

圆锥曲线答案

一、单选题

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AF_1| = 3|BF_1|$, 且 $\angle F_2AB = \frac{\pi}{3}$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【知识点】求椭圆的离心率或离心率的取值范围、余弦定理解三角形

【分析】这道题考查的是椭圆的离心率. 抓住已知角 $\angle F_2AB = \frac{\pi}{3}$, 设 $|BF_1| = t$, 先在 $\triangle ABF_2$ 中用一次余弦定理解出 t 与 a 的关系, 然后在 $\triangle F_1AF_2$ 中再用一次余弦定理求出 c 与 a 的关系, 最后得出结论即可.

【详解】设 $|BF_1| = t$, 由 $|AF_1| = 3|BF_1|$, 得 $|AF_1| = 3t$, 由椭圆定义可知 $|AF_2| = 2a - 3t, |BF_2| = 2a - t$,
 $\therefore \angle F_2AB = \frac{\pi}{3}$, $\therefore$ 在 $\triangle ABF_2$ 中, 由余弦定理得
 $(2a - t)^2 = (4t)^2 + (2a - 3t)^2 - 2 \cdot 4t \cdot (2a - 3t) \cdot \cos \frac{\pi}{3}$, 解得 $t = \frac{4a}{9}$ 或 $t = 0$ (舍去),
 $\therefore$ 在 $\triangle F_1AF_2$ 中, $|AF_1| = \frac{4a}{3}, |AF_2| = \frac{2a}{3}, |F_1F_2| = 2c$,
 $\therefore (2c)^2 = \left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$, 解得 $a = \sqrt{3}c$, $\therefore$ 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选: D.

2. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 向圆 $C: (x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$ 引切线交椭圆于点 P (在 x 轴上方), 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}b^2$, 则椭圆的离心率 $e =$ ()

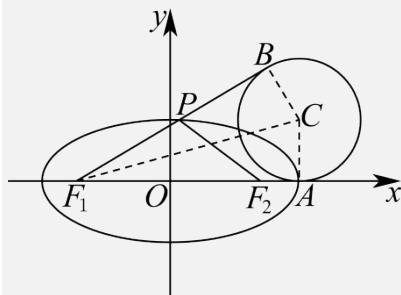
- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【知识点】求椭圆的离心率或离心率的取值范围、坐标法的应用——直线与圆的位置关系、二倍角的正切公式

【分析】先证明 P 即为椭圆的上顶点,再根据面积列出 a, b, c 的等式求离心率即可.

【详解】如图,



设圆 C 与 x 轴切于点 A , 与 F_1P 切于点 B , 设椭圆与 y 轴正半轴交于点 Q ,

下面证明 P, Q 重合,

设 $\angle CF_1A = \alpha$,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{b}{a+c},$$

$$\tan \angle BF_1A = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{b}{a+c}}{1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2} = \frac{2b(a+c)}{a^2 + c^2 + 2ac - b^2} = \frac{2b(a+c)}{2c^2 + 2ac} = \frac{2b(a+c)}{2c(a+c)} = \frac{b}{c},$$

$$\text{而 } \tan \angle QF_1A = \frac{b}{c},$$

$\therefore QF_1$ 与 PF_1 重合, 即点 P 是短轴的端点,

$$\therefore S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}b \cdot 2c = \frac{1}{2}b^2, \therefore b = 2c,$$

$$\text{则 } a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{5}c, \text{ 所以 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故选: C.

3. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上的一点 $N(x, 3)$ 到焦点 F 的距离为 4, P 为 C 上一动点, Q

为圆 $M: (x-3)^2 + (y+3)^2 = 4$ 上一动点, 则点 P 到直线 $l: y = -\frac{p}{2}$ 的距离与 $|PQ|$ 之和的最小值为 ()

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【知识点】抛物线定义的理解、抛物线上的点到定点和焦点距离的和、差最值

【分析】由题可得抛物线方程与圆的圆心半径, 由抛物线定义可得点 P 到直线 $l: y = -\frac{p}{2}$ 的

距离与 $|PQ|$ 之和为 $|PF|+|PQ|$ ，然后由图可得 M, Q, P, F 四点共线时取最小值.

