

抛物线与圆

一、填空题

1. 已知圆 C 的圆心与抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点关于直线 $y = x$ 对称，直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 与 C 相交于 A, B 两点，且 $|AB| = 4$ ，则圆 C 的标准方程为_____.

【答案】 $(x-1)^2 + y^2 = 5$

【知识点】求点到直线的距离、由圆心（或半径）求圆的方程、已知圆的弦长求方程或参数、根据抛物线方程求焦点或准线

【分析】根据题意，求得抛物线的焦点 $F(0,1)$ ，得到圆心为 $C(1,0)$ ，设圆 C 的半径为 r ，圆心 C 到 $3x - 4y + 2 = 0$ 的距离为 $d = 1$ ，结合圆的弦长公式，求得 r 的值，即可求解.

【详解】由抛物线 $x^2 = 4y$ ，可得其焦点为 $F(0,1)$ ，

因为圆 C 的圆心与抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点关于直线 $y = x$ 对称，可得圆心为 $C(1,0)$ ，

设圆 C 的半径为 $r (r > 0)$ ，

圆心 C 到 $3x - 4y + 2 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 0 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1$ ，

又因为 $|AB| = 4$ ，可得 $r^2 = d^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ ，

所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 5$.

故答案为： $(x-1)^2 + y^2 = 5$.

2. 若点 $M(4, m)$ 在第一象限，且 M 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上的点，抛物线的焦点坐标为 F ，若 $|MF| = 6$ ，则 $m =$ _____.

【答案】 $4\sqrt{2}$

【知识点】根据抛物线上的点求标准方程、根据抛物线方程求焦点或准线、抛物线定义的理解

【分析】先根据抛物线的定义求出 p 的值，进而得到抛物线方程，再将点 M 的坐标代入抛物线方程求出 m 的值即可.

【详解】因为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点坐标为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

则准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

所以 $|MF| = 4 + \frac{p}{2} = 6$, 解得:

$4 + \frac{p}{2} = 6$, 所以 $\frac{p}{2} = 2$, 即: $p = 4$,

因此抛物线的方程为 $y^2 = 8x$,

因为点 $M(4, m)$ 在抛物线上,

将其代入抛物线方程: $m^2 = 8 \times 4 = 32$,

又因为点 M 在第一象限, 所以 $m > 0$,

则: $m = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

故答案为: $4\sqrt{2}$.

3. 已知点 $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ 在抛物线 $y = ax^2$ 上, 则该抛物线的准线方程为_____.

【答案】 $y = 2$

【知识点】 根据抛物线上的点求标准方程、根据抛物线方程求焦点或准线

【分析】 将点 $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ 代入抛物线方程解出 a , 进而求准线方程即可.

【详解】 因为点 $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ 在抛物线 $y = ax^2$ 上,

所以 $-\frac{1}{2} = a \times 2^2$, 解得 $a = -\frac{1}{8}$,

所以抛物线方程为 $x^2 = -8y$, 则 $2p = 8$,

所以该抛物线的准线方程为 $y = \frac{p}{2} = 2$,

故答案为: $y = 2$

4. 抛物线 $y = \frac{4}{3}x^2$ 的准线方程为_____.

【答案】 $y = -\frac{3}{16}$

【知识点】 根据抛物线方程求焦点或准线

【分析】 将题中给定的抛物线方程转化为标准方程, 即可得解.

【详解】 将题中所给抛物线转化为其标准方程: $x^2 = \frac{3}{4}y$, 因此其准线方程为

$$y = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16}.$$

故答案为: $y = -\frac{3}{16}$.

5. 若抛物线 $y^2 = 2x$ 上一点 P 到准线的距离等于它到顶点的距离, 则点 P 的坐标为_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

【知识点】 抛物线定义的理解

【分析】 由抛物线方程得到焦点坐标和顶点, 由抛物线的定义得到 $|PO| = |PF|$, 设点 P 坐标, 建立方程解得横坐标, 代入抛物线方程求得纵坐标, 即可得答案.

