

函数零点练习（教师版）

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0, \\ \sqrt{3} \sin \pi x - \cos \pi x, & -\frac{5}{3} \leq x \leq 0. \end{cases}$ 若方程 $f(x) = a$ 恰有四个不同的实数

解, 分别记为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{6}, \frac{19}{12}\right)$ B. $\left[-\frac{2}{3}, \frac{19}{12}\right)$ C. $\left[\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right)$
D. $\left[2 - \frac{8\pi}{3}, \frac{17}{4} - \frac{8\pi}{3}\right)$

【答案】A

【分析】当 $-\frac{5}{3} \leq x \leq 0$ 时利用辅助角公式化简函数解析, 再画出函数图象, 不妨令

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $x_1 < x_2 < 0 < x_3 \leq \frac{1}{2} < 2 \leq x_4 < 4$, 且 x_1 与 x_2 关于 $x = -\frac{4}{3}$ 对称, 再根据

对数的运算得到 $x_3 \cdot x_4 = 1$, 最后转化为关于 x_4 的函数, 结合对勾函数的性质计算可得:

【详解】解: $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0, \\ \sqrt{3} \sin \pi x - \cos \pi x, & -\frac{5}{3} \leq x \leq 0. \end{cases}$

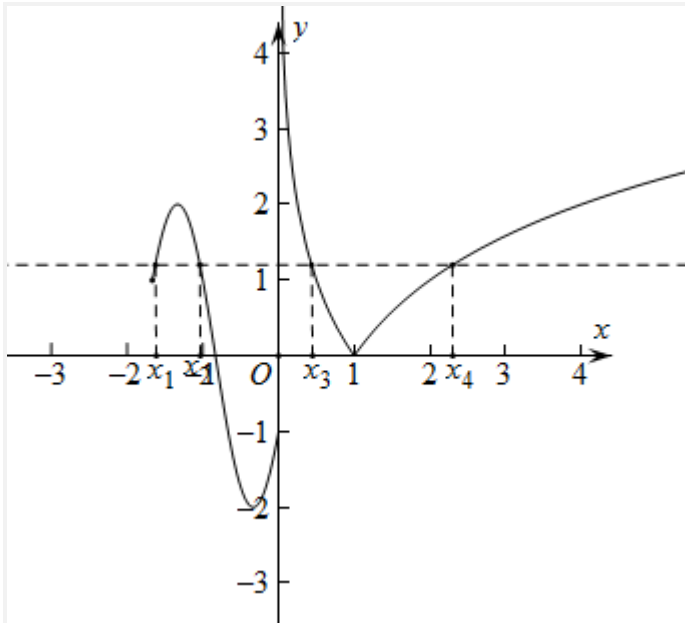
当 $-\frac{5}{3} \leq x \leq 0$ 时 $f(x) = \sqrt{3} \sin \pi x - \cos \pi x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi x \right) = 2 \sin \left(\pi x - \frac{\pi}{6} \right)$

令 $\pi x - \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$, 解得 $x = -\frac{4}{3}$, 当 $x = -\frac{5}{3}$ 时 $f\left(-\frac{5}{3}\right) = 2 \sin \left(-\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

当 $x > 0$ 时 $f(x) = |\log_2 x|$, 令 $f(x) = 2$, 解得 $x = 4$ 或 $x = \frac{1}{4}$,

令 $f(x) = 1$, 解得 $x = 2$ 或 $x = \frac{1}{2}$,

函数 $f(x)$ 的图象如下所示:



因为方程 $f(x) = a$ 恰有四个不同的实数解，即 $y = f(x)$ 与 $y = a$ 恰有四个交点，所以 $1 \leq a < 2$,

不妨令 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，则 $x_1 < x_2 < 0 < x_3 \leq \frac{1}{2} < 2 \leq x_4 < 4$ ，且 x_1 与 x_2 关于 $x = -\frac{4}{3}$ 对称，所以 $x_1 + x_2 = -\frac{8}{3}$ ，

又 $|\log_2 x_3| = |\log_2 x_4|$ ，即 $-\log_2 x_3 = \log_2 x_4$ ，所以 $\log_2 x_4 + \log_2 x_3 = 0$ ，即 $x_3 \cdot x_4 = 1$ ，

所以 $x_3 = \frac{1}{x_4}$ ，

所以 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{8}{3} + \frac{1}{x_4} + x_4$ ，

因为 $y = \frac{1}{x} + x$ 在 $[2, 4)$ 上单调递增，所以 $\frac{1}{x_4} + x_4 \in \left[\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right)$ ，

所以 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{19}{12}\right)$ ；

故选：A

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x+4}, & -4 < x < 2, \\ \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}, & 2 \leq x < 6. \end{cases}$ 若方程 $f(x) - ax^2 = 0$ 有 5 个不等实根，则实数 a

的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$
- D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$

【答案】D

【分析】把方程根的个数问题转化为函数零点个数问题，由方程求出 a 的表达式，根据已知函数的解析式，结合绝对值的性质分类讨论，运用换元法，结合二次函数的单调性进行求解即可.

