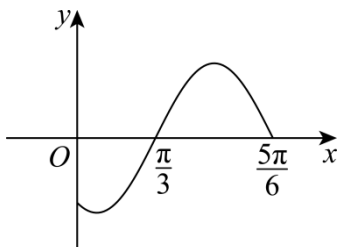


三角函数图像性质

一、单选题

1. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < 2\pi$) 的部分图象如图所示, 给出下列结论:



① $f(x)$ 的最小正周期为 2π ;

② $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增;

③ 当 $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right]$;

④ $f(x)$ 的图象可以由函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度得到.

其中错误结论的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【分析】由图象中两个零点间的距离, 可直接求得 $f(x)$ 的最小正周期, 判断①; 求得 $f(x)$ 的解析式, 用整体代换的思想判断②, ③; 由图象平移的规则知函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度得到函数的解析式, 可判断④.

【详解】对于①, 由图可知 $f(x)$ 的最小正周期为 $2 \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \pi$. 所以①错误;

对于②, 由①知, $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$.

$$\text{根据图象有 } \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0 \\ \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{6} + \varphi\right) = 0 \\ \sin \varphi < 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2 \times \frac{5\pi}{6} + \varphi = (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 < \varphi < 2\pi \\ \sin \varphi < 0 \end{cases}$$

解得 $\varphi = \frac{4\pi}{3}$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

当 $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

令 $t = 2x + \frac{4\pi}{3}$, 因为 $t = 2x + \frac{4\pi}{3}$ 是增函数, $y = \sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 是增函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增;

所以②正确;

对于③, 由②知, $f(x) = \sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

当 $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ 时, $2x + \frac{4\pi}{3} \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$, 所以 $\sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

所以③错误;

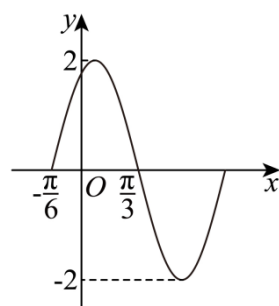
对于④, 函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度得到函数

$g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = \sin 2x \neq f(x)$, 所以④错误.

所以四个结论中错误的个数为 3.

故选: C.

2. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, $\left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示, 则下列结论正确的是 ()



A. $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

B. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 再将所有点的横坐标变为原来 2 倍, 得到 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)$ 的对称中心为 $\left(k\pi - \frac{\pi}{6}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$

D. 若 $-\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3}$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 + x_2) = \sqrt{3}$

【答案】D

【分析】根据函数图象确定相关参数, 可求出函数解析式, 判断 A; 利用正弦函数图象平移、伸缩变换可判断 B; 根据正弦函数的对称性可判断 C; 对于 D, 根据正弦函数图象的对称性结合已知图象得到 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6}$, 代入求值, 即可判断.

【详解】已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, $\left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$.

由图知 $A = 2$, $T = 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \pi$, 故 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

又过点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$, 且该点在函数增区间上,

故 $2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \varphi = 0$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

则 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 故 A 错误;

将 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 可得

$f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 再将所有点的横坐标变为原来 2 倍,

可得 $f\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 即 $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 故 B 错误;

令 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 即对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$, 故 C 错误;

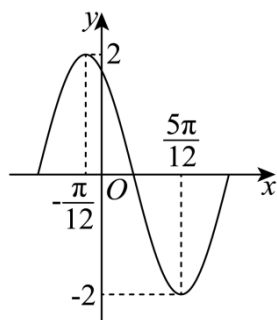
因为 $-\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3}$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 根据正弦函数图象的对称性结合已知图象, 可知

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{12},$$

则 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x_1 + x_2) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, 故 D 正确.