【详解】如图，由抛物线的定义可得 $|NF|=y_N-\left(-\frac{p}{2}\right)=4$ ，解得 $p=2$ ，所以 $C:x^2=4y$.

由题可得圆 M 的圆心为 $M(3,-3)$ ，半径 $r=2$.

由抛物线方程可知焦点坐标为 $F(0,1)$ ，准线为直线 $l:y=-1$ ，

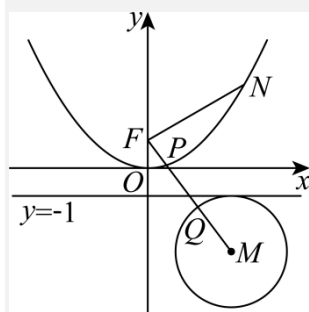
所以点 P 到直线 l 的距离 $d=|PF|$.

所以 $d+|PQ|=|PF|+|PQ|$ ，

所以当 M, Q, P, F 四点共线时 $|PF|+|PQ|$ 取得最小值，

则 $(|PF|+|PQ|)_{\min}=|FM|-r=3$.

故选：C.



4. 已知 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的右焦点，过点 F 作垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 P, Q 两点， A_1, A_2 分别为双曲线的左、右顶点，连接 A_1P 交 y 轴于点 B ，连接 BA_2 并延长交 PQ 于点 C ，且 $3\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FQ}$ ，则双曲线的离心率为（ ）

A. 2

B. $\frac{5}{3}$

C. 3

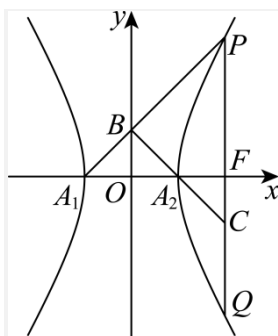
D. $\frac{5}{2}$

【答案】A

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围、双曲线向量共线比例问题

【分析】先将 P, F, C, Q 的横坐标都为 c 代入双曲线，得到 P, Q 两点坐标，写出直线 PA_1 的方程，得到 B 点坐标，写出直线 BA_2 的方程，得到 C 点坐标，利用 $3\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FQ}$ ，构造出关于 a, b, c 的方程，结合双曲线中 $c^2=a^2+b^2$ ，得到离心率的方程，解出离心率.

【详解】



根据题意，画出示意图，则 P, F, C, Q 的横坐标都为 c ，代入双曲线方程得

$$y = \pm \frac{b^2}{a}, \therefore P\left(c, \frac{b^2}{a}\right), Q\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

而 $A_1(-a, 0)$ ，所以直线 PA_1 方程为 $y = \frac{b^2}{a(c+a)}(x+a)$ ，

令 $x = 0$ ，得 $y_B = \frac{b^2}{c+a}$ ， $\therefore B\left(0, \frac{b^2}{c+a}\right)$ ，所以直线 BA_2 ： $y = -\frac{b^2}{a(c+a)}(x-a)$ ，

令 $x = c$ 得， $y_C = -\frac{b^2(c-a)}{a(c+a)}$ ，

因为 $3\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FQ}$ ，所以可得 $3 \times \left(-\frac{b^2(c-a)}{a(c+a)}\right) = -\frac{b^2}{a}$ ，

整理得 $2c = 4a$ ，所以 $e = \frac{c}{a} = 2$ 。

故选：A。

5. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 F 与抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点重合，过 F 的直线与双曲线 C_1 的一条渐近线垂直且交于点 A ， FA 的延长线与抛物线 C_2 的准线

交于点 B ， $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$ ， $\triangle AOB$ 的面积为 $2\sqrt{2}$ ， O 为原点，双曲线 C_1 的方程为（ ）

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$

B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

D. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$

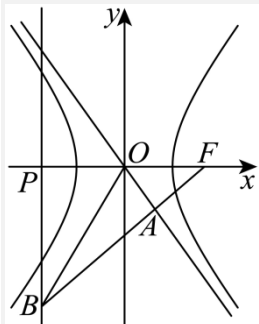
【答案】B

【知识点】根据 a 、 b 、 c 求双曲线的标准方程

【分析】先求点 F 到渐近线的距离，再根据 $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$ 可求得 $|AB|$ 、 $|BF|$ ，即可根据三角形

