

## 三角函数刷题练

### 一、单选题

1. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x \cos \omega x - \sqrt{3} \sin^2 \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ( $\omega > 0$ ), 若将函数  $y = f(x)$  的图象平移后能与函数  $y = \sin 2x$  的图象完全重合, 则下列说法正确的是 ( )

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$
- B. 将  $y = f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后, 得到的函数图象关于  $y$  轴对称
- C. 当  $f(x)$  取得最值时,  $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- D. 当  $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  时,  $f(x)$  的值域为  $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$

【答案】D

【知识点】求含  $\sin x$ (型)函数的值域和最值、三角恒等变换的化简问题、求正弦(型)函数的最小正周期、求图象变化前(后)的解析式

【分析】利用二倍角公式及两角和的正弦公式化简函数解析式, 再依题意求出  $\omega$ , 最后根据正弦函数的性质一一分析即可.

【详解】因为  $f(x) = \sin \omega x \cos \omega x - \sqrt{3} \sin^2 \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\omega x = \sin \left( 2\omega x + \frac{\pi}{3} \right),$$

又因为将函数  $y = f(x)$  的图象平移后能与函数  $y = \sin 2x$  的图象完全重合, 且  $\omega > 0$ ,

所以  $2\omega = 2$ , 解得  $\omega = 1$ ,

所以  $f(x) = \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right)$ ,

所以  $f(x)$  的最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , 故 A 错误;

将  $y = f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到  $y = \sin \left[ 2 \left( x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{3} \right] = \sin 2x$ ,

又  $y = \sin 2x$  为奇函数, 函数图象不关于  $y$  轴对称, 故 B 错误;

令  $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 解得  $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

令  $2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 解得  $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

所以当  $f(x)$  取得最大值时,  $x = \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ,

当  $f(x)$  取得最小值时,  $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ,

则当  $f(x)$  取得最值时,  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ , 故 C 错误;

当  $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  时  $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ , 所以  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ ,

即当  $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  时,  $f(x)$  的值域为  $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ , 故 D 正确;

故选: D

2. 已知函数  $f(x) = 2\cos^2 x + \sin^2 x$ , 则下列正确的是 ( )

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$                       B.  $f(x)$  在  $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$  单调递减
- C.  $f(x)$  在  $\left(\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$  上单调递增              D.  $f(x)$  的最大值为 3

【答案】B

【知识点】求  $\cos x$  型三角函数的单调性、求  $\cos x$  (型) 函数的最值、求余弦 (型) 函数的最小正周期、 $\cos 2x$  的降幂公式及应用

【分析】利用二倍角的余弦公式化简函数解析式, 利用余弦型函数的周期公式可判断 A 选项; 利用余弦型函数的单调性可判断 BC 选项; 利用余弦型函数的最值可判断 D 选项.

【详解】因为  $f(x) = 2\cos^2 x + \sin^2 x = 1 + \cos^2 x = 1 + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$ ,

对于 A 选项, 函数  $f(x)$  的最小正周期为  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , A 错;

对于 B 选项, 当  $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$  时,  $\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$ ,

所以, 函数  $f(x)$  在  $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$  单调递减, B 对;

对于 C 选项, 当  $\frac{5\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}$  时,  $\frac{5\pi}{6} < 2x < \frac{7\pi}{6}$ ,

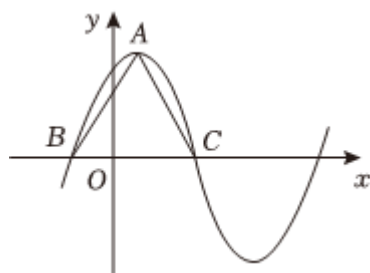
所以, 函数  $f(x)$  在  $\left(\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$  上不单调, C 错;

对于 D 选项,  $f(x)_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ , D 错.

故选: B.

