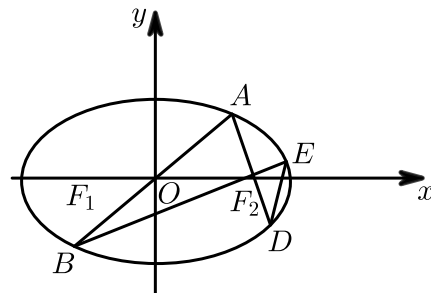


圆锥曲线大题

1. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , M 在椭圆上, $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $2\sqrt{5} + 4$, 面积的最大值为 2.

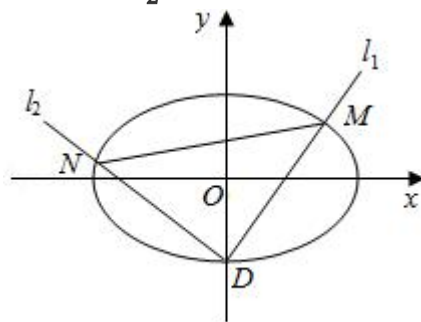


- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 直线 $y = kx (k > 0)$ 与椭圆 C 交于 A, B , 连接 AF_2, BF_2 并延长交椭圆 C 于 D, E , 连接 DE . 探索 AB 与 DE 的斜率之比是否为定值并说明理由.
2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 直线 l 过点 $A(4, 0), B(0, 2)$, 且与椭圆 C 相切于点 P .
- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 是否存在过点 $A(4, 0)$ 的直线 m 与椭圆 C 相交于不同的两点 M, N , 使得 $36|AP|^2 = 35|AM| \cdot |AN|$? 若存在, 试求出直线 m 的方程; 若不存在, 请说明理由.

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$, 且经过点 $A(0, 1)$.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2)

设 O 为原点，直线 $l: y = kx + t (t \neq \pm 1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q ，直线 AP 与 x 轴交于点 M ，直线 AQ 与 x 轴交于点 N ，若 $|OM| \cdot |ON| = 2$ ，求证：直线 l 经过定点．

4. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，短轴长是2．



- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 设椭圆 C 的下顶点为 D ，过点 D 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 ，这两条直线与椭圆 C 的另一个交点分别为 M, N ．设 l_1 的斜率为 $k (k \neq 0)$ ， $\triangle DMN$ 的面积为 S ，当 $\frac{S}{|k|} > \frac{16}{9}$ 时，求 k 的取值范围．
5. 已知点 $A(0, -2)$ ，椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， F 是椭圆的右焦点，直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， O 为坐标原点．
- (1) 求 E 的方程．
- (2) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点，当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，求 l 的方程．

6. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > \sqrt{3}$) 的右焦点为 F , 右顶点为 A , 已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.
- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H , 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA = \angle MAO$, 求直线的 l 斜率.
7. 已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上的一点. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交椭圆 C 于 B 、 D 两点, 且 A 、 B 、 D 三点不重合.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 求证: 直线 AB 、 AD 的斜率之和为定值.
- (3) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个最大值; 若不存在, 说明理由?
8. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 经过点 $(1, \frac{3}{2})$, 且离心率 $e = \frac{1}{2}$.
- (1) 求椭圆 E 的方程.
- (2) 设椭圆 E 的右顶点为 A , 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 E 相交于 M 、 N 两点 (异于 A 点), 且满足 $MA \perp NA$, 试证明直线 l 经过定点, 并求出该定点的坐标.
9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $(2, 1)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 相切, 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点.

① 若直线 l 过椭圆 C 的右焦点 F , 求 $\triangle OPQ$ 的面积.

② 求证: $OP \perp OQ$.

10. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点与抛物线 $x^2 = 4\sqrt{2}y$ 的焦点重合, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 过椭圆右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆交于 M, N 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 是否存在直线 l , 使得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -1$, 若存在求出直线方程; 若不存在请说明理由.

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 $F(c, 0)$, 直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 与 x 轴相交于点 T , 且 F 是 AT 的中点.

(1) 求椭圆的离心率.

(2) 过点 T 的直线与椭圆相交于 M, N 两点, M, N 都在 x 轴上方, 并且 M 在 N, T 之间, 且 N 到直线 l 的距离是 M 到直线 l 距离的2倍.

① 记 $\triangle NFM, \triangle NFA$ 的面积分别是 S_1, S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$.

② 若原点 O 到直线 TN 的距离为 $\frac{20\sqrt{41}}{41}$, 求椭圆方程.