【详解】 由题意可知抛物线 $y^2 = 2x$ 焦点 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

设 O 为坐标原点, 则抛物线 $y^2 = 2x$ 的顶点为 O

根据题意及抛物线定义可知点 P 到顶点的距离等于到焦点的距离, 即 $|PO| = |PF|$,

$$\text{设 } P(a, b) (a > 0), \text{ 则 } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2}, \text{ 即 } a^2 + b^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2,$$

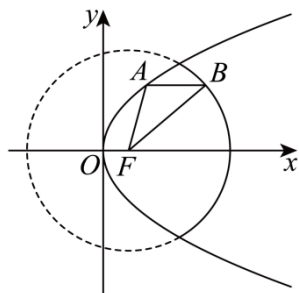
$$\therefore a^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}, \therefore a = \frac{1}{4},$$

$$\text{又 } \because b^2 = 2a = \frac{1}{2}, \therefore b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

故答案为: $\left(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. 如图所示点 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 点 A 、 B 分别在抛物线 $y^2 = 4x$ 及圆 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 的实线部分上运动, 且 AB 总是平行于 x 轴, 则 $\triangle FAB$ 的周长的取值范围是_____.



【答案】(4,6)

【知识点】抛物线上的点到定点和焦点距离的和、差最值、圆上点到定直线（图形）上的最值（范围）

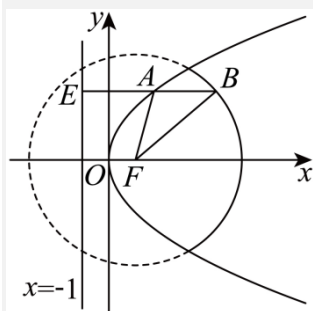
【分析】过点 A 作准线 $x = -1$ 的垂线，垂足为 E ，则 $\triangle FAB$ 的周长为 $x_B + 3$ ，求出 x_B 后可得所求的范围.

【详解】过点 A 作准线 $x = -1$ 的垂线，垂足为 E ，

则 $\triangle FAB$ 的周长为 $|AF| + |AB| + |BF| = |AE| + |AB| + 2 = |BE| + 2 = x_B + 3$ ，

由 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 可得： $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$ ，所以 $1 < x_B < 3$ ，故 $\triangle FAB$ 的周长的取值范围为 $(4, 6)$.

故答案为：(4,6)



7. 若曲线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上一点 P 到焦点的距离为 4，则点 P 到 y 轴的距离为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【知识点】抛物线的焦半径公式、根据抛物线方程求焦点或准线

【分析】确定准线方程，结合抛物线的定义确定点 P 的纵坐标，代入 $y = \frac{1}{4}x^2$ 即可求解.

【详解】由题可知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 即 $x^2 = 4y$ 的准线方程为 $y = -1$.

设点 $P(x_0, y_0)$ ，根据抛物线的定义可知 $|PF| = y_0 + 1 = 4$ ，即 $y_0 = 3$.

由抛物线方程可得 $x_0^2 = 4y_0 = 12$ ，即 $|x_0| = 2\sqrt{3}$ ，所以点 P 到 y 轴的距离为 $2\sqrt{3}$.

故答案为： $2\sqrt{3}$

8. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ，过 C 上一点 $M(4, m)$ 作 l 的垂线，垂足为 N ，若 $\angle NMF$ 的平分线经过 l 与 x 轴的交点，则 $p =$ _____.

【答案】8

【知识点】抛物线定义的理解、根据抛物线方程求焦点或准线、与抛物线焦点弦有关的几何性质

【分析】先根据已知条件确定点 F, N 以及 l 与 x 轴的交点坐标，确定 l 的方程，然后根据角平分线的性质可列出等式，进而求出结果.