【详解】因为 $f(0) - a \cdot 0^2 = 0$ ，所以 $x = 0$ 一定是方程 $f(x) - ax^2 = 0$ 的一个实根，

当 $x \neq 0$ 时，由题意可知：此时方程 $f(x) - ax^2 = 0$ 有四个非零实根，

由 $f(x) - ax^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{f(x)}{x^2}$ ，设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ，问题转化为：函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 与函数 $y = a$ 有四个不同交点（交点不能在纵轴上），

(1) 当 $x \in (-4, 0)$ 时， $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{1}{x(x+4)}$ ，令 $t = x(x+4) = (x+2)^2 - 4$ ，

则 $g(t) = -\frac{1}{t}$ ，

当 $x \in (-4, -2)$ 时，函数 $t = x(x+4) = (x+2)^2 - 4$ 单调递减，且 $t \in (-4, 0)$ ，此时 $g(t) = -\frac{1}{t}$

单调递增，且 $g(t) > \frac{1}{4}$ ，所以 $g(x) = -\frac{1}{x(x+4)}$ 此时单调递减，且 $g(x) > \frac{1}{4}$ ；

当 $x \in [-2, 0)$ 时，函数 $t = x(x+4) = (x+2)^2 - 4$ 单调递增，且 $t \in [-4, 0)$ ，此时 $g(t) = -\frac{1}{t}$

单调递增，且 $g(t) \geq \frac{1}{4}$ ，所以 $g(x) = -\frac{1}{x(x+4)}$ 此时单调递增，且 $g(x) \geq \frac{1}{4}$ ；

(2) 当 $x \in (0, 2)$ 时， $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x(x+4)}$ ，令 $m = x(x+4) = (x+2)^2 - 4$ ，

则 $g(m) = \frac{1}{m}$ ，

当 $x \in (0, 2)$ 时，函数 $m = x(x+4) = (x+2)^2 - 4$ 单调递增，且 $m \in (0, 12)$ ，此时 $g(m) = \frac{1}{m}$

单调递减，且 $g(m) > g(12) = \frac{1}{12}$ ，所以 $g(x) = \frac{1}{x(x+4)}$ 此时单调递减，且 $g(x) > \frac{1}{12}$ ；

(3) 当 $x \in [2, 6)$ 时， $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x(6-x)}}$ ，

当 $x \in [2, 3)$ 时，函数 $n = x(6-x)$ 单调递增，此时 $8 \leq n < 9$ ，因此函数 $y = \frac{1}{n}$ 单调递减，

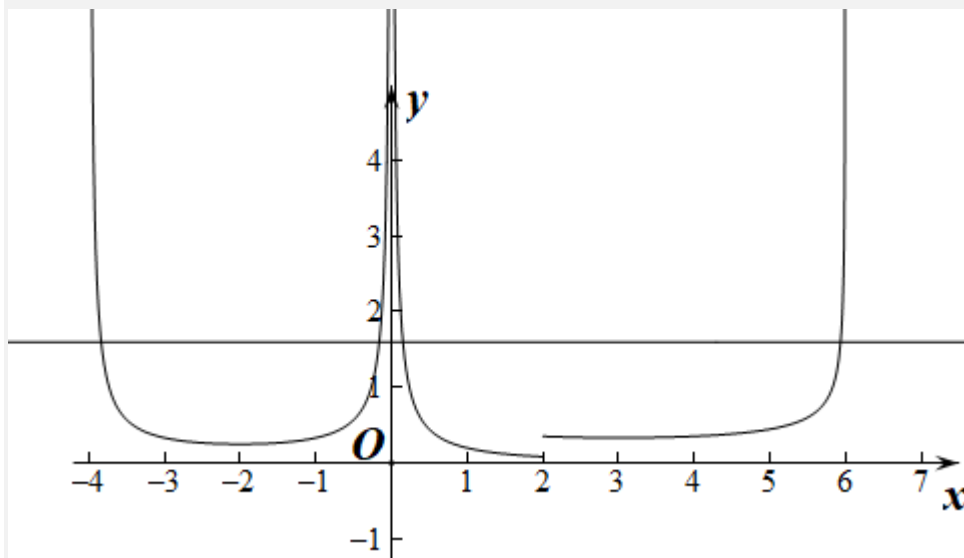
所以函数 $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x(6-x)}}$ 也单调递减，

所以 $g(x) \in (\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$ ，

当 $x \in [3, 6)$ 时，函数 $n = x(6-x)$ 单调递减，此时 $0 < n \leq 9$ ，因此函数 $y = \frac{1}{n}$ 单调递增，

所以函数 $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x(6-x)}}$ 也单调递增，因此 $g(x) \in [\frac{1}{3}, +\infty)$ ，

所以函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在 $x \in (-4, 0) \cup (0, 6)$ 时，与函数 $y = a$ 的图象如下图所示：



根据以上的分析函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 的性质，结合图象可知：要想函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 与函数 $y = a$ 有四个不同交点（交点不能在纵轴上），只需 $a = \frac{1}{3}$ 或 $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，

故选：D

【点睛】关键点清：本题的关键有以下几点：

- 1、把方程根的问题转化为函数零点问题，进而转化为函数图象交点问题；
- 2、根据绝对值的性质分类讨论；
- 3、熟练掌握函数单调性的性质；
- 4、数形结合思想的运用.

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4a, & x > 0 \\ 1 + \log_a |x-1|, & x \leq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，且关于 x 的

方程 $|f(x)| = x + 3$ 恰有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \cup \{\frac{13}{16}\}$ B. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \cup \{\frac{13}{16}\}$ C. $(\frac{3}{4}, \frac{3}{16})$ D. $(0, \frac{3}{4}) \cup \{\frac{13}{16}\}$

【答案】A

【分析】由题意可知 $f(x)$ 在两段上均为增函数，且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上大于或等于 $f(0)$ ，作出 $|f(x)|$ 和 $y = x + 3$ 的图象，根据交点个数判断 $4a$ 与 3 的大小关系，以及直线和抛物线相切的条件，列出不等式组解出.