面积列出关系式，再根据 $\cos \angle OFA = \frac{|FA|}{|OF|} = \frac{|PF|}{|BF|}$ 得出关系式，即可解方程组求出 a, b, c 。

【详解】设双曲线的半焦距为 c ，设 x 轴与准线交于点 P ，



则 $F(c, 0)$ ， $c^2 = a^2 + b^2$ ①，准线方程为 $x = -c$ ，

不妨设直线 FA 与渐近线 $OA: y = -\frac{b}{a}x$ 垂直，

则点 F 到直线 OA 的距离 $|FA| = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$ ，则 $|OA| = \sqrt{c^2 - b^2} = a$ ，

因 $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$ ，则 $|AB| = 2b$ ， $|BF| = 3b$ ，

则 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA||AB| = \frac{1}{2} \times a \times 2b = ab = 2\sqrt{2}$ ②，

因 $\cos \angle OFA = \frac{|FA|}{|OF|} = \frac{|PF|}{|BF|}$ ，即 $\frac{b}{c} = \frac{2c}{3b}$ ，则 $3b^2 = 2c^2$ ③，

联立①②③得， $a = \sqrt{2}, b = 2, c = \sqrt{6}$ ，则双曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 。

故选：B

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 作直线分别交

双曲线的左、右两支于 M, N 两点，满足 $\overrightarrow{NF_2} = 2\overrightarrow{NP}$ ，且 $\overrightarrow{MP} \cdot (\overrightarrow{MF_2} - \overrightarrow{MN}) = 0$ ，

$\angle F_1NF_2 = \frac{\pi}{3}$ ，则双曲线 C 的渐近线方程为（ ）

A. $y = \pm\sqrt{6}x$

B. $y = \pm\sqrt{7}x$

C. $y = \pm 2\sqrt{2}x$

D. $y = \pm 3x$

【答案】A

【知识点】双曲线定义的理解、已知方程求双曲线的渐近线、余弦定理解三角形

【分析】利用垂直关系的向量表示得 $MP \perp NF_2$ ，且 $\triangle MNF_2$ 为等边三角形，结合双曲线定义以及余弦定理计算得 $c^2 = 7a^2$ ，进而求出渐近线方程。

【详解】由 $\overrightarrow{MP} \cdot (\overrightarrow{MF_2} - \overrightarrow{MN}) = 0$ ，得 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NF_2} = 0$ ，即 $MP \perp NF_2$ ，

又 $\overrightarrow{NF_2} = 2\overrightarrow{NP}$ ，得 P 为 NF_2 的中点，则 $|MN| = |MF_2|$ ，

又 $\angle F_1NF_2 = 60^\circ$ ，于是 $\triangle MNF_2$ 为等边三角形，设 $\triangle MNF_2$ 的边长为 m ，

由双曲线定义知， $|NF_1| - |NF_2| = 2a$ ， $|MF_2| - |MF_1| = 2a$ ，则 $|NF_1| = m + 2a$ ， $|MF_1| = m - 2a$ ，

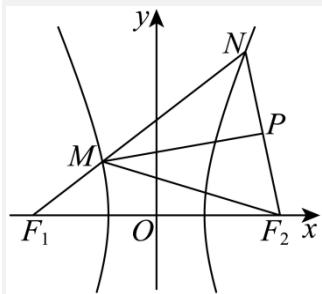
又 $|NF_1| - |MF_1| = |MN| = m$ ，则 $m + 2a - (m - 2a) = m$ ，解得 $m = 4a$ ，

在 $\triangle NF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2 = |NF_1|^2 + |NF_2|^2 - 2|NF_1||NF_2|\cos 60^\circ$ ，

即 $(2c)^2 = 36a^2 + 16a^2 - 2 \cdot 6a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2}$ ，得 $c^2 = 7a^2$ ， $b^2 = 6a^2$ ， $b = \sqrt{6}a$ ，

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{6}x$ 。

故选：A



7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ， M 为双曲线的渐近线上的点，满足 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0$ ，且 $|MF_1| = 2|MF_2|$ ， $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $\frac{20}{9}$ ，则双曲线 C 的方程为（ ）