【详解】由题意可知， $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ，准线为 $x = -\frac{p}{2}$ ，则 l 与 x 轴的交点为 $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

因为过 C 上一点 $M(4, m)$ 作 l 的垂线，垂足为 N ，所以 $N\left(-\frac{p}{2}, m\right)$.

由于 $k_{FM} = \frac{m-0}{4-\frac{p}{2}} = \frac{2m}{8-p}$ ，所以直线 FM 的方程为 $y = \frac{2m}{8-p}\left(x - \frac{p}{2}\right)$ ，即

$$2mx + (p-8)y - mp = 0.$$

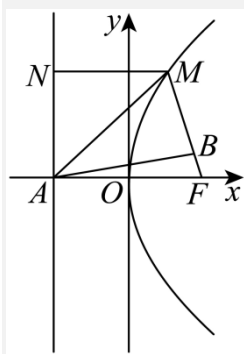
那么 $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ 到直线 FM 的距离为 $|AB| = \frac{|-pm - pm|}{\sqrt{4m^2 + (p-8)^2}} = \frac{|2pm|}{\sqrt{4m^2 + (p-8)^2}}.$

根据角平分线的性质可得 $|AN| = |AB|$ ，即 $|m| = \frac{|2pm|}{\sqrt{4m^2 + (p-8)^2}},$

化简得 $3p^2 + 16p - 64 = 4m^2$ ①，又点 $M(4, m)$ 在抛物线上，则有 $m^2 = 8p$ ，

代入①式可得 $3p^2 - 16p - 64 = 0$ ，解得 $p = 8$ 或 $p = -\frac{8}{3}$ ($-\frac{8}{3} < 0$, 舍去).

故答案为：8.



9. 已知倾斜角是 60° 的直线 l 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F ，且与抛物线交于 A, B 两点，则弦长 $|AB| =$ _____.

【答案】 $\frac{16}{3}$

【知识点】求直线与抛物线相交所得弦的弦长、根据抛物线方程求焦点或准线、直线的倾斜

角

【分析】先根据已知条件求出直线 l 的方程，然后联立直线与抛物线方程求出点 A, B 的坐标，最后利用两点之间距离公式求出结果.

【详解】因为直线 l 的倾斜角为 60° ，所以直线 l 的斜率为 $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

因为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$ ，直线 l 过点 F ，

所以直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}(x - 1)$.

联立直线 l 与抛物线方程得 $3(x - 1)^2 = 4x$ ，即 $(3x - 1)(x - 3) = 0$.

解得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = 3$ ，所以 $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), B(3, 2\sqrt{3})$.

所以 $|AB| = \sqrt{\left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{64}{3}} = \frac{16}{3}$.

故答案为： $\frac{16}{3}$.

10. 已知直线 l 为抛物线 $C: x^2 = 8y$ 的准线， P 为 C 上的一个动点，则点 P 到 l 的距离与到直线 $x + 2y + 11 = 0$ 的距离之和的最小值为_____.

【答案】 $3\sqrt{5}$

【知识点】根据抛物线方程求焦点或准线、抛物线定义的理解、求点到直线的距离

【分析】记 C 的焦点为 F ，利用抛物线的定义将问题转化为点 F 到直线 $x + 2y + 11 = 0$ 的距离.

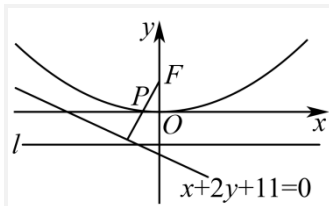
【详解】记 C 的焦点为 F ，则 $F(0, 2)$ ，

由抛物线的定义知点 P 到 l 的距离等于点 P 到 F 的距离，

故点 P 到 l 的距离与到直线 $x + 2y + 11 = 0$ 的距离之和即点 P 到 F 的距离与到直线 $x + 2y + 11 = 0$ 的距离之和

其最小值为点 F 到直线 $x + 2y + 11 = 0$ 的距离 $d = \frac{|0 + 2 \times 2 + 11|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 3\sqrt{5}$.