3. 函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$  的部分图象如图所示, A 为图象的最高点, B, C 为图

象与  $x$  轴的交点，且  $\triangle ABC$  为等边三角形. 若  $f(x_0) = \frac{4\sqrt{3}}{5}$ ，且  $x_0 \in (0, 1)$ ，则  $f\left(x_0 - \frac{1}{3}\right)$  的值为 ( )



- A.  $\frac{6}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{10}$
- B.  $\frac{4}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}$
- C.  $\frac{6}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}$
- D.  $\frac{4}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{10}$

【答案】C

【知识点】由图象确定正（余）弦型函数解析式、用和、差角的正弦公式化简、求值

【分析】由函数  $f(x)$  的部分图象知等边  $\triangle ABC$  底边上的高和边长，求出  $f(x)$  的最小正周期和  $\omega$ ，根据  $f(x_0)$  求出  $\sin\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right)$ ，利用  $x_0 \in (0, 1)$ ，结合正弦函数的图象与性质，得出  $\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}$  的范围，求出  $\cos\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right)$  即可计算  $f\left(x_0 - \frac{1}{3}\right)$  的值.

【详解】由函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$  的部分图象知，等边  $\triangle ABC$  底边上的高为  $\sqrt{3}$ ，所以边长  $AB = 2$ ，

所以  $f(x)$  的最小正周期为  $T = 2AB = 4$ ，所以  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ ，

所以  $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，由  $f(x_0) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{5}$ ，得  $\sin\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5}$ ，

又  $x_0 \in (0, 1)$ ，所以  $\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ ，

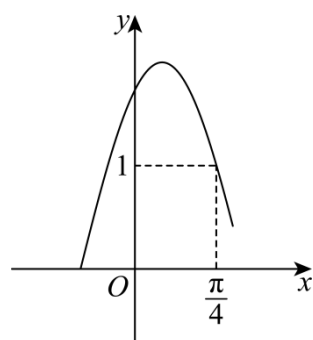
由  $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ ，得  $\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ ，

所以  $\cos\left(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$ ，

$$\begin{aligned}
\text{所以 } f\left(x_0 - \frac{1}{3}\right) &= \sqrt{3} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( x_0 - \frac{1}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \right] = \sqrt{3} \sin \left[ \left( \frac{\pi}{2} x_0 + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{6} \right] \\
&= \sqrt{3} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} x_0 + \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{6} - \cos \left( \frac{\pi}{2} x_0 + \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{\pi}{6} \right] \\
&= \sqrt{3} \times \left[ \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left( -\frac{3}{5} \right) \times \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{6}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{10}.
\end{aligned}$$

故选：C.

4. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ,  $\omega > 0$ ) 的最大值为 2, 其部分图象如图所示, 则下列命题正确的个数为 ( )



- ①  $a \cdot \omega = 2\sqrt{3}$ ;
- ② 函数  $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  为奇函数;
- ③ 若函数  $f(x)$  在区间  $(0, m]$  上至少有 4 个零点, 则  $m \geq \frac{11\pi}{6}$ ;
- ④  $f(x)$  在区间  $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$  上单调递增.

A. 4                      B. 3                      C. 2                      D. 1

【答案】B

【知识点】根据函数零点的个数求参数范围、求  $\sin x$  型三角函数的单调性、由图象确定正(余)弦型函数解析式、辅助角公式

【分析】利用辅助角公式化简函数解析式, 再根据函数的最大值及  $f(0) > 0$  求出  $a$ , 由  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$  求出  $\omega$  的取值, 再根据周期确定  $\omega$  的值, 即可得到函数解析式, 即可判断①, 根据图象变换结合奇偶性判断②; 根据题意以  $2x + \frac{\pi}{3}$  为整体, 结合正弦函数性质分析判断③④.

【详解】因为  $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x = \sqrt{a^2 + 1} \sin(\omega x + \varphi)$  (其中  $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$ 、 $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ ),

由题意可知:  $\sqrt{a^2 + 1} = 2$ , 且  $a > 0$ , 解得  $a = \sqrt{3}$ ,

则  $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,

又因为  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi \omega}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ , 即  $\sin\left(\frac{\pi \omega}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ,

结合图象可知  $\frac{\pi \omega}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 解得  $\omega = 2 + 8k, k \in \mathbf{Z}$ ,

且  $\frac{T}{2} > \frac{\pi}{4}, \omega > 0$ , 则  $\frac{2\pi}{\omega} > \frac{\pi}{2}$ , 解得  $0 < \omega < 4$ ,

所以  $k = 0, \omega = 2$ , 可知  $a\omega = 2\sqrt{3}$ , 故①正确;

所以  $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,

对于②:  $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2 \sin 2x$  为奇函数, 故②正确;

对于③: 因为  $x \in (0, m]$ , 则  $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, 2m + \frac{\pi}{3}\right]$ ,

由题意可得:  $2m + \frac{\pi}{3} \geq 4\pi$ , 解得  $m \geq \frac{11\pi}{6}$ , 故③正确;

对于④: 因为  $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ , 则  $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ,

且  $y = \sin x$  在  $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$  内不单调, 所以  $f(x)$  在区间  $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$  上不单调, 故④错误;

所以正确的个数为 3.

