3}$, 即点 P 的坐标为 $(\frac{4kn}{2kn - 3}, \frac{-3n}{2kn - 3})$, 由题意得 $\frac{S_{\triangle POA}}{S_{\triangle NOA}} = \frac{\frac{1}{2}y_P \cdot |OA|}{\frac{1}{2}y_N \cdot |OA|} = \frac{-3}{2kn - 3} = \frac{3}{5}$,

整理得 $kn = -1$. 又 $4k^2 + 3 = n^2$, 且 $k < 0, n > 0$, 解得 $k = -\frac{1}{2}$, $n = 2$, 即满足题意的直线 l 的

方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其短轴的一个端点到右焦点 F 的距离为 2, 且点

$A(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设过点 $R(4, 0)$ 的一条直线与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 求 $\triangle FPQ$ 面积的最大值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【知识点】由导数求函数的最值 (不含参)、求椭圆中的最值问题、根据椭圆过的点求标准方程、椭圆中三角形 (四边形) 的面积

【分析】(1) 根据椭圆的性质, 先得到 a 的值, 再根据椭圆上的点可求 b , 得到椭圆的标准方程.

(2) 方法 1: 设直线 PQ 方程: $x = my + 4$, 与椭圆方程联立, 消去 x , 利用韦达定理, 表示出 $|y_1 - y_2|$, 进而表示出 $\triangle FPQ$ 的面积, 利用基本不等式求三角形面积的最大值. 方法 2: 设

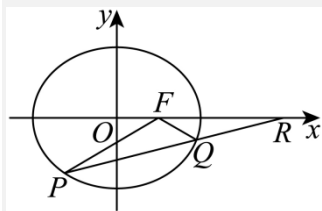
直线 PQ 方程: $y = k(x-4)$, 与椭圆方程联立, 消去 y , 利用韦达定理, 表示出 $|x_1 - x_2|$, 进而求弦 $|PQ|$ 的长, 结合点到直线的距离, 求三角形的高, 可表示三角形的面积, 再利用导数分析函数的单调性, 求三角形面积的最大值.

【详解】(1) 设椭圆 C 的右焦点 $F(c, 0)$, 则 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$,

由点 $A\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上可得 $\frac{2}{a^2} + \frac{3}{2b^2} = 1$, 解得 $b = \sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 法一: 如图:



由题意, 直线 PQ 的斜率显然不为 0, 设直线 PQ 的方程为 $x = my + 4$, 代入椭圆 C 的方程,

则 $(3m^2 + 4)y^2 + 24my + 36 = 0$, 其中 $\Delta = 16(9m^2 - 36) > 0$, 解得 $m^2 > 4$,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{24m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{36}{3m^2 + 4}$,

$$S_{\triangle FQP} = |S_{\triangle PFR} - S_{\triangle QFR}| = \frac{1}{2} \times 3 |y_1 - y_2| = \frac{3}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{18\sqrt{m^2 - 4}}{3m^2 + 4},$$

令 $\sqrt{m^2 - 4} = t$, 由 $m^2 > 4$ 得, $t > 0$,

$$S_{\triangle FQP} = \frac{18t}{3t^2 + 16} = \frac{18}{3t + \frac{16}{t}} \leq \frac{18}{2\sqrt{48}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (\text{当且仅当 } m^2 = \frac{28}{3} \text{ 时, 等号成立}),$$

所以 $\triangle FQP$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

法二: 由题意, 直线 PQ 的斜率一定存在, 设 PQ 的方程为 $y = k(x-4)$, 代入椭圆 C 的方程,

则 $(3 + 4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0$, 其中 $\Delta = 144(1 - 4k^2) > 0$, 解得 $k^2 < \frac{1}{4}$,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{3 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{64k^2 - 12}{3 + 4k^2}$, 可得 $|PQ| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{12\sqrt{1 - 4k^2}}{3 + 4k^2}$,

点 F 到直线 PQ 的距离为 $d = \frac{|3k|}{\sqrt{1 + k^2}}$,

$$S_{\triangle FPQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d = \frac{18\sqrt{k^2(1-4k^2)}}{3+4k^2},$$

$$\text{令 } k^2 = t, S^2 = \frac{18^2(-4t^2+t)}{16t^2+24t+9}, \text{ 令 } f(t) = \frac{-4t^2+t}{16t^2+24t+9}, f'(t) = \frac{(-28t+3)(4t+3)}{(16t^2+24t+9)^2},$$

$f(t)$ 在区间 $\left(0, \frac{3}{28}\right)$ 上递增, 在 $\left(\frac{3}{28}, +\infty\right)$ 上递减,

$$\text{所以 } t = k^2 = \frac{3}{28} \text{ 时, } f(t)_{\max} = f\left(\frac{3}{28}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{24}\right)^2,$$

所以 $\triangle FPQ$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.