故答案为： $3\sqrt{5}$.



11. 已知直线 l 过抛物线 $y^2 = -4x$ 的焦点且与直线 $2x - y = 0$ 垂直, 则圆 $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$ 与直线 l 相交所得的弦长为_____.

【答案】 $2\sqrt{15}$

【知识点】 由两条直线垂直求方程、求点到直线的距离、圆的弦长与中点弦、根据抛物线方程求焦点或准线

【分析】 根据抛物线方程先确定其焦点坐标, 由两直线的位置关系得出 l 方程, 再由直线与圆的位置关系、弦长公式计算即可.

【详解】 由抛物线 $y^2 = -4x$ 知其焦点 $(-1, 0)$,

又 l 与直线 $2x - y = 0$ 垂直, 则 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$,

所以 l 的方程为 $y = -\frac{1}{2}(x+1)$, 即 $x + 2y + 1 = 0$,

整理圆的方程 $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$ 为 $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 20$,

即圆心为 $(2, -4)$, 半径为 $r = 2\sqrt{5}$,

根据点到直线的距离公式得圆心到 l 的距离 $d = \frac{|2 - 2 \times 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$,

所以该圆与 l 相交所得的弦长为 $l = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{15}$.

故答案为: $2\sqrt{15}$.

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $|FA| = 2|FB| = 6$, 则 $p =$ _____.

【答案】 4

【知识点】 直线与抛物线交点相关问题、抛物线定义的理解

【分析】 延长 AB 与准线相交, 利用抛物线的定义以及相似比即可求出.

【详解】 如图, 设直线 AB 与准线交于点 H , 分别过点 A, B 作准线的垂线, 垂足为 A_1, B_1 ,

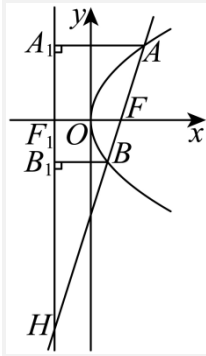
且准线与 x 轴的交点为 F_1 ,

则由抛物线的定义可知, $|AA_1| = |AF| = 6$, $|BB_1| = |BF| = 3$,

则 $\frac{|BB_1|}{|AA_1|} = \frac{|BH|}{|BH| + |AB|}$, 即 $\frac{3}{6} = \frac{|BH|}{|BH| + 9}$, 得 $|BH| = 9$,

又 $\frac{|BB_1|}{|FF_1|} = \frac{|BH|}{|BH| + |BF|}$, 则 $\frac{3}{p} = \frac{9}{9+3}$, 得 $p = 4$.

故答案为: 4



13. 已知 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 点 M 在抛物线上, 且 $\angle OFM = 120^\circ$, 则 $\triangle OFM$ 的面积为_____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【知识点】 抛物线中的三角形或四边形面积问题、根据抛物线方程求焦点或准线、抛物线定义的理解

【分析】 设出点 M 的坐标, 根据给定条件及抛物线定义建立方程, 求出点 M 的纵坐标即可.

【详解】 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$, 设 $M(\frac{1}{4}y_0^2, y_0)$, $\frac{1}{4}y_0^2 > 1$, 则 $|MF| = \frac{1}{4}y_0^2 + 1$,

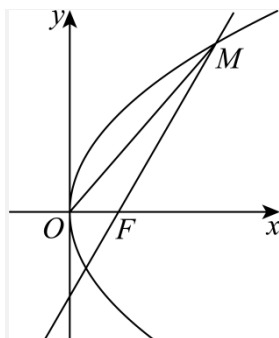
由 $\angle OFM = 120^\circ$, 得 $|y_0| = |MF| \sin 60^\circ$, 则 $(\frac{1}{4}y_0^2 + 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = |y_0|$,