故选: B.

【点睛】方法点睛: 函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  的解析式的确定:

(1)  $A$  由最值确定;

(2)  $\omega$  由周期确定;

(3)  $\varphi$  由图象上的特殊点确定.

提醒: 根据“五点法”中的零点求  $\varphi$  时, 一般先根据图象的升降分清零点的类型.

5. 函数  $f(x) = 2 \sin(2x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{12}$  对称, 则  $f(x)$  在  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  上的最小值为 ( )

A. -2

B.  $-\sqrt{3}$ 

C. -1

D.  $-\sqrt{2}$ **【答案】** A**【知识点】** 求含  $\sin x$ (型)函数的值域和最值、利用正弦函数的对称性求参数**【分析】** 根据参数范围、对称轴求得  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , 利用正弦型函数性质求最小值即可.**【详解】** 由题意  $2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 则  $\varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 又  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ,所以  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , 则  $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ,在  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  上,  $2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$ , 故  $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \in [-1, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ,所以  $f(x)$  最小值为 -2.

故选: A

6. 已知函数  $f(x) = 4\sin x \cos x - 4\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 则下列描述正确的是 ( )

A.  $f(x)$  的最小正周期是  $\frac{\pi}{2}$ B.  $f(x)$  在  $\left(-\frac{5\pi}{12}, 0\right)$  上单调递增C.  $x = \frac{\pi}{3}$  是  $y = f(x)$  的一条对称轴D.  $f(x)$  的最大值是  $4\sqrt{3}$ **【答案】** B**【知识点】** 求正弦(型)函数的最小正周期、求正弦(型)函数的对称轴及对称中心、二倍角的正弦公式、辅助角公式**【分析】** 运用二倍角公式、两角和与差的正弦公式化简  $f(x)$ , 逐一判断四个选项即可得到正确答案.

**【详解】**  $f(x) = 4\sin x \cos x - 4\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$   
 $= 2\sin 2x - 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$   
 $= 2\sin 2x - 2\sqrt{3}(\sin^2 x - \cos^2 x) = 2\sin 2x + 2\sqrt{3} \cos 2x = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$

对于 A,  $f(x)$  的最小正周期是  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ , 故 A 错误;对于 B, 当  $x \in \left(-\frac{5\pi}{12}, 0\right)$  时,  $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ ,故  $f(x)$  在  $\left(-\frac{5\pi}{12}, 0\right)$  上单调递增, 故 B 正确;

对于 C,  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=0$ , 故 C 错误;

对于 D,  $f(x)$  的最大值是 4, 故 D 错误.

故选: B.

7.  $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<\pi)$ , 在  $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$  上单调递增, 且  $x=\frac{\pi}{12}$  为它的一条对称轴,  $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$  是它的一个对称中心, 当  $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$  时,  $f(x)$  的最小值为 ( )

A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B.  $-\frac{1}{2}$

C. 1

D. 0

【答案】A

【知识点】利用正弦型函数的单调性求参数、利用正弦函数的对称性求参数、由正(余)弦函数的性质确定图象(解析式)

【分析】利用正弦函数的对称性得出  $\omega=4n+2$ , 根据单调性得出  $0<\omega\leq 2$ , 从而确定  $\omega$ , 结合对称轴与对称中心再求出  $\varphi$ , 得出函数解析式, 利用整体思想及正弦函数的性质即可得解.