故选: D

3. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, -\pi < \varphi < \pi)$ 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的个数是 ()



① $\omega = 2$

② 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 对称

③ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ 上单调递减

④ 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $y = g(\lambda x)$ ($\lambda > 0$) 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有两个零点和两个极值点, 则 $\lambda \in \left[\frac{5}{6}, \frac{13}{12}\right)$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【分析】根据图象, 求出 $f(x)$, 即可判断①的正误, 再利用三角函数的图象及性质对②③④

逐一分析判断即可求解.

【详解】由题图得 $A = 2$, $\frac{T}{2} = \frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2\omega}$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 故①正确;

则 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$,

由 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = 2$, 得 $\varphi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

又 $-\pi < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 故 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$,

因为 $f\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 2\sin\left[2 \times \left(-\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = 0$,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 对称, 故②正确;

令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{2\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$,

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$,

令 $k=2$ ，得到 $f(x)$ 的一个减区间为 $\left[\frac{23\pi}{12}, \frac{29\pi}{12}\right]$ ，又 $2\pi < \frac{29\pi}{12} < \frac{5\pi}{2}$

则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ 上先单调递减再单调递增，故③错误；

因为 $g(x) = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

所以 $g(\lambda x) = 2\sin\left(2\lambda x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\lambda > 0$. 由 $0 \leq x \leq \pi$ ，得 $\frac{\pi}{3} \leq 2\lambda x + \frac{\pi}{3} \leq 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3}$ ，

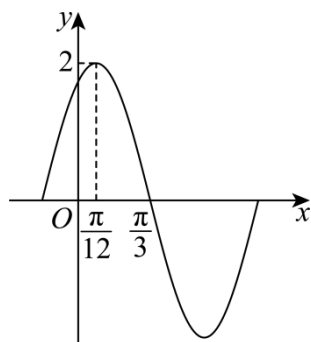
若函数 $y = g(\lambda x)$ ($\lambda > 0$) 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有两个零点和两个极值点，

则 $2\pi \leq 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{2}$ ，解得 $\frac{5}{6} \leq \lambda \leq \frac{13}{12}$ ，故④错误.

故选：B.

4. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，关于该函数

有下列四个说法：



① $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减

② $f(x)$ 的图象可由 $y = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到

③ $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

④ $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $-\sqrt{3}$

以上四个说法中，正确的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【分析】根据题中给定图象可得函数解析式，然后利用正弦函数的性质和图象变换对各个选项进行判断即可.

【详解】由图可知， $A=2$, $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$ ，即 $T = \pi$ ，则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，

此时 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ ，又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 2$ ，

则 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，则 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

对于①，当 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ，

因为函数 $y = \sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减，故①正确；

对于②， $y = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，故②正确；

对于③，令 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，解得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，

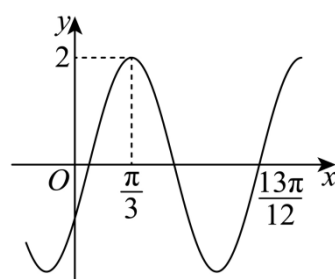
所以 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，故③错误；

对于④，当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ ，则 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ，

则 $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in [-\sqrt{3}, 2]$ ，则 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $-\sqrt{3}$ ，故④正确。

故选：C。

5. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示，则下列结论正确的个数是 ()



①函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称；

②函数 $f(x)$ 的解析式可以为 $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ；

③函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{24}\right)$ 上的值域为 $[0, 2]$ ；

④若将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{2}{3}$ 倍，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，

则所得函数的解析式是 $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right)$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【分析】由图象求得函数解析式，然后根据正弦函数的性质判断各结论.

【详解】由已知 $A = 2$, $T = \left(\frac{13}{12}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{4}{3} = \pi$. $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

$$2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 又 } |\varphi| < \pi, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \neq 0, \text{ ①错};$$

$$\text{又 } f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right), \text{ ②正确};$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{24}\right) \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{11\pi}{12}\right), \text{ 因此 } f(x) \in (0, 2], \text{ ③错误};$$

若将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{2}{3}$ 倍, 纵坐标不变, 得 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 则所得函数的解析式是

$$y = 2\sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(3x - \frac{5\pi}{12}\right), \text{ ④错},$$

所以正确的只有一个,

故选: A.