A. $x^2 - \frac{9y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

C. $\frac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

D. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

【答案】A

【知识点】根据 a 、 b 、 c 求双曲线的标准方程、已知方程求双曲线的渐近线、二倍角的正切公式

【分析】根据给定条件可得 $F_1M \perp F_2M$ ，利用三角形面积求出半焦距，再利用直角三角形性质，结合二倍角的正切求出 $\frac{b}{a}$ 即可得解。

【详解】由 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0$ ，得 $F_1M \perp F_2M$ ，而 $|MF_1| = 2|MF_2|$ ， $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $\frac{20}{9}$ ，

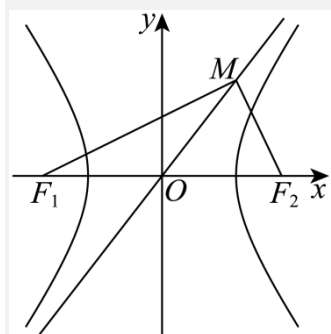
$$\text{则 } S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} |MF_1| |MF_2| = \frac{1}{2} \cdot 2 |MF_2|^2 = |MF_2|^2 = \frac{20}{9},$$

令双曲线 C 的半焦距为 c ，则 $c^2 = \frac{1}{4} |F_1F_2|^2 = \frac{25}{9}$ ，即 $a^2 + b^2 = \frac{25}{9}$ ，直线 OM 方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ，

$$\tan \angle MF_1F_2 = \frac{|MF_2|}{|MF_1|} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } |MO| = |F_1O|, \text{ 则 } \frac{b}{a} = \tan \angle MOF_2 = \tan 2\angle MF_1F_2 = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3},$$

联立解得 $a^2 = 1, b^2 = \frac{16}{9}$ ，所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{9y^2}{16} = 1$ 。

故选：A



8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，过点 F 作垂直于 x 轴的直线 l ， M ， N 分别是 l 与双曲线 C 及其渐近线在第一象限内的交点。若 M 是线段 FN 的中点，则 C 的渐近线方程为（ ）

A. $y = \pm x$

B. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

C. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

D. $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}x$

【答案】C

【知识点】求直线与双曲线的交点坐标、根据 a, b, c 齐次式关系求渐近线方程

【分析】设双曲线的右焦点 $F(c, 0)$ ，求出点 M 和 N 的坐标，利用中点坐标公式列式计算得 a, b 关系，进而可得渐近线方程。

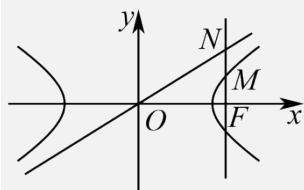
【详解】设双曲线的右焦点 $F(c, 0)$ ，过第一象限的渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ，

直线 $x = c$ 与直线 $y = \frac{b}{a}x$ 交于点 $N(c, \frac{bc}{a})$ ，交双曲线 C 于点 $M(c, \frac{b^2}{a})$ ，

由 M 是线段 FN 的中点，得 $\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a}$ ，则 $c = 2b$ ， $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{3}b$ ，

所以 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

故选: C



9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , M, N 为直线 $y = \frac{b}{a}x$ 上关于坐标原点对称的两点, A 为双曲线的右顶点, 若 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$, 且 $\sin \angle MAN = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{15}$ D. $\sqrt{33}$

【答案】B

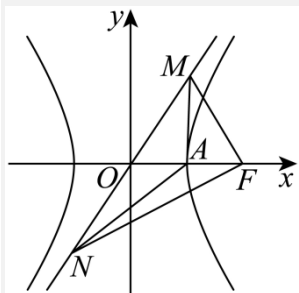
【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】先根据 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$ 得出 $\triangle FMN$ 的特征, 然后通过 $\sin \angle MAN$ 的值结合双曲线的相关线段长度关系来建立关于离心率的方程, 进而求解离心率.

【详解】因为 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$, 所以 $FM \perp FN$, 又 M, N 为直线 $y = \frac{b}{a}x$ 上关于坐标原点对称的两点, $F(c, 0)$, 那么 $|OM| = |ON| = |OF| = c$.