整理得 $\sqrt{3}y_0^2 - 8|y_0| + 4\sqrt{3} = 0$, 解得 $|y_0| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 或 $|y_0| = 2\sqrt{3}$,

当 $|y_0| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 时, $\frac{1}{4}y_0^2 < 1$, 不符合题意; 当 $|y_0| = 2\sqrt{3}$ 时, $\frac{1}{4}y_0^2 > 1$, 符合题意,

所以 $\triangle OFM$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}|OF| \cdot |y_0| = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$



14. 已知圆心位于抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点处的圆，与直线 $3x - 4y + 7 = 0$ 相交于 A 、 B 两点，且 $|AB| = 2\sqrt{5}$ ，则圆的标准方程为_____.

【答案】 $(x-1)^2 + y^2 = 9$

【知识点】根据抛物线方程求焦点或准线、已知圆的弦长求方程或参数、由圆心（或半径）求圆的方程

【分析】求出抛物线的焦点坐标，并求出圆心到直线 AB 的距离 d ，结合勾股定理可求出圆的半径长，即可得出所求圆的标准方程.

【详解】易知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1,0)$ ，且点 F 到直线 $3x - 4y + 7 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{10}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2,$$

$$\text{故圆 } F \text{ 的半径为 } r = \sqrt{d^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 5} = 3,$$

因此，所求圆的标准方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 9$.

故答案为： $(x-1)^2 + y^2 = 9$.

15. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 上位于第一象限内的点 P 到抛物线的焦点 F 的距离为 5，过点 P 作圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 的切线，切点为 M ，则 $|PM| =$ _____.

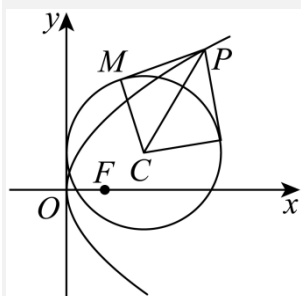
【答案】 3

【知识点】抛物线的焦半径公式、切线长

【分析】先根据抛物线的定义求出点 P 的坐标，再将圆的方程化为标准方程，得到圆心坐标和半径，最后根据切线的性质，利用勾股定理求值.

【详解】在抛物线 $y^2 = 4x$ 中， $2p = 4$ ，则 $p = 2$ ，所以焦点 $F(1,0)$ ，准线方程为 $x = -1$.

设点 $P(x_0, y_0) (x_0, y_0 > 0)$ ，根据抛物线的定义，可得 $x_0 + 1 = 5$ ，



解得 $x_0 = 4$ 。把 $x_0 = 4$ 代入 $y^2 = 4x$ ，得 $y_0^2 = 4 \times 4 = 16$ ，

因为 $y_0 > 0$ ，所以 $y_0 = 4$ ，即 $P(4, 4)$ 。

圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，圆心为 $C(2, 1)$ ，半径 $r = 2$ ，

故 $|PM| = \sqrt{|PC|^2 - |CM|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2^2} = 3$ 。

故答案为：3。

16. 已知抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点为 F ，圆 $C: x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ ，过点 F 作直线 l ，当圆心 C 到直线 l 的距离最大时，直线 l 的方程为_____。

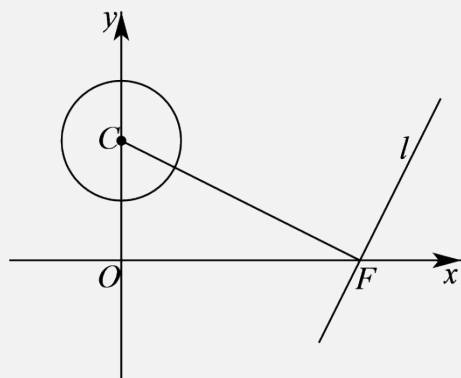
【答案】 $2x - y - 8 = 0$

【知识点】由圆的一般方程确定圆心和半径、根据抛物线方程求焦点或准线、直线的点斜式方程及辨析

【分析】求出抛物线的焦点 F 以及圆心 C 的坐标，分析可知当 $l \perp CF$ 时，圆心 C 到直线 l 的距离最大时，求出直线 l 的斜率，结合点斜式可得出直线 l 的方程。