【详解】解： $\because f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递增函数，

$\therefore y = 1 + \log_a |x-1|$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增，

可得 $0 < a < 1$ ，

且 $0 + 4a \geq 1 + 0$ ，即 $\frac{1}{4} \leq a < 1$ ，

作出 $y=|f(x)|$ 和 $y=x+3$ 的函数草图如图所示：

由图象可知 $|f(x)|=x+3$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一解，

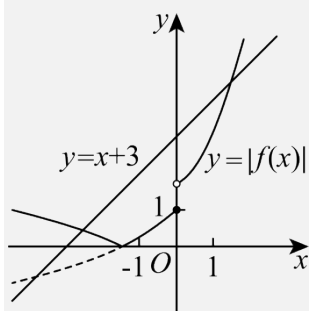
可得 $4a \leq 3$ ，或 $x^2+4a=x+3$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一解，即有 $\Delta=1-4(4a-3)=0$ ，

即有 $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{3}{4}$ 或 $a = \frac{13}{16}$ ；

由 $1+\log_a|x-1|=0$ ，解得 $x=1-\frac{1}{a} \geq -3$ ，即 $x \leq 0$ 时，有且只有一解。

则 a 的范围是 $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \cup \left\{\frac{13}{16}\right\}$ 。

故选：A。



【点睛】本题考查分段函数的单调性，函数零点的个数判断，结合函数图象判断端点值的大小是关键。

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{17}{6}x + 1, & -2 \leq x < 0, \\ \ln x, & 0 < x \leq e, \end{cases}$ 函数 $g(x) = kx$. 若关于 x 的方程 $f(x)$

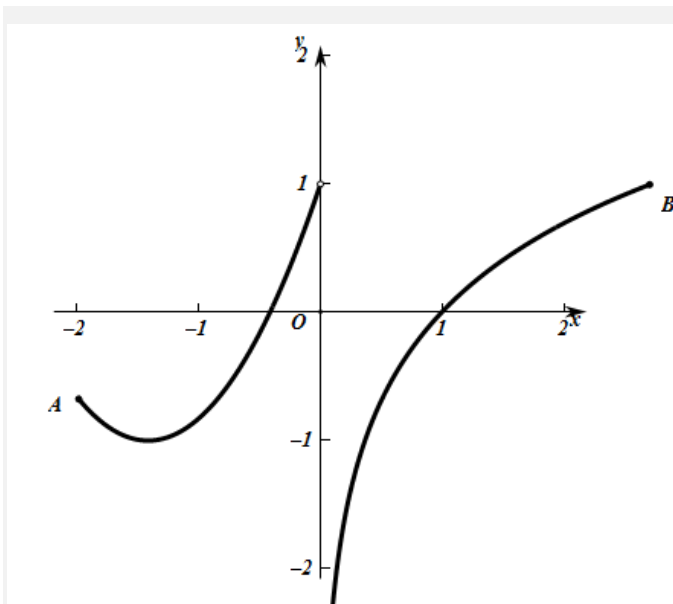
$-g(x)=0$ 有 3 个互异的实数根，则实数 k 的取值范围是

- A. $\left(\frac{1}{e}, \frac{5}{6}\right)$ B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right]$ C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

【答案】B

【分析】由题意作出函数 $f(x)$ 图象，转化条件为要使直线 $y=kx$ 与函数 $f(x)$ 的图象有三个交点，分别考虑直线 $y=kx$ 与函数 $f(x)$ 在 y 轴右侧、左侧的图象的交点个数，即可得解。

【详解】由题意作出函数 $f(x)$ 的图象，如图：



要使关于 x 的方程 $f(x) - g(x) = 0$ 有 3 个互异的实数根，

则要使直线 $y = kx$ 与函数 $f(x)$ 的图象有三个交点，

易知点 $A\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$, $B(e, 1)$,

由图象可知，当 $k \leq 0$ 时，不合题意；

当 $k > 0$ 时，若直线 $y = kx$ 与函数 $f(x)$ 在 y 轴右侧的图象相切，设切点为 $(x_0, \ln x_0)$ ，

由 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 可得 $\frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{x_0} = k$ ，解得 $x_0 = e$ ， $k = \frac{1}{e}$ ，切点恰为点 $B(e, 1)$ ，

所以当 $k = \left(0, \frac{1}{e}\right]$ 时，直线 $y = kx$ 与函数 $f(x)$ 在 y 轴右侧的图象只有一个交点；

若直线 $y = kx$ 与函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象相切，设切点为 $\left(x_0, x_0^2 + \frac{17}{6}x_0 + 1\right)$ ，

由 $\left(x^2 + \frac{17}{6}x + 1\right)' = 2x + \frac{17}{6}$ ，所以 $2x_0 + \frac{17}{6} = \frac{x_0^2 + \frac{17}{6}x_0 + 1}{x_0} = k$ ，

解得 $x_0 = 1$ （舍去）或 $x_0 = -1$ ， $k = \frac{5}{6}$ ，

当直线 $y = kx$ 过点 $A\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$ 时， $k = \frac{1}{3}$ ，

所以当 $k \in \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]$ 时，直线 $y = kx$ 与函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象有两个交点；

综上，要使直线 $y = kx$ 与函数 $f(x)$ 的图象有三个交点，则 $k \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right]$ 。

即实数 k 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right]$ 。

故选：B.

【点睛】本题考查了函数与方程的关系，考查了导数几何意义的应用、导数的计算与数形结合思想，属于中档题。

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 则方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 ()

A. 6

B. 3

C. 4

D. 5

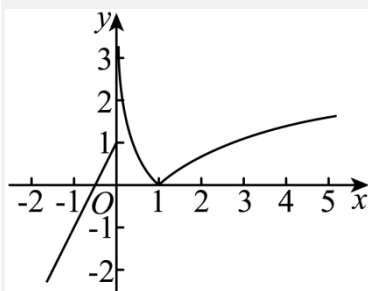
【答案】D

【分析】画出函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 将方程 $f[f(x)] = 3$ 看作 $t = f(x), f(t) = 3$ 交点个数, 运用图象判断根的个数.

