

同构

一、填空题

1. 同构式通俗的讲是结构相同的表达式，如： $f(x) = x + e^x$ ， $f(\ln x) = \ln x + e^{\ln x} = \ln x + x$ ，

称 $x + e^x$ 与 $\ln x + x$ 为同构式. 已知实数 x_1, x_2 满足 $e^{x_1} + x_1 = 6$ ， $\ln \sqrt{3x_2 + 1} + \frac{3}{2}x_2 = \frac{5}{2}$ ，则

$x_1 + 3x_2 =$ _____.

【答案】5

【分析】可将 $\ln \sqrt{3x_2 + 1} + \frac{3}{2}x_2 = \frac{5}{2}$ 拼凑成 $\frac{1}{2} \ln(3x_2 + 1) + \frac{1}{2}(3x_2 + 1) = 3$ ，结合 $f(x)$ 单调性和同构思想易得 $x_1 = \ln(3x_2 + 1)$ ，将 x_1 代入 $x_1 + 3x_2$ 即可得解.

【详解】易判断 $f(x) = x + e^x$ 为增函数， $f(x_1) = x_1 + e^{x_1} = 6$ ，

$$\ln \sqrt{3x_2 + 1} + \frac{3}{2}x_2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(3x_2 + 1) + \frac{1}{2}(3x_2 + 1) = 3,$$

$$\text{即 } \ln(3x_2 + 1) + (3x_2 + 1) = 6, \quad f(\ln(3x_2 + 1)) = \ln(3x_2 + 1) + (3x_2 + 1) = 6,$$

$$\text{所以 } x_1 = \ln(3x_2 + 1), \quad x_1 + 3x_2 = \ln(3x_2 + 1) + (3x_2 + 1) - 1 = 6 - 1 = 5.$$

故答案为：5

二、解答题

2. 对下列不等式或方程进行同构变形，并写出相应的同构函数.

(1) $\log_2 x - k \cdot 2^{kx} \geq 0$;

(2) $e^{2\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \ln \sqrt{x} \geq 0$;

(3) $x^2 \ln x - m e^{\frac{m}{x}} \geq 0$;

(4) $a(e^{ax} + 1) \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x$;

(5) $a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq ax + 2e^x$;

(6) $x + a \ln x + e^{-x} \geq x^a (x > 1)$;

$$(7) e^{-x} - 2x - \ln x = 0;$$

$$(8) x^2 e^x + \ln x = 0.$$

【答案】(1) $(\log_2 x) \cdot 2^{\log_2 x} \geq kx \cdot 2^{kx}$, $f(x) = x \cdot 2^x$.

$$(2) 2\lambda x e^{2\lambda x} \geq (\ln x) e^{\ln x}, \quad g(x) = x e^x.$$

$$(3) \ln x + \ln(\ln x) \geq \frac{m}{x} + \ln \frac{m}{x}, \quad h(x) = x + \ln x.$$

$$(4) ax \cdot e^{ax} + ax \geq \ln x^2 \cdot e^{\ln x^2} + \ln x^2, \quad u(x) = x e^x + x.$$

$$(5) a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq a \ln e^x + 2e^x, \quad v(x) = a \ln x + 2x.$$

$$(6) e^{-x} - \ln e^{-x} \geq x^a - \ln x^a, \quad r(x) = x - \ln x.$$

$$(7) e^{-x} + \ln e^{-x} = x + \ln x, \quad \phi(x) = x + \ln x.$$

$$(8) e^x \ln e^x = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}, \quad \phi(x) = x \ln x.$$

【分析】(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) 根据给定的不等式或等式，利用等式不等式性质、指对数式互化变形成不等号或等号两边结构相同的形式，再构造函数作答.

【详解】(1) 显然 $x > 0$ ，则 $\log_2 x - k \cdot 2^{kx} \geq 0 \Leftrightarrow x \log_2 x \geq kx \cdot 2^{kx} \Leftrightarrow (\log_2 x) \cdot 2^{\log_2 x} \geq kx \cdot 2^{kx}$,

$$f(x) = x \cdot 2^x.$$

(2) 显然 $x > 0$ ，则

$$e^{2\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \ln \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{2\lambda x} \geq \frac{1}{2\lambda} \ln x \Leftrightarrow 2\lambda x e^{2\lambda x} \geq x \ln x \Leftrightarrow 2\lambda x e^{2\lambda x} \geq (\ln x) e^{\ln x}, \quad g(x) = x e^x.$$

$$(3) \text{ 显然 } x > 0, \text{ 则 } x^2 \ln x - m e^{\frac{m}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow x \ln x \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Leftrightarrow \ln x + \ln(\ln x) \geq \frac{m}{x} + \ln \frac{m}{x},$$

$$h(x) = x + \ln x.$$

$$(4) \text{ 显然 } x > 0, \text{ 则 } a(e^{ax} + 1) \geq 2(x + \frac{1}{x}) \ln x \Leftrightarrow axe^{ax} + ax \geq 2x^2 \ln x + 2 \ln x = x^2 \ln x^2 + \ln x^2$$

$$\Leftrightarrow ax \cdot e^{ax} + ax \geq \ln x^2 \cdot e^{\ln x^2} + \ln x^2, \quad u(x) = xe^x + x.$$

$$(5) \quad a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq ax + 2e^x \Leftrightarrow a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq a \ln e^x + 2e^x, \quad v(x) = a \ln x + 2x.$$

$$(6) \quad x > 1, \quad x + a \ln x + e^{-x} \geq x^a \Leftrightarrow x + e^{-x} \geq x^a - \ln x^a \Leftrightarrow e^{-x} - \ln e^{-x} \geq x^a - \ln x^a,$$

$$r(x) = x - \ln x.$$

$$(7) \quad e^{-x} - 2x - \ln x = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - x = x + \ln x \Leftrightarrow e^{-x} + \ln e^{-x} = x + \ln x, \quad \varphi(x) = x + \ln x.$$

$$(8) \quad x^2 e^x + \ln x = 0 \Leftrightarrow xe^x = -\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow xe^x = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} \Leftrightarrow e^x \ln e^x = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}, \quad \phi(x) = x \ln x.$$