【详解】对于抛物线 $y^2 = 16x$ ，则 $2p = 16$ ， $p = 8$ ，所以 $\frac{p}{2} = 4$ ，故其焦点为 $F(4, 0)$ ，

圆 C 的标准方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ ，圆心为 $C(0, 2)$ ，



当 $l \perp CF$ 时, 圆心 C 到直线 l 的距离最大时,

因为 $k_{CF} = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$, 此时直线 l 的斜率为 $k = -\frac{1}{k_{CF}} = 2$,

因此, 直线 l 的方程为 $y = 2(x-4)$, 即 $2x - y - 8 = 0$.

故答案为: $2x - y - 8 = 0$.

17. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 过点 $P(2, 4)$; 其焦点为 F , 以 PF 为直径作圆 C_1 , 圆 C_1 与圆 $C_2: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程为_____.

【答案】 $4x + 4y - 5 = 0$

【知识点】 根据抛物线上的点求标准方程、相交圆的公共弦方程、由圆心（或半径）求圆的方程

【分析】 先代入 P 点求出抛物线方程, 则焦点坐标 F 可求, 进而可得圆 C_1 的方程, 与圆 C_2 相减即可得相交弦 AB 的直线方程.

【详解】 将 P 点代入抛物线方程可得 $4^2 = 2p \times 2$, 解得 $p = 4$, 即抛物线方程为 $y^2 = 8x$, 所以抛物线的焦点坐标 $F(2, 0)$, PF 的中点坐标为 $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (2, 2)$,

$|PF| = \sqrt{(2-2)^2 + (4-0)^2} = 4$, 所以圆 C_1 的圆心为 $(2, 2)$, 半径为 2,

所以圆 $C_1: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$,

因为 $1 = 2 - 1 < \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2} < 3 = 1 + 2$, 所以圆 C_1 与圆 C_2 相交,

圆 C_1 与圆 C_2 方程相减可得: $C_1: -4x + 4 + -4y + 4 = 3$, 即 $4x + 4y - 5 = 0$,

故答案为: $4x + 4y - 5 = 0$.

18. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F(0, 1)$, 倾斜角为 45° 的直线 l 过点 F . 若 l 与 C 相交于 A, B 两点, 则以 AB 为直径的圆被 x 轴截得的弦长为_____.

【答案】 $2\sqrt{7}$

【知识点】 与抛物线焦点弦有关的几何性质、求直线与抛物线相交所得弦的弦长、根据焦点或准线写出抛物线的标准方程、圆的弦长与中点弦

【分析】 首先求出抛物线方程及直线 l 的方程, 联立直线与抛物线方程, 利用韦达定理得到 $y_A + y_B = 6$, 再由抛物线的定义、中点公式求圆的半径和圆心横坐标, 最后应用几何法求弦

长.

【详解】因为抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F(0, 1)$,

所以 $\frac{p}{2} = 1$, 解得 $p = 2$, 则抛物线 $C: x^2 = 4y$,

直线 l 的方程为 $y = x + 1$, 由 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 = 4y \end{cases}$,

则 $y^2 - 6y + 1 = 0$, 显然 $\Delta > 0$,

所以 $y_A + y_B = 6$, 故 $|AB| = y_A + y_B + p = 6 + 2 = 8$,

所以以 AB 为直径的圆的圆心的纵坐标为 3, 半径为 4,

故以 AB 为直径的圆被 x 轴截得的弦长为 $2\sqrt{16 - 9} = 2\sqrt{7}$.