【详解】因为函数在  $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$  上单调递增, 且  $x=\frac{\pi}{12}$  为它的一条对称轴,

所以  $x=\frac{\pi}{12}$  时函数取最大值,

又因为  $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$  是它的一个对称中心,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{\pi}{12}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=m\pi \end{cases}, (m,k\in\mathbb{Z}),$$

设  $f(x)$  的最小正周期为  $T$ , 由正弦函数的对称性可知  $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{(2n+1)T}{4}(n\in\mathbb{Z})$ ,

$$\text{即 } \frac{\pi}{4}=\frac{2n\pi+\pi}{2\omega}, \therefore \omega=4n+2,$$

又  $f(x)$  在  $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$  上单调递增, 则  $\frac{T}{2}\geq\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{5\pi}{12}\right), \therefore \frac{\pi}{\omega}\geq\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\omega\leq 2$ ,

$$\therefore \omega=2, \text{ 则 } \begin{cases} \varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \varphi=m\pi-\frac{2\pi}{3} \end{cases}, (m,k\in\mathbb{Z}),$$

$$\because \varphi\in(-\pi,\pi), \therefore k=0, m=1 \text{ 时, } \varphi=\frac{\pi}{3}, \therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{当 } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } 2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right],$$

由正弦函数的单调性可知  $f(x)_{\min} = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

故选：A

8. 设函数  $f(x) = 3\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象关于直线  $x = \frac{2}{3}\pi$  对称, 它的最小正周期是  $\pi$ , 则以下四个结论正确的个数有 ( )

①  $f(x)$  的图象过点  $(0, \frac{3}{2})$

②  $f(x)$  的一个对称中心是  $(\frac{5\pi}{12}, 0)$

③  $f(x)$  在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  上是减函数

④ 将  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位得到函数  $y = 3\sin 2x$  的图象

A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】A

【知识点】利用正弦函数的对称性求参数、求图象变化前(后)的解析式、求正弦(型)函数的对称轴及对称中心、求  $\sin x$  型三角函数的单调性

【分析】根据周期公式和正弦函数对称性先求  $f(x)$  的解析式, 然后代入验证可判断①②; 根据正弦函数单调性可判断③; 根据图象变换可判断④.

【详解】因为  $f(x)$  的最小正周期是  $\pi$ , 所以  $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ,

又图象关于直线  $x = \frac{2}{3}\pi$  对称, 所以  $2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 即  $\varphi = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

因为  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , 所以  $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

因为  $f(0) = 3\sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$ , 所以  $f(x)$  的图象过点  $(0, \frac{3}{2})$ , ①正确;

因为  $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = 3\sin \pi = 0$ , 所以  $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$  是  $f(x)$  的一个对称中心, ②正确;

由  $\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$  解得  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ , 所以  $f(x)$  在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  上是减函数, 所以  $f(x)$  在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

上是减函数, ③正确;

将  $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位得  $y = 3\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 3\sin 2x$  的图象,

④正确.

故选：A

9. 已知角 $\alpha$ 的顶点与原点重合, 它的始边与 $x$ 轴的非负半轴重合, 终边过点

$(a,b)(ab \neq 0, a \neq b)$ , 定义:  $Ti(\alpha) = \frac{a+b}{a-b}$ , 对于函数  $f(x) = Ti(x)$ , 有下列四个说法:

①函数  $f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$  对称; ②在区间  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增;

③将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度后得到一个偶函数的图象;

④方程  $f(x) = \frac{1}{2}$  在区间  $[0, \pi]$  上有两个不同的实数解.

以上四个说法中, 正确的个数为 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【知识点】求正切型三角函数的单调性、逆用和、差角的正切公式化简、求值、由终边或终边上的点求三角函数值、求正切(型)函数的对称中心

【分析】由三角函数定义可得  $\tan x = \frac{b}{a}$ , 根据题意, 可得  $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , 利用正切函数的性质依次判断求解各个选项.

【详解】根据题意,  $\tan x = \frac{b}{a}$ ,

$$\therefore f(x) = \frac{a+b}{a-b} = \frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}} = \frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan x} = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

对于①, 令  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 解得  $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ,

取  $k=1$ , 可得  $x = \frac{\pi}{4}$ ,

所以函数  $f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$  对称, 故①正确;

对于②,  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\therefore x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ,

由正切函数的性质可知  $f(x)$  在  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 故②正确;

对于③, 将  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位可得  $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$ , 为奇函数, 故③错误;

对于④,  $\because x \in [0, \pi]$ ,  $\therefore x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ , 令  $\alpha = x + \frac{\pi}{4}$ ,

由正切函数  $y = \tan \alpha$  的性质可知在  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 且  $y \geq 1$ , 在  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$  上单调递增, 且

$$y \leq 1,$$

所以方程  $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$  在区间  $[0, \pi]$  上只有一个实数解，故④错误；

故选：B.