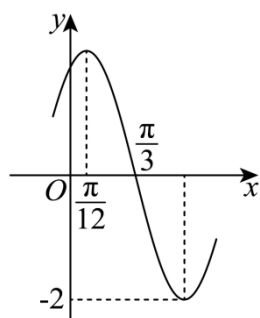
6. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 给出下

列结论:

$$\text{① } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}; \quad \text{② 当 } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ 时, } f(x) \in [-2, \sqrt{3}];$$

$$\text{③ 函数 } f(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right], (k \in \mathbb{Z});$$

$$\text{④ 将 } f(x) \text{ 的图象向右平移 } \frac{\pi}{3} \text{ 个单位, 得到 } y = 2\sin 2x \text{ 的图象; 其中正确的结论个数是 ()}$$



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【分析】先根据图象，求出函数的解析式，在结合正弦函数的图象和性质，逐项分析，即可得到答案.

【详解】由图象可知： $A = 2$ ， $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$.

由 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \Rightarrow 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 2$ ，又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ ，故①正确；

当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ 时， $-\frac{2\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$ ，所以 $-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $-2 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$ ，故②

正确；

由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{12}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

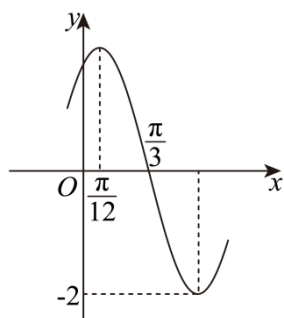
所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right]$ ， $k \in \mathbb{Z}$. 故③正确；

将的图象向右平移个单位，得到 $y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，故④错误.

故选：C

7. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，则不正确的是

()



A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$

B. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到 $y = 2\sin 2x$ 的图象

C. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4$

D. 函数的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$

【答案】B

【分析】根据图象求出函数的解析式, 利用三角函数的性质及函数的平移变换即可求解.

【详解】由图知, $A = 2, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$, 即 $T = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$,

所以 $\omega = 2$, 由题意 $2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0$, 根据 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 为下降零点,

则 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $\varphi = (2k+1)\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

又因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x)$ 的解析式为: $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

对 A, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, 故 A 正确;

对 B, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得 $y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

故 B 错误;

对 C, 由三角函数的性质知, $-2 \leq f(x) \leq 2$, 所以 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4$, 故

C 正确;

对 D, 由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 得 $k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$, 故 D 正确.

故选: B.

8. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示

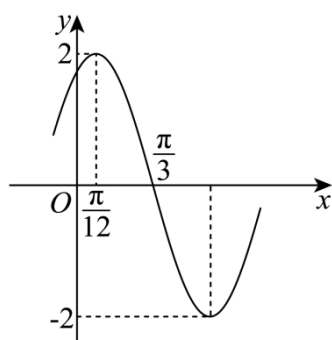
① 函数 $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称

② 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称

③ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增

④ 若函数 $g(x) = f(x) - a$ ($x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) 有两个零点, 则实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right]$

以上说法正确的个数有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【分析】根据图象确定函数的解析式, 由正弦函数性质判断 ABC; 结合函数的零点个数与函数图象的交点个数之间的关系即可判断 D.

【详解】由图可知 $A = 2$, $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$, 所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 得 $\omega = 2$,

则 $f(x) = 2 \sin(2x + \varphi)$, 将点 $\left(\frac{\pi}{12}, 2\right)$ 代入得: $2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 2$,

所以 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

对于①, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(-2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin 0 = 0$,

所以点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称点, 故①正确;

对于②, 因为 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -2$, 为最小值,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称, 故②正确;

对于③, 由 $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$, 得 $-\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 0$,

令 $t = 2x + \frac{\pi}{3}$ ，则 $-\pi \leq t \leq 0$ ，函数 $y = \sin t$ 在 $t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，故③错误；

对于④，若 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个零点，则方程 $f(x) - a = 0$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个根，

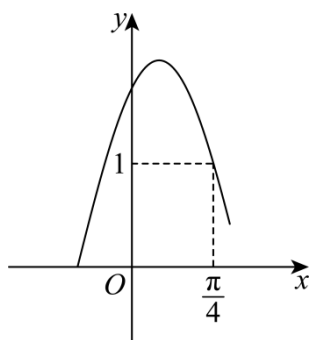
即函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个交点.