故答案为: $2\sqrt{7}$

19. 已知直线 $y = kx$ 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 在第一象限交于点 M , 过点 M 作 x 轴的垂线, 垂足为抛物线的焦点 F , 则 $k = \underline{\quad}$; 若该抛物线的准线上的点到点 M 与点 F 的距离之和的最小值为 $\sqrt{5}$, 则 $p = \underline{\quad}$.

【答案】 2 1

【知识点】直线与抛物线交点相关问题、根据抛物线方程求焦点或准线、抛物线上的点到定点和焦点距离的和、差最值、抛物线定义的理解

【分析】空 1: 先根据抛物线焦点坐标求出点 M 的坐标, 进而求出直线斜率 k ; 空 2: 根据反射法将距离之和进行转化, 最后根据最小值求出 p 的值.

【详解】对于抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 其焦点坐标为 $F(\frac{p}{2}, 0)$.

因为过点 M 作 x 轴的垂线, 垂足为抛物线的焦点 F , 所以点 M 的横坐标为 $\frac{p}{2}$.

将 $x = \frac{p}{2}$ 代入抛物线方程 $y^2 = 2px$, 可得 $y^2 = 2p \times \frac{p}{2} = p^2$, 因为点 M 在第一象限, 所以 $y = p$,

即 $M(\frac{p}{2}, p)$.

已知直线 $y = kx$ 过点 $M(\frac{p}{2}, p)$, 将点 M 的坐标代入直线方程可得 $p = k \times \frac{p}{2}$, 因为 $p > 0$, 两边同时除以 p 得 $k = 2$;

当 $k = 2$ 时, 已知 $M(\frac{p}{2}, p)$, 焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 准线为 $x = -\frac{p}{2}$.

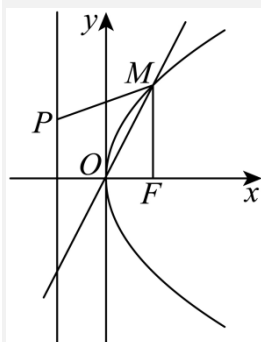
设焦点 F 关于准线 $x = -\frac{p}{2}$ 的对称点 F' ，则 $F'(-\frac{3p}{2}, 0)$ 。

因为 $|PM| + |PF| = |PM| + |PF'|$ ，故其最小值为 $|F'M|$ ，

$$\text{又 } |F'M| = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \left(-\frac{3p}{2}\right)\right)^2 + (p-0)^2} = \sqrt{(2p)^2 + p^2} = \sqrt{5p^2} = p\sqrt{5}.$$

所以 $p\sqrt{5} = \sqrt{5}$ ，可得 $p = 1$ 。

故答案为： 2；1.



20. 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ ，过点 F 作直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点，且 F 为 A, B 的中点，则直线 l 的方程为_____.

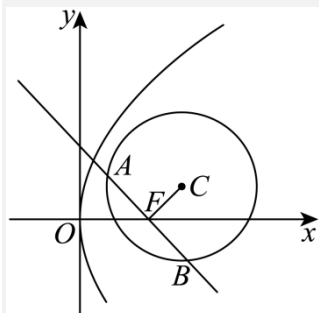
【答案】 $x + y - 2 = 0$

【知识点】由圆的一般方程确定圆心和半径、根据抛物线方程求焦点或准线、圆的弦长与中点弦、已知两点求斜率

【分析】求出抛物线焦点坐标和圆心坐标，依题意可得 $CF \perp AB$ ，求得直线 l 的斜率为 -1 可得其方程.

【详解】易知抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 $F(2, 0)$ ，

将圆 C 化为标准方程 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ ，圆心 $C(3, 1)$ ，半径 $r = 5$ ，如下图所示：



若 F 为 A, B 的中点，结合圆的性质可知 $CF \perp AB$ ，

易知 $k_{CF} = \frac{1-0}{3-2} = 1$ ，所以直线 l 的斜率为 -1 ，

因此直线 l 的方程为 $y-0=-(x-2)$ ，即 $x+y-2=0$ 。

故答案为： $x+y-2=0$