【详解】画出函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$

令 $t = f(x)$, $\therefore f(t) = 3$ 有两解 $t_1 \in (0, 1), t_2 \in (1, +\infty)$, 则 $t_1 = f(x), f(x) = t_2$ 分别有 3 个, 2 个解, 故方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 $3+2=5$ 个

故选: D



【点睛】本题综合考查了函数的图象的运用, 分类思想的运用, 数学结合的思想判断方程的根, 难度较大, 属于中档题.

6. 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$, 若方程 $|f(x) + g(x)| = a$ 有 4 个实根,

则 a 的取值范围是 ()

A. $(0, 1]$

B. $(0, 2 - \ln 2)$

C. $[1, 2 - \ln 2]$

D. $[1, 2 - \ln 2)$

【答案】D

【分析】令 $h(x) = f(x) + g(x)$, 求出 $h(x)$ 的解析式, 判断 $h(x)$ 的单调性, 作出 $|h(x)|$ 的图像, 根据图像得出 a 的范围.

【详解】解: 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) + g(x) = -\ln x$, 当 $1 < x < 2$ 时,

$f(x) + g(x) = \ln x - x^2 + 2$, 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) + g(x) = \ln x + x^2 - 6$,

所以设 $h(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x \leq 1 \\ \ln x - x^2 + 2, & 1 < x < 2 \\ \ln x + x^2 - 6, & x \geq 2 \end{cases}$

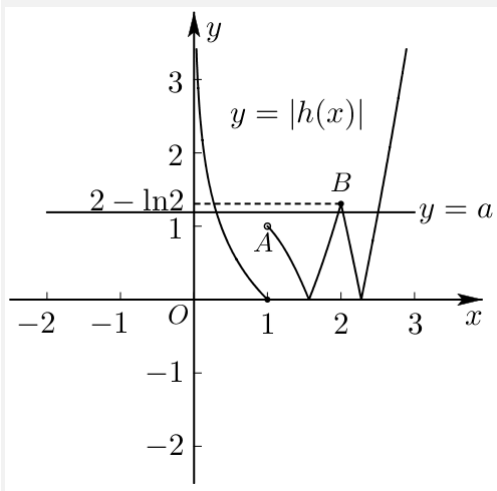
当 $x \in (0,1)$ 时，函数单调递减， $h(x) \in (0, +\infty)$ ；

当 $x \in (1,2)$ 时， $h'(x) = \frac{1}{x} - 2x < 0$ ，函数单调递减， $h(x) \in (\ln 2 - 2, 1)$ ；

当 $x \in [2, +\infty)$ 时， $h'(x) = \frac{1}{x} + 2x > 0$ ，单调递增， $h(x) \in [\ln 2 - 2, +\infty)$ ；

如图，画出函数 $y = |h(x)|$ 的图像，此时 $y_A = 1, y_B = 2 - \ln 2$ ，若 $y = a$ 有四个不同的交点，需满足 $1 \leq a < 2 - \ln 2$ ；

故选：D.



【点睛】本题考查了函数的性质以及根据函数图像求零点个数的问题，也是高考常考到的题型，本题的难点是含绝对值的问题怎么处理，一般来说，需要去绝对值时，根据零点分段法先去绝对值，得到分段函数，若是画 $y = |f(x)|$ 的图像，需先画 $y = f(x)$ ，再将函数在 x 轴的下部分翻上去，根据图像求 $y = a$ 与其交点个数，求参数取值范围.

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 2|, & (x < 2) \\ \frac{3}{x-1}, & (x \geq 2) \end{cases}$ ，若函数 $y = f(x) - k$ 有 3 个不同的零点，则实数 k

的取值范围为 ()

A. (0,1)

B. (0,2)

C. (0,3)

D. (1,3)

【答案】B

【分析】画出函数 $y = f(x)$ 图象，根据 $y = f(x)$ 和 $y = k$ 有 3 个不同的交点可得出.

【详解】当 $x < 2$ 时，先画出 $y = 2^x - 2$ 的图像，

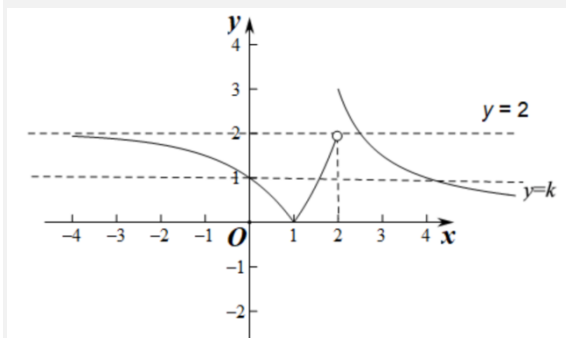
再将 x 轴下方的图像翻折到 x 轴上方，即可，

再画出 $x \geq 2$ 时的图像，

函数 $y = f(x) - k$ 有 3 个不同的零点,

等价于 $y = f(x)$ 和 $y = k$ 有 3 个不同的交点,

则观察图象可得, $0 < k < 2$.



故选: B.

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2, & x \leq 0, \\ |\ln x|, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = 3f^2(x) - (m+3)f(x) + m$ 有 5 个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2)$

B. $(-\infty, -6)$

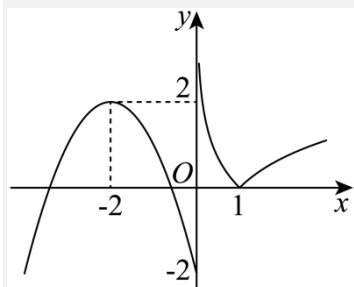
C. $\{6\} \cup (-\infty, -6)$

D. $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$

【答案】B

【分析】根据解析式画出 $f(x)$ 草图, 将问题化为 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$, $y = \frac{m}{3}$ 共有 5 个交点, 数形结合有 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = \frac{m}{3}$ 有 1 个交点, 即可求参数范围.