由 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，得 $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$ ，所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ，

所以 $f(x) \in [-\sqrt{3}, 2]$ ，所以 $a \in [\sqrt{3}, 2)$ ，故④错误.

故选：B.

9. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x$ ($x \in \mathbf{R}$, $\omega > 0$) 的最大值为 2，其部分图象如图所示，则下列命题正确的个数为 ()



① $a \cdot \omega = 2\sqrt{3}$;

② 函数 $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数;

③ 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, m]$ 上至少有 4 个零点，则 $m \geq \frac{11\pi}{6}$;

④ $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增.

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】B

【分析】利用辅助角公式化简函数解析式，再根据函数的最大值及 $f(0) > 0$ 求出 a ，由

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ 求出 ω 的取值，再根据周期确定 ω 的值，即可得到函数解析式，即可判断①，根

据图象变换结合奇偶性判断②；根据题意以 $2x + \frac{\pi}{3}$ 为整体，结合正弦函数性质分析判断③④.

【详解】因为 $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x = \sqrt{a^2 + 1} \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$ 、

$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$),

由题意可知: $\sqrt{a^2+1}=2$, 且 $a>0$, 解得 $a=\sqrt{3}$,

$$\text{则 } f(x)=\sin \omega x+\sqrt{3} \cos \omega x=2 \sin \left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{又因为 } f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2 \sin \left(\frac{\pi \omega}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1, \text{ 即 } \sin \left(\frac{\pi \omega}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\text{结合图象可知 } \frac{\pi \omega}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{5 \pi}{6}+2 k \pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \omega=2+8 k, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{且 } \frac{T}{2}>\frac{\pi}{4}, \omega>0, \text{ 则 } \frac{2 \pi}{\omega}>\frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } 0<\omega<4,$$

所以 $k=0, \omega=2$, 可知 $a \omega=2 \sqrt{3}$, 故①正确;

$$\text{所以 } f(x)=2 \sin \left(2 x+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{对于②: } f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2 \sin \left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2 \sin 2 x \text{ 为奇函数, 故②正确;}$$

$$\text{对于③: 因为 } x \in(0, m], \text{ 则 } 2 x+\frac{\pi}{3} \in\left(\frac{\pi}{3}, 2 m+\frac{\pi}{3}\right],$$

$$\text{由题意可得: } 2 m+\frac{\pi}{3} \geq 4 \pi, \text{ 解得 } m \geq \frac{11 \pi}{6}, \text{ 故③正确;}$$

$$\text{对于④: 因为 } x \in\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right), \text{ 则 } 2 x+\frac{\pi}{3} \in\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2 \pi}{3}\right),$$

$$\text{且 } y=\sin x \text{ 在 }\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2 \pi}{3}\right) \text{ 内不单调, 所以 } f(x) \text{ 在区间 }\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ 上不单调, 故④错误;}$$

所以正确的个数为 3.

故选: B.

【点睛】方法点睛: 函数 $y=A \sin (\omega x+\varphi)$ 的解析式的确定:

(1) A 由最值确定;

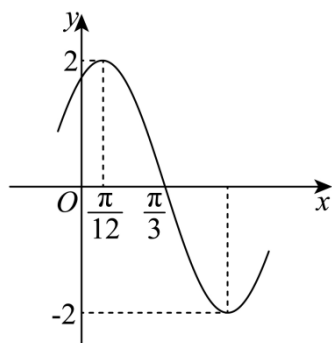
(2) ω 由周期确定;

(3) φ 由图象上的特殊点确定.