10. 将函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度，得到函数  $y = f(x)$  的图象，则下列结论中正确的是 ( )

- A.  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{6}$  对称    B.  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$  上单调递减
- C.  $f(x)$  在区间  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$  没有零点    D.  $y = f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$  对称

【答案】B

【知识点】求含  $\cos x$  的函数的单调性、求  $\cos x$  (型) 函数的对称轴及对称中心、求图象变化前 (后) 的解析式

【分析】根据平移变换可得  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ . 将  $x = \frac{\pi}{6}$  代入  $f(x)$  的解析式得  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，即可判断选项 A；当  $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$  时， $2x + \frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ ，因为余弦函数  $y = \cos x$  在  $[0, \pi]$  上的单调性，即可判断选项 B；当  $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$  时， $2x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$ ，根据余弦函数  $y = \cos x$  的图象，即可判断选项 C；将  $x = \frac{5\pi}{12}$  代入  $f(x)$  的解析式得  $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -1$ ，即可判断选项 D.

【详解】由题意得  $f(x) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

将  $x = \frac{\pi}{6}$  代入  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  中，得  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ，故函数  $y = f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$  中心对称，故选项 A 错误；

当  $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$  时， $2x + \frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ ，因为余弦函数  $y = \cos x$  在  $[0, \pi]$  上单调递减，所以函数  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$  上单调递减，故选项 B 正确；

当  $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$  时， $2x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$ ，根据余弦函数  $y = \cos x$  的图象可知，当  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ ，即  $x = \frac{2\pi}{3}$  时  $f(x) = 0$ ，即  $f(x)$  在区间  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$  有一个零点，故选项 C 错误；

将  $x = \frac{5\pi}{12}$  代入  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  中，得  $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \pi = -1$ ，故函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{5\pi}{12}$  对称，故选项 D 错误.

故选：B.

11. 已知  $x = \frac{\pi}{6}$  是函数  $f(x) = 2\cos(2x + \varphi)$  ( $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 图象的一个对称轴, 则下列说法错误的是

( )

A.  $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$  是函数  $f(x)$  图象的一个对称中心

B. 函数  $f(x)$  的图象可由  $y = 2\sin 2x$  图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度得到

C. 函数  $f(x)$  在区间  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$  上单调递减

D. 函数  $f(x)$  在区间  $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$  上有且仅有一个零点

【答案】D

【知识点】求含  $\cos x$  的函数的单调性、求  $\cos x$  (型) 函数的对称轴及对称中心、利用  $\cos x$  (型) 函数的对称性求参数、描述正 (余) 弦型函数图象的变换过程

【分析】根据题意, 求得  $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ , 结合正弦型函数的图象与性质, 逐项分析求解, 即可得到答案.

【详解】由  $x = \frac{\pi}{6}$  是函数  $f(x) = 2\cos(2x + \varphi)$  图象的一个对称轴,

可得  $\cos(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi) = \pm 1$ , 可得  $\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 即  $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ,

因为  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ , 所以  $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ ,

对于 A 中, 由  $f(\frac{5\pi}{12}) = 2\cos(2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) = 2\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,

所以  $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$  是函数  $f(x)$  图象的一个对称中心, 所以 A 正确;

对于 B 中, 将函数  $y = 2\sin 2x$  图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度得到

$y = 2\sin[2(x + \frac{\pi}{12})] = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ , 所以 B 正确;

对于 C 中, 由  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ , 可得  $0 < 2x - \frac{\pi}{3} < \pi$ ,

因为函数  $y = \cos x$  在  $(0, \pi)$  上单调递减, 所以  $f(x)$  在区间  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$  上递减, 所以 C 正确;

对于 D 中,  $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ , 可得  $-\frac{2\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$ ,