【详解】作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示,



函数 $g(x) = 3f^2(x) - (m+3)f(x) + m$, 且 $g(x)$ 有 5 个零点,

等价于 $(3f(x) - m)(f(x) - 1) = 0$ 有 5 个解, 即 $f(x) = 1$ 或 $f(x) = \frac{m}{3}$ 共有 5 个解,

等价于 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$, $y = \frac{m}{3}$ 共有 5 个交点.

由图得 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 在 4 个交点,

所以 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = \frac{m}{3}$ 有 1 个交点，则直线 $y = \frac{m}{3}$ 应位于直线 $y = -2$ 下方，
所以 $\frac{m}{3} < -2$ ，解得 $m < -6$ ，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -6)$ 。

故选：B

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^{x+2} - 1|, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) + 2 = 0$ 恰有 6 个不

同的实数根，则 m 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, -\frac{11}{3}\right) \cup [-3, -2\sqrt{2})$ B. $\left(-\frac{11}{3}, -2\sqrt{2}\right]$
C. $\left(-\infty, -\frac{11}{3}\right) \cup \left(-\frac{11}{3}, -2\sqrt{2}\right)$ D. $[-3, -2\sqrt{2})$

【答案】A

【分析】根据分段函数的解析式，作出函数的图象，根据图象可得当 t 取不同值时，
 $f(x) = t$ 的交点个数，即可结合二次函数零点的分布求解。

【详解】根据 $f(x) = \begin{cases} |2^{x+2} - 1|, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$ ，作出 $f(x)$ 的大致图象如下：

由图可知：当 $f(x) = 0$ 时，此时由两个根，分别为 $-2, 1$ ，

当 $0 < t < 1$ 时，此时 $f(x) = t$ 有 4 个交点，

当 $1 \leq t \leq 3$ 时，此时 $f(x) = t$ 有 3 个交点，

当 $t > 3$ 时，此时 $f(x) = t$ 有 2 个交点，

故要使得 $[f(x)]^2 + mf(x) + 2 = 0$ 由 6 个不同的零点，则令 $f(x) = t$ ， $t^2 + mt + 2 = 0$ 有 6 个不同的实数根，

$f(x) = 0$ 显然不是 $[f(x)]^2 + mf(x) + 2 = 0$ 的根，

设 $g(t) = t^2 + mt + 2$ 的两个零点分别为 t_1, t_2 ，且 $t_1 \neq t_2$ ，

故当 $0 < t_1 < 1, t_2 > 3$ 时，此时 $f(x) = t_1$ 有 4 个交点， $f(x) = t_2$ 有 2 个交点，满足题意，

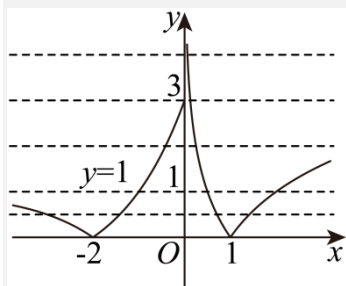
故需要满足 $\begin{cases} g(0) = 2 > 0 \\ g(1) = 3 + m < 0 \\ g(3) = 11 + 3m < 0 \end{cases}$ ，解得 $m < -\frac{11}{3}$ ，

当 $1 \leq t_1 < t_2 \leq 3$ 时，此时 $f(x) = t_1$ 有 3 个交点， $f(x) = t_2$ 有 3 个交点，满足题意，

$$\text{故需要满足} \begin{cases} 1 < \frac{-m}{2} < 3 \\ \Delta = m^2 - 8 > 0 \\ g(1) = 3 + m \geq 0 \\ g(3) = 11 + 3m \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } -3 \leq m < -2\sqrt{2},$$

综上可得 $-3 \leq m < -2\sqrt{2}$ 或 $m < -\frac{11}{3}$

故选：A



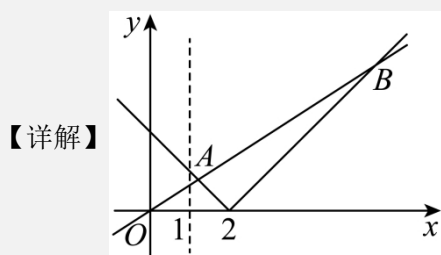
10. 若关于 x 的不等式 $kx > |x-2|$ 恰好有 4 个整数解，则实数 k 的范围为 ()

- A. $\left(0, \frac{2}{5}\right]$ B. $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ C. $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right]$ D. $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$

【答案】C

【分析】数形结合可知 $0 < k < 1$ ，进而可得 4 个整数解分别为 2，3，4，5，所以

$x = \frac{2}{1-k} \in (5, 6]$ ，即可解得 k 的取值范围.



【详解】

函数 $y = kx$ 与 $y = |x-2|$ 的图像如图所示，

可知当 $k < -1$ 时，两函数的图像有 1 个交点，不等式有无数个整数解，

当 $-1 \leq k < 0$ ，两函数的图像无交点，不等式无整数解，

当 $k = 0$ 时，两函数的图像有 1 个交点，不等式无整数解，

当 $k \geq 1$ 时，两函数的图像有 1 个交点，不等式有无数个整数解，

所以 $0 < k < 1$ ，则 $x_A > 1$ ，

所以不等式的 4 个整数解分别为 2，3，4，5，

$$\begin{cases} y = kx \\ y = x - 2 \end{cases}, \text{解得 } x_B = \frac{2}{1-k} \in (5, 6],$$

$$\text{解得 } \frac{3}{5} < k \leq \frac{2}{3},$$

故选：C.

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - ax, & x \geq 0, \\ -x^2 - (a+2)x + 1, & x < 0 \end{cases}$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(e, +\infty)$ D. $(e^2, +\infty)$

【答案】C

【分析】先分析 $x < 0$ 时二次函数零点的情况，而 $x \geq 0$ 时可将零点的问题转化为两个函数图象交点的问题，利用导数求解即可.