设 $M(x_0, \frac{b}{a}x_0)$, 则 $\sqrt{x_0^2 + (\frac{b}{a}x_0)^2} = c$, 化简可得 $x_0^2(1 + \frac{b^2}{a^2}) = c^2$,

而 $1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$, 所以 $x_0^2 = a^2$, 则 $x_0 = a$ 或 $x_0 = -a$, 不妨设 $M(a, b)$, $N(-a, -b)$.



已知 $A(a, 0)$, 则 $\overrightarrow{AM} = (0, b)$, $\overrightarrow{AN} = (-2a, -b)$.

$|\overrightarrow{AM}| = b$, $|\overrightarrow{AN}| = \sqrt{(-2a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{4a^2 + b^2}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \times (-2a) + b \times (-b) = -b^2$.

根据向量的夹角公式 $\cos \angle MAN = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{AN}|} = \frac{-b^2}{b\sqrt{4a^2+b^2}}$.

因为 $\sin \angle MAN = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 得 $\cos \angle MAN = \pm \sqrt{1 - (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} = \pm \frac{1}{3}$.

由于 $\angle MAN$ 是三角形内角, 且 M, N 在直线 $y = \frac{b}{a}x$ 上, A 为右顶点, 所以

$$\cos \angle MAN = -\frac{1}{3}.$$

即 $\frac{-b^2}{b\sqrt{4a^2+b^2}} = -\frac{1}{3}$, 两边平方可得 $\frac{b^4}{b^2(4a^2+b^2)} = \frac{1}{9}$,

化简得 $9b^2 = 4a^2 + b^2$, 即 $8b^2 = 4a^2$, $b^2 = \frac{1}{2}a^2$.

又因为 $c^2 = a^2 + b^2$, 把 $b^2 = \frac{1}{2}a^2$ 代入可得 $c^2 = a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$.

双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a}$, 则 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{\frac{3}{2}a^2}{a^2} = \frac{3}{2}$, 所以 $e = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

故选: B.

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$, P 为 C 上一点, 过点 P 向 C 的

两条渐近线作垂线, 垂足分别为 A, B , $|PA| \cdot |PB| = \frac{10}{7}$, 则双曲线 C 的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$

B. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = 1$

C. $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{4} = 1$

D. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{8} = 1$

【答案】A

【知识点】根据顶点坐标、实轴、虚轴求双曲线的标准方程、双曲线中的定值问题、求点到直线的距离、已知方程求双曲线的渐近线

【分析】先得到 $b = \sqrt{2}$ 和渐近线方程, 并设点 $P(m, n)$, 则 $2m^2 - a^2n^2 = 2a^2 > 0$, 由点到直线距离公式得到方程, 求出 $a^2 = 5$, 得到双曲线方程.

【详解】由题意得 $2b = 2\sqrt{2}$, 解得 $b = \sqrt{2}$,

双曲线渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{\sqrt{2}}{a}x$, 即 $ay \pm \sqrt{2}x = 0$,

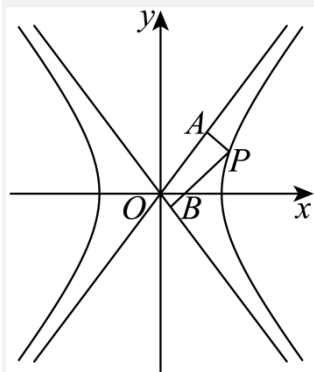
设点 $P(m, n)$, 则 $\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{2} = 1$, 即 $2m^2 - a^2n^2 = 2a^2 > 0$,

则 $P(m, n)$ 到两渐近线方程的距离分别为 $\frac{|\sqrt{2}m \pm an|}{\sqrt{a^2 + 2}}$,

$$\text{所以 } |PA| \cdot |PB| = \frac{|\sqrt{2}m + an|}{\sqrt{a^2 + 2}} \cdot \frac{|\sqrt{2}m - an|}{\sqrt{a^2 + 2}} = \frac{|2m^2 - a^2n^2|}{a^2 + 2} = \frac{2a^2}{a^2 + 2} = \frac{10}{7},$$

解得 $a^2 = 5$,

故双曲线方程为 $C: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$.



故选：A