当  $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$  时, 即  $x = -\frac{\pi}{12}$  时, 可得  $f(-\frac{\pi}{12}) = 0$ , 即  $x = -\frac{\pi}{12}$  是  $f(x)$  的一个零点;

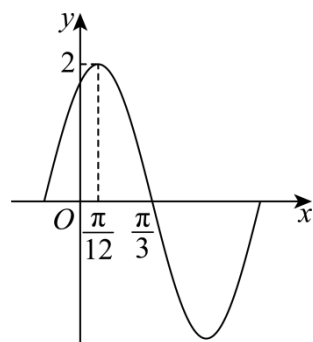
当  $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$  时, 即  $x = \frac{5\pi}{12}$  时, 可得  $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0$ , 即  $x = \frac{5\pi}{12}$  是  $f(x)$  的一个零点,

所以函数  $f(x)$  在  $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$  上有两个零点, 所以 D 错误.

故选: D.

12. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 关于该函数

有下列四个说法:



①  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$  上单调递减

②  $f(x)$  的图象可由  $y = 2\sin 2x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位得到

③  $f(x)$  的对称轴为  $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

④  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最小值为  $-\sqrt{3}$

以上四个说法中, 正确的个数为 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【知识点】由图象确定正(余)弦型函数解析式、求  $\sin x$  型三角函数的单调性、求含  $\sin x$ (型)函数的值域和最值、求正弦(型)函数的对称轴及对称中心

【分析】根据题中给定图象可得函数解析式, 然后利用正弦函数的性质和图象变换对各个选项进行判断即可.

【详解】由图可知,  $A = 2, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$ , 即  $T = \pi$ , 则  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ,

此时  $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ , 又  $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 2$ ,

则  $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 即  $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

又  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , 则  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

对于①, 当  $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$  时,  $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ,

因为函数  $y = \sin x$  在  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  上单调递减,

所以  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$  上单调递减, 故①正确;

对于②,  $y = 2\sin 2x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  得到  $y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ , 故②正确;

对于③, 令  $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ , 解得  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ ,

所以  $f(x)$  的对称轴为  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ , 故③错误;

对于④, 当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时,  $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ , 则  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ,

则  $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in [-\sqrt{3}, 2]$ , 则  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最小值为  $-\sqrt{3}$ , 故④正确.

故选: C.

13. 关于函数  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ , 下面结论成立的是 ( )

A.  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值为  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B.  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  上单调递增

C.  $f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

D.  $f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$  对称

【答案】D

【知识点】求正弦(型)函数的对称轴及对称中心、求  $\sin x$  型三角函数的单调性、求含  $\sin x$ (型)函数的值域和最值

【分析】根据  $x$  的范围计算  $\frac{\pi}{3} - 2x$  的整体范围, 求出函数  $f(x)$  的最大值, 从而判断 A; 将  $f(x)$  变换为  $f(x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ , 根据所给范围以及复合函数单调性可判断 B; 化简  $f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$  可判断 C 选项; 根据正弦函数的对称性求出函数  $f(x)$  的对称中心可判断 D.

【详解】解: A 选项: 因为  $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ , 所以  $\frac{\pi}{3} - 2x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ , 则  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \in [-1, 0]$ , 即  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值为 0. 故 A 不正确;

B 选项：因为  $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ ，则  $2x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ ，所以  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  上单调递增，  
 $f(x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，所以  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  上单调递减，故 B 不正确；

C 选项：  $f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\right) = -\sin 2x \neq f(x)$ ，故 C 不正确；

D 选项：当  $x = \frac{2\pi}{3}$  时，  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2 \times \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(-\pi) = 0$ ，所以  $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$  为  $f(x)$  的图象的对称中心，故 D 正确。

故选：D

14. 函数  $f(x) = \sin(2x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) 的图象关于点  $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$  成中心对称，则下列结论正确的个数是 ( )

①  $y = f(x)$  在  $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$  单调递减；②  $y = f(x)$  在  $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$  有 2 个极值点；

③ 直线  $x = \frac{7\pi}{6}$  是一条对称轴；④ 直线  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$  是一条切线。