【详解】当 $x < 0$ 时， $\Delta = [-(a+2)]^2 - 4 \times (-1) \times 1 = (a+2)^2 + 4 > 0$ ，且 $f(0) = 1 > 0$ ，

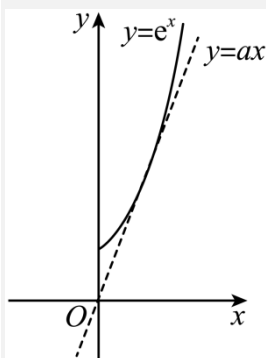
则二次函数开口向下且在 $x < 0$ 内抛物线与 x 轴只有一个交点，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有唯一零点，

因为 $f(x)$ 有 3 个零点，所以 $f(x) = e^x - ax$ 在 $[0, +\infty)$ 上有 2 个零点，

即 $y = e^x$ 与 $y = ax$ 的图象有 2 个交点，

如图当直线与曲线相切时设切点为 (x_0, e^{x_0}) ， $y' = e^x$ ，所以 $\begin{cases} e^{x_0} = a, \\ e^{x_0} = ax_0, \end{cases}$ 解得 $a = e$ ，



由图可知， $a > e$ 时， $y = e^x$ 与 $y = ax$ 的图象有 2 个交点，

所以实数 a 的取值范围是 $(e, +\infty)$.

故选：C.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x - \ln x, & x > 0, \\ x + \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 若 $y = f(x) - kx$ 恰有两个零点，则 k 的取值范围为

()

- A. $\left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$ B. $\left(1, 1 + \frac{1}{e}\right)$
C. $\left(1, 1 + \frac{1}{e}\right) \cup \left(1 + \frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $\left(1 - \frac{1}{e}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

【答案】D

【分析】将问题转化为 $\frac{f(x)}{x} = k$ 恰有两个实数根，求导确定函数的单调性，进而画出函数的图象，结合函数图象即可确定 k 的取值.

【详解】 $y = f(x) - kx$ 恰有两个零点，即 $f(x) - kx = 0$ 恰有两个实数根，由于 $x \neq 0$ ，

所以 $f(x) - kx = 0$ 恰有两个实数根等价于 $\frac{f(x)}{x} = k$ 恰有两个实数根，

$$\text{令 } g(x) = \frac{f(x)}{x}, \text{ 则 } g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \\ 1 + \frac{1}{x^2}, & x < 0 \end{cases},$$

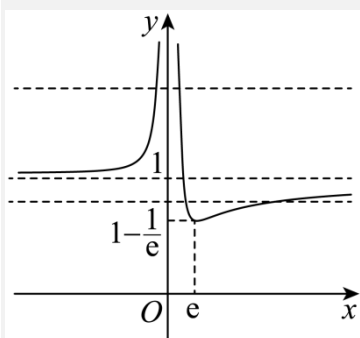
当 $x > 0$ 时， $g(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$ ，故当 $x > e$, $g'(x) > 0$ ，此时 $g(x)$ 单调递增，

当 $0 < x < e$, $g'(x) < 0$ ，此时 $g(x)$ 单调递减，故当 $x = e$ 时， $g(x)$ 取极小值也是最小值，

且当 $x > 1$ 时， $\frac{\ln x}{x} > 0$, $\therefore g(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} < 1$ ，

当 $x < 0$ 时， $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 1$ ，且 $g(x)$ 单调递增，

在直角坐标系中画出 $g(x)$ 的大致图象如图：



要使 $g(x) = k$ 有两个交点，则 $k \in \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ ，

故选：D

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 2x|, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ ，若方程 $f(x) = a(x+3)$ 有四个不同的实数根，则

实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 4 - 2\sqrt{3})$

B. $(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$

C. $(0, 4 - 2\sqrt{3}]$

D. $(0, 4 - 2\sqrt{3})$

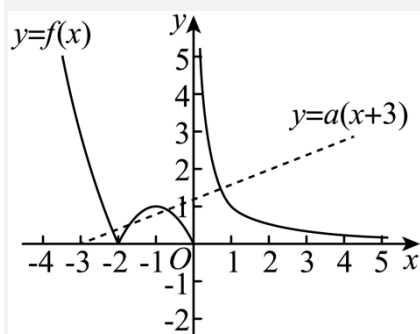
【答案】D

【分析】方程 $f(x) = a(x+3)$ 有四个不同的实数根，即直线 $y = a(x+3)$ 与曲线 $y = f(x)$ ，

作出函数图象，即转化为 $x^2 + (2+a)x + 3a = 0$ 在 $(-2, 0)$ 有两个不等实根，可得答案.

【详解】设 $y = a(x+3)$ ，该直线恒过点 $(-3, 0)$ ，方程 $f(x) = a(x+3)$ 有四个不同的实数根

如图作出函数 $y = f(x)$ 的图象，



结合函数图象，则 $a > 0$ ，

所以直线 $y = a(x+3)$ 与曲线 $y = -x^2 - 2x, x \in (-2, 0)$ 有两个不同的公共点，

所以 $x^2 + (2+a)x + 3a = 0$ 在 $(-2, 0)$ 有两个不等实根，

令 $g(x) = x^2 + (2+a)x + 3a$ ，

$$\text{实数 } a \text{ 满足 } \begin{cases} \Delta = (2+a)^2 - 12a > 0 \\ -2 < -\frac{2+a}{2} < 0 \\ g(0) = 3a > 0 \\ g(-2) = a > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < a < 4 - 2\sqrt{3},$$

所以实数 a 的取值范围是 $(0, 4 - 2\sqrt{3})$.

故选：D.