提醒: 根据“五点法”中的零点求 φ 时, 一般先根据图象的升降分清零点的类型.

10. 已知函数 $f(x)=A \sin (\omega x+\varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, A>0, \omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示,

则下列说法正确的是 ()



- A. 直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴
- B. $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
- C. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增
- D. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后, 可得到一个偶函数的图象

【答案】D

【分析】根据函数图象得 A, ω, φ , 从而得 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 再利用 $y = \sin x$ 的图象与性质, 对各个选项逐一分析判断即可得出答案.

【详解】由图易知 $A = 2$, $\frac{1}{4}T = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$, 得 $T = \pi$,

又 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$, $\omega > 0$, 所以 $\omega = 2$, 因为点 $\left(\frac{\pi}{12}, 2\right)$ 在函数图象上, 所以

$$2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

得到 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

对于选项 A, 由 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 故直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 不是 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以选项 A 错误;

对于选项 B, 由 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi$, 得 $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, 所以选项 B 错误;

对于选项 C, 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 得 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

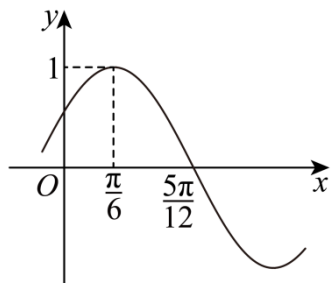
当 $k = 0$ 时, 得到 $-\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{12}$, 所以选项 C 错误;

对于选项 D, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得 $y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\cos 2x$,

所以平移后的函数是偶函数，故选项 D 正确.

故选：D.

11. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，则下列说法错误的是 ()



A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时， $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

C. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度可得函数 $g(x) = \sin 2x$ 的图象

D. 将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到的函数图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 对称

【答案】B

【分析】先根据 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 中 A ， ω ， φ 的几何意义，求得 $f(x)$ 的解析式，再结合正弦函数的图象和性质，函数图象的变换，逐一分析选项即可.

【详解】对于 A，由图可知， $A=1$ ，函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = 4 \times \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = \pi$ ，故 A 正确；

由 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ ， $\omega > 0$ ，知 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ，

因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ ，所以 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$ ，所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

即 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

对于 B，当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ，

所以 $\sin 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, 故 B 不正确;

对于 C, 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,

得到 $g(x) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin 2x$ 的图象, 故 C 正确;

对于 D, 将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 纵坐标不变,

得到 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,

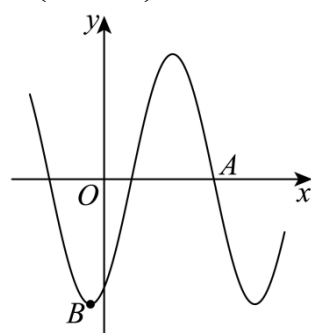
因为当 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, $y = \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \pi = 0$,

所以得到的函数图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 对称, 故 D 正确.

故选: B.

12. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 其中 $A\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$,

$B\left(-\frac{\pi}{24}, -2\right)$, 则以下说法正确的个数为 ()



①函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π ;

②函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{11\pi}{24}$ 对称;

③把函数 $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图像上的点纵坐标不变, 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{4}$, 得到 $f(x)$ 的图象;

④当 $x \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ 时, $f(x) \in (-\sqrt{3}, 2)$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【分析】根据函数图象求出 $f(x)$ 的解析式, 再根据正弦函数的图象性质逐一判断即可.