A. 3 个

B. 2 个

C. 1 个

D. 0 个

【答案】B

【知识点】求在曲线上一点处的切线方程（斜率）、利用正弦函数的对称性求参数、求正弦（型）函数的对称轴及对称中心、求  $\sin x$  型三角函数的单调性

【分析】先利用函数的对称性求出函数的关系式，再根据正弦函数的性质，函数的极值定义和导数的几何意义判断各小题的结论即得。

【详解】因为  $f(x) = \sin(2x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) 的图象关于点  $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$  对称，

所以  $2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，解得  $\varphi = k\pi - \frac{4\pi}{3}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

因为  $0 < \varphi < \pi$ ，所以  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ，故  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ，

对于①，令  $\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$ ，解得  $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ ，故  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$  单调递减，故① 正确；

对于②，由  $x \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$ ，可得  $2x + \frac{2\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ ，根据正弦函数的图象，可知  $f(x)$  在区间  $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$  只有一个极值点，故②不正确；

对于③，因  $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\pi = 0$ ，故③不正确；

对于④，由  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ，求导可得， $f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ，

因为  $f(0) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $k_{\text{切}} = f'(0) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = -1$

故  $y = f(x)$  在点  $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$  处的切线方程为  $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -(x - 0)$ , 即  $y = -x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

故直线  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$  是曲线  $f(x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$  的一条切线, 故④正确.

故选: B.

15. 已知函数  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ , 将  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\varphi (\varphi > 0)$  个单位长度得到函数

$g(x)$  的图象, 函数  $g(x)$  的一个对称轴为  $x = \frac{\pi}{2}$ , 则  $\varphi$  的最小取值为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{3}$                       B.  $\frac{\pi}{6}$                       C.  $\frac{\pi}{4}$                       D.  $\frac{\pi}{12}$

【答案】B

【知识点】利用正弦函数的对称性求参数、求图象变化前(后)的解析式

【分析】首先得到平移后的解析式, 再根据正弦函数的对称性计算可得.

【详解】将  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  向左平移  $\varphi (\varphi > 0)$  个单位长度得到

$$g(x) = \sin\left[2\left(x + \varphi\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{6}\right),$$

又函数  $g(x)$  的一个对称轴为  $x = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $2 \times \frac{\pi}{2} + 2\varphi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ,

解得  $\varphi = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ , 当  $k = 1$  时  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , 所以  $\varphi$  的最小取值为  $\frac{\pi}{6}$ .

故选: B

16. 将函数  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象上所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍 (纵坐标不变),

再把所得图象上所有点向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度, 得到图象对应的函数为  $g(x)$ , 则下列结论

正确的是 ( )

A.  $g(x)$  的最小正周期是  $2\pi$

B.  $x = \frac{\pi}{6}$  是  $g(x)$  的一条对称轴

C.  $g(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  上单调递减

D. 当  $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$  时,  $g(x)$  的取值范围为  $\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, 1\right]$

【答案】D

【知识点】求图象变化前(后)的解析式、结合三角函数的图象变换求三角函数的性质、求

含  $\sin x$ (型)函数的值域和最值、求正弦(型)函数的最小正周期

【分析】根据题给条件得到  $g(x)$  解析式，再根据正弦函数的性质逐项判断即可.

【详解】函数  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象上所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍(纵坐标不变)得到新函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，再把所得图象上所有点向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度得到新函数

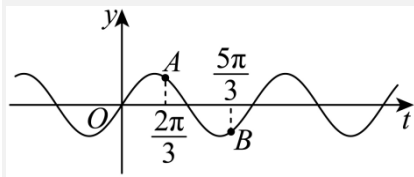
$$y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \text{ 则 } g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

对于 A 选项,  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ,  $g(x)$  的最小正周期是  $\pi$ , A 错误;

对于 B 选项,  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 0 = 0 \neq \pm 1$ , 所以  $x = \frac{\pi}{6}$  不是  $g(x)$  的一条对称轴, B 错误;

对于 C 选项,  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , 则  $t = 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ ,

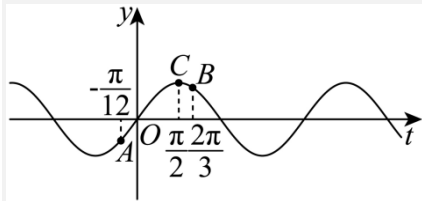
所以  $y = \sin t$  在  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$  上单调递增, 则  $g(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  上不单调, C 错误;



对于 D 选项, 当  $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$  时,  $t = 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ,

$$t = -\frac{\pi}{12} \text{ 时 } y = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \quad t = \frac{\pi}{2} \text{ 时 } y = 1,$$

则  $y = \sin t \in \left[\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, 1\right]$ , 得  $g(x)$  的取值范围为  $\left[\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, 1\right]$ , D 正确.