14. 若函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2ax + 1, & x < 0 \\ \ln(x+1) + a, & x \geq 0 \end{cases}$ 恰有 2 个零点，则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(0, +\infty)$

【答案】A

【分析】分类讨论 $a = 0$ ， $a < 0$ 或 $a > 0$ 三种情况，然后根据函数判断

【详解】①当 $a = 0$ 时， $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 只有一个零点 0，不符合题意；

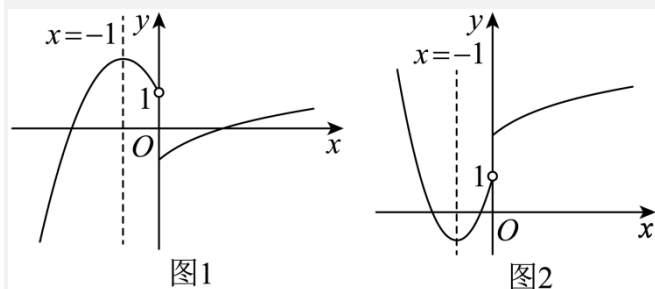
②当 $a < 0$ 时，作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图 1， $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $[0, +\infty)$ 上各有一个零点，符合题意；

③当 $a > 0$ 时，作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图 2， $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上没有零点.

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有两个零点，此时必须满足 $f(-1) = 1 - a < 0$ ，解得 $a > 1$ 。

综上，得 $a < 0$ 或 $a > 1$ 。

故选：A



15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & (x < 0) \\ xe^{1-x}, & (x \geq 0) \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f^2(x) - af(x) + a^2 - a = 0$ 有四个不等实根。则实数 a 的取值范围为（ ）

- A. $(0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ C. $(0, 1]$ D. $(-1, 0) \cup \{1\}$

【答案】C

【分析】画出函数的图象，利用换元法，并构造函数 $g(t) = t^2 - at + a^2 - a$ ，通过讨论 t 的取值范围即可求解。

【详解】当 $x \geq 0$ ， $f(x) = xe^{1-x}$ ， $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$ ，

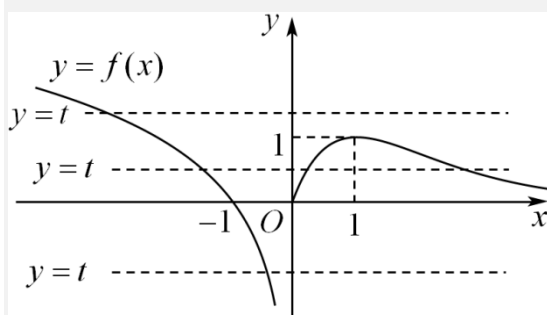
令 $f'(x) = (1-x)e^{1-x} > 0$ 解得 $0 \leq x < 1$ ，

令 $f'(x) = (1-x)e^{1-x} < 0$ 解得 $x > 1$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调递增， $(1, +\infty)$ 单调递减，

$f(x)_{\max} = f(1) = 1$ ，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) > 0$ ，

作出函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & (x < 0) \\ xe^{1-x}, & (x \geq 0) \end{cases}$ 的图象如下，



关于 x 的方程 $f^2(x) - af(x) + a^2 - a = 0$ 有四个不等实根，

令 $t = f(x)$ ， $g(t) = t^2 - at + a^2 - a$ ，则 $g(t) = 0$ 有两个不相等的实数根，

(i) $t_1 = 0, t_2 = 1$, 此时 $f(x) = 0, f(x) = 1$ 各有 2 个根, 满足题意,

$$\text{所以 } \begin{cases} g(0) = a^2 - a = 0 \\ g(1) = 1 - a + a^2 - a = 0 \end{cases} \text{ 解得 } a = 1,$$

(ii) $t_1 \in (0, 1), t_2 \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$,

$$\text{由 } g(1) = (a-1)^2 > 0,$$

则函数 $g(t) = 0$ 的一个根在 $(0, 1)$, 另一个根在 $(-\infty, 0)$,

$$\text{所以 } g(0) = a^2 - a < 0 \text{ 解得 } 0 < a < 1,$$

综上, $a \in (0, 1]$.

故选:C.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) + m$ 有两个零点, 则 m 的取值范围是 ()

A. $[-1, 0)$

B. $[-1, +\infty)$

C. $(-\infty, 0)$

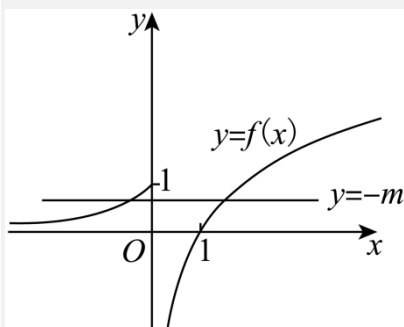
D. $(-\infty, 1]$

【答案】A

【分析】 $g(x)$ 存在两个零点, 等价于 $y = -m$ 与 $f(x)$ 的图象有两个交点, 数形结合求解.

【详解】 $\because g(x) = f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$

$\therefore g(x)$ 存在两个零点, 等价于 $y = -m$ 与 $f(x)$ 的图象有两个交点, 在同一直角坐标系中绘制两个函数的图象:



由图可知, 保证两函数图象有两个交点, 满足 $0 < -m \leq 1$, 解得: $m \in [-1, 0)$

故选: A.

17. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x - a - 5, & x \leq 0 \\ \ln(x^2 - 4x - a), & x > 0 \end{cases}$ 恰有 3 个零点, 则 a 的取值范围为 ()

A. $(-5, -4)$

B. $(-4, -3)$

C. $(-5, -4]$

D. $(-4, -3]$

【答案】A

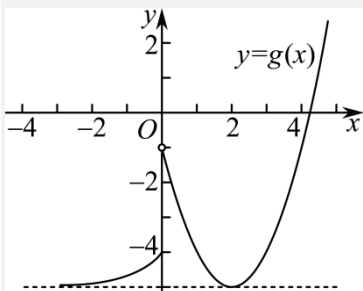
【分析】令 $f(x)=0$ ，则有 $a=\begin{cases} 3^x-5, x\leq 0 \\ x^2-4x-1, x>0 \end{cases}$ ，作出函数 $g(x)=\begin{cases} 3^x-5, x\leq 0 \\ x^2-4x-1, x>0 \end{cases}$ 的图

象，结合图象即可得答案.