【详解】由图象知： $\frac{3}{4}T = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{24}\right) = \frac{3\pi}{8}$ ，解得 $T = \frac{\pi}{2}$ ，故①错误；

所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$ ，解得 $\omega = 4$ 。

将 $B\left(-\frac{\pi}{24}, -2\right)$ 代入 $f(x) = 2\sin(4x + \varphi)$ 得 $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ ，

所以 $\varphi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，即 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，

又因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ ， $f(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 。

当 $x = \frac{11\pi}{24}$ 时， $f\left(\frac{11\pi}{24}\right) = 2\sin\left(4 \times \frac{11\pi}{24} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{3\pi}{2} = -2$ ，

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{11\pi}{24}$ 对称，故②正确；

把函数 $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图像上的点横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{4}$ ，

得到 $2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$ ，故③正确；

当 $x \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ 时， $4x - \frac{\pi}{3} \in \left(4\pi - \frac{\pi}{3}, 5\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ ，

$\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ， $f(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left(-\sqrt{3}, 2\right]$ ，故④错误。

所以说法正确的是②③。

故选：C。

13. 函数 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)\left(A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0\right)$ 的部分图象如图所示，已知函数

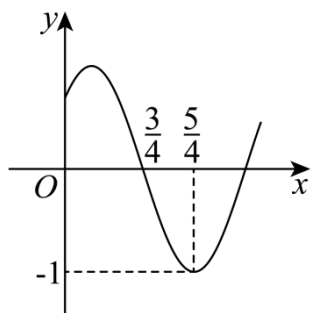
$f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 有且仅有3个极大值点，则下列说法错误的个数是（ ）

①函数 $|f(x)|$ 的最小正周期为2；

②点 $\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心；

③函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{3}{2}$ 个单位后得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象；

④函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3}{25}m, 0\right]$ 上是增函数。



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】A

【分析】根据图象求出函数的解析式，逐项计算判断后可得正确的选项.

【详解】由图象可得 $A=1$ 且 $\frac{T}{4} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}$, 故 $T=2$, 故 $\omega=\pi$,

所以 $f(x) = \cos(\pi x + \varphi)$, 而 $\cos(\frac{5\pi}{4} + \varphi) = -1$,

故 $\frac{5\pi}{4} + \varphi = 2k\pi + \pi$ 即 $\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ 即 $f(x) = \cos(\pi x - \frac{\pi}{4})$.

对于①, $|f(x)| = \left| \cos(\pi x - \frac{\pi}{4}) \right|$,

因为 $|f(x+1)| = \left| \cos(\pi x + \pi - \frac{\pi}{4}) \right| = \left| \cos(\pi x - \frac{\pi}{4}) \right| = |f(x)|$,

故 $|f(x)|$ 的周期为 1, 故 $|f(x)|$ 的最小正周期不为 2, 故①错误.

对于②, 因为 $f(-\frac{9}{4}) = \cos(-\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = 0$, 故点 $(-\frac{9}{4}, 0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心,

故②正确.

对于③, 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{3}{2}$ 个单位后所得图象对应的解析式为:

$$y = \cos(\pi x + \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi x + \frac{5\pi}{4}) = -\cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\pi x - \frac{\pi}{4}) = A \sin(\omega x + \varphi),$$

故③正确.

对于④, 由 $f(x)=1$ 可得 $\pi x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故 $x = 2k + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 有且仅有 3 个最大值点,

$$\text{故 } \frac{17}{4} \leq m < \frac{25}{4}, \text{ 故 } -\frac{3}{4} < -\frac{3}{25}m \leq -\frac{51}{100},$$

$$\text{而当 } x \in \left[-\frac{3}{25}m, 0\right] \text{ 时, 有 } -\pi = -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < -\frac{3\pi}{25}m - \frac{\pi}{4} \leq \pi x - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{4},$$

因为 $y = \cos x$ 在 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数,

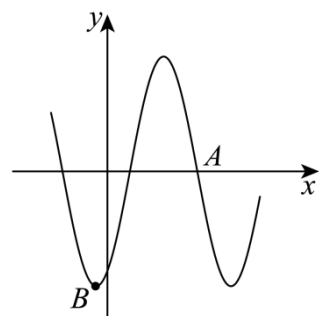
故函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3}{25}m, 0\right]$ 上是增函数, 故④正确.