【详解】解：由 $f(x)=0$ ，

$$\text{得 } a=\begin{cases} 3^x-5, x\leq 0 \\ x^2-4x-1, x>0 \end{cases},$$

作出函数 $g(x)=\begin{cases} 3^x-5, x\leq 0 \\ x^2-4x-1, x>0 \end{cases}$ 的图象，如图所示：



由图可知，当 $a\in(-5, -4]$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有 3 个交点，

从而 $f(x)$ 有 3 个零点，

但 $x^2-4x-a>0$ 对 $x>0$ 恒成立，则 $a<-4$ ，

故 $a\in(-5, -4)$.

故选：A.

18. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+x, x<0 \\ \sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right), 0\leq x\leq\pi \end{cases}$ ，有 4 个不同的零点，则正实数 ω 的取值范围

为 ()

- A. $\left[\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$ B. $\left(\frac{7}{3}, +\infty\right]$ C. $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$ D. $\left[\frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right]$

【答案】A

【分析】根据函数的单调性及零点存在定理可得当 $x<0$ 时函数有一个零点，然后根据三角函数的图象和性质即得.

【详解】当 $x<0$ 时， $f(x)=e^x+x$ 单调递增，且 $f(-1)=e^{-1}-1<0$ ， $f(0)=1>0$ ，故 $x<0$ 有一个零点，

所以当 $0\leq x\leq\pi$ 时，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 有 3 个零点，

令 $f(x)=0$ ，即 $\omega x - \frac{\pi}{3} = k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{3}}{\omega}$ ，

由题可得区间 $[0, \pi]$ 内的 3 个零点分别是 $k=0, 1, 2$ 取得，

所以 π 即在 $k=2$ 和 $k=3$ 之间，即 $\frac{2\pi + \frac{\pi}{3}}{\omega} \leq \pi < \frac{3\pi + \frac{\pi}{3}}{\omega}$ ，

解得 $\frac{7}{3} \leq \omega < \frac{10}{3}$ 。

故选：A。

19. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x > 0, \\ x^2 + 2x, & x \leq 0. \end{cases}$ ，若 $g(x) = f(x) - a$ 有 3 个零点，则 a 的取值范围为

()

A. $(-1, 0)$

B. $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$

C. $\left[0, \frac{1}{e}\right)$

D. $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \{-1\}$

【答案】B

【分析】设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$)，求出函数 $h(x)$ 的单调区间和最小值，再利用数形结合分析得解。

【详解】解：设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$)， $\therefore h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

令 $h'(x) > 0$ ， $\therefore 0 < x < e$ ，令 $h'(x) < 0$ ， $\therefore x > e$ ，

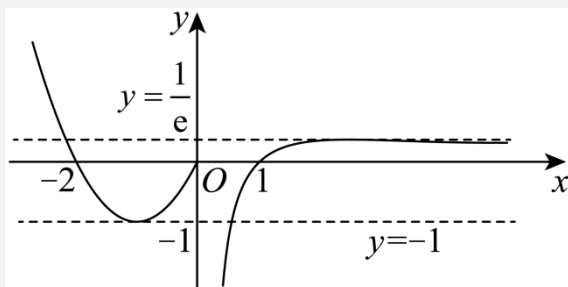
所以函数 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 单调递增，在 $(e, +\infty)$ 单调递减。

所以 $h(x)_{\max} = \frac{1}{e}$ 。

令 $g(x) = f(x) - a = 0$ ， $\therefore f(x) = a$ 有三个零点。作出函数 $y = f(x)$ 和 $y = a$ 的图象如图所示，

所以 a 的取值范围为 $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ 。

故选：B



20. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x+2)(|x|-1), & x \geq -1 \\ 1 + \frac{3}{x-1}, & x < -1 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - mx - 2m$ 有 4 个零点，

则 m 的取值范围是 ()

A. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

B. $(0, +\infty) \cup \{-1\}$

C. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

D. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{0, -\frac{1}{3}\right\}$

【答案】C

【分析】将问题转化为方程 $f(x)=m(x+2)$ 有 4 个根, 当 $x=-2$ 时, 可得是方程

$f(x)=m(x+2)$ 的根, 当 $x \neq -2$ 时, 可得 $m = \frac{f(x)}{x+2} = \begin{cases} |x|-1, & x \geq -1, \\ \frac{1}{x-1}, & x < -1, \end{cases}$ 然后画出函数图象, 根

据图象求解即可

【详解】 $g(x)$ 的零点即方程 $f(x) = m(x+2)$ 的根,

当 $x = -2$ 时, 容易验证 $x = -2$ 为方程 $f(x) = m(x+2)$ 的根.

当 $x \neq -2$ 时, 由 $f(x) = m(x+2)$, 可得 $m = \frac{f(x)}{x+2} = \begin{cases} |x|-1, & x \geq -1, \\ \frac{1}{x-1}, & x < -1, \end{cases}$

画出函数 $y = \begin{cases} |x| - 1, & x \geq -1, \\ \frac{1}{x-1}, & x < -1 \text{ 且 } x \neq -2 \end{cases}$ 的图象, 如图所示.

当 $g(x)$ 有 4 个零点时, 直线 $y=m$ 与函数 $y=\begin{cases} |x|-1, x \geq -1, \\ \frac{1}{x-1}, x < -1 \text{ 且 } x \neq -2 \end{cases}$ 的图象有 3 个交点,

由图可得 $-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3} < m < 0$.

故选：C