故错误说法共有 1 个,

故选: A.

14. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 其中 $A\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$,

$B\left(-\frac{\pi}{24}, -2\right)$, 则以下五个说法正确的个数为 ()



①函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π ;

②函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上单调递减;

③函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{11\pi}{24}$ 对称;

④将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度后关于 y 轴对称;

⑤当 $x \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ 时, $f(x) \in (-\sqrt{3}, 2)$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【分析】根据函数图象求出 $f(x)$ 的解析式, 再根据正弦函数的图象和性质逐一判断即可.

【详解】由图像可知 $\frac{3}{4}T = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{24}\right)$, 解得 $T = \frac{\pi}{2}$, ①说法错误,

所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega = 4$,

将 $B\left(-\frac{\pi}{24}, -2\right)$ 代入 $f(x) = 2\sin(4x + \varphi)$ 得 $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = -1$,

所以 $\varphi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 即 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

又因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $f(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$,

当 $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 时, $4x - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{8\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right]$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上先单调递减, 再单调递增, ②

说法错误;

当 $x = \frac{11\pi}{24}$ 时, $4x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$, $f(x) = -2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{11\pi}{24}$ 对称, ③说法正

确;

将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度后得到

$f\left(x - \frac{\pi}{24}\right) = 2\sin\left[4\left(x - \frac{\pi}{24}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos 4x$, 其图象关于 y 轴对称, ④说法

正确;

当 $x \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ 时, $4x - \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{11\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}\right)$, 则 $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, $f(x) \in (-\sqrt{3}, 2]$, ⑤说

法错误;

综上③④说法正确,

故选: C

15. 已知函数 $f(x) = A\cos(2x + \varphi) - 1$ ($A > 0, 0 < \varphi < \pi$), 若函数 $y = |f(x)|$ 的部分图象如图所

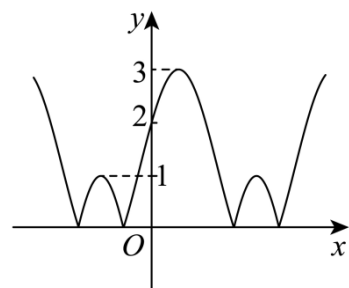
示, 函数 $g(x) = A\sin(Ax - \varphi)$, 则下列结论正确的个数有 ()

①将函数 $y = f(x) + 1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度可得到函数 $g(x)$ 的图象;

②函数 $y = g(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称;

③函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$;

④若函数 $g(x + \theta)$ ($\theta \geq 0$) 为偶函数, 则 θ 的最小值为 $\frac{7}{12}\pi$.



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【分析】根据三角函数图象求出 A , 再由 $|f(0)| = 2$ 求出 φ , 即可得到 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的解析式,

最后根据正弦函数的性质一一判断即可.

【详解】因为 $\begin{cases} -A-1=-3 \\ A-1=1 \end{cases}$, 所以 $A=2$, 所以 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)-1$.

又因为 $|f(0)|=|2\cos\varphi-1|=2$, 得 $\cos\varphi=\frac{3}{2}$ (舍) 或 $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$,

因为 $0<\varphi<\pi$, 可得 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-1$, $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$

函数 $y=f(x)+1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

$y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=g(x)$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $2x-\frac{2\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 所以 $g(x)$ 关于点 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, 0\right) (k\in\mathbf{Z})$ 对称,

当 $k=-1$ 时, 对称点为 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$, 故 B 正确;

对于 C, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)>g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 故 C 错误;

对于 D, 函数 $g(x+\theta) (\theta\geq 0)$ 为偶函数, 即 $g(x+\theta)=2\sin\left(2x+2\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$ 为偶函数,

所以 $2\theta-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\theta=\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$,

又 $\theta\geq 0$, 所以当 $k=-1$ 时 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 为最小值, 故 D 错误.

故选: B.