故选: D.

17. 已知  $x_1$ 、 $x_2$  是函数  $f(x) = \tan(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, -\pi < \varphi < \pi$ ) 的两个零点, 且  $|x_1 - x_2|$  的最小值为  $\frac{\pi}{3}$ , 若将函数  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位后得到的图象关于原点对称, 则函数

$f(x)$  的解析式可能是 ( )

A.  $f(x) = \tan\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$

B.  $f(x) = \tan\left(6x + \frac{3\pi}{4}\right)$

C.  $f(x) = \tan\left(6x - \frac{\pi}{8}\right)$

D.  $f(x) = \tan 3x$

【答案】A

【知识点】由正切（型）函数的奇偶性求参数、求正切（型）函数的周期、求图象变化前（后）的解析式

【分析】求出函数  $f(x)$  的最小正周期，可得出  $\omega$  的值，然后利用三角函数图象变换可得出平移后所得函数的解析式，根据正切型函数的奇偶性可得出关于  $\varphi$  的等式，解出  $\varphi$  的表达式，即可得出合适的选项.

【详解】由题意可知，函数  $f(x)$  的最小正周期为  $T = \frac{\pi}{3}$ ，所以  $\omega = \frac{\pi}{T} = 3$ ，

所以  $f(x) = \tan(3x + \varphi)$ ，

将函数  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位后得到的图象关于原点对称，

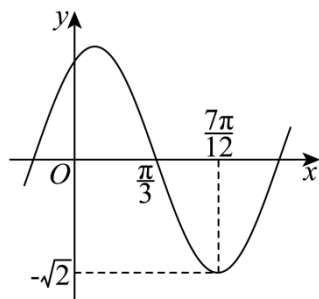
可得出函数  $y = \tan\left[3\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \varphi\right] = \tan\left(3x + \varphi + \frac{\pi}{4}\right)$  为奇函数，

所以， $\varphi + \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ，解得  $\varphi = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ ，A 选项合乎题意.

故选：A.

18. 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $|\varphi| < \pi$ ) 的部分图象如图所示，要得到

$y = \sqrt{2} \sin x$  的图象，只需将函数  $f(x)$  的图象上所有的点 ( )



A. 横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向右平行移动  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度

B. 横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向左平行移动  $\frac{2\pi}{3}$  个单位长度

C. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$  (纵坐标不变), 再向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$  (纵坐标不变), 再向左平行移动 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度

【答案】A

【知识点】由图象确定正(余)弦型函数解析式、结合三角函数的图象变换求三角函数的性质、描述正(余)弦型函数图象的变换过程、求图象变化前(后)的解析式

【分析】由图象, 根据正弦函数的图象与性质求得 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ , 结合三角函数图象的平移伸缩变换即可求解.

【详解】由图可知,  $A = \sqrt{2}, \frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$ , 得 $T = \pi$ ,

又 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ , 由 $\omega > 0$ 解得 $\omega = 2$ ;

将点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 代入 $f(x)$ , 得 $0 = \sqrt{2} \sin(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi)$ ,

$(\frac{\pi}{3}, 0)$ 在函数单调减区间上, 则 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

解得 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ , 又 $|\varphi| < \pi$ , 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

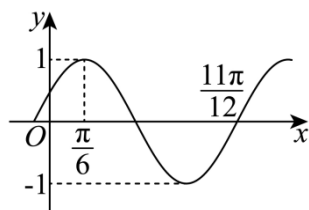
得 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ .

将 $f(x)$ 的图象上所有的点横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变), 再向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,

得 $y = \sqrt{2} \sin x$ 的图象.

故选: A

19. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 再把所有点的纵坐标不变, 横坐标伸长到原来的2倍, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(\frac{\pi}{6}) = ( )$



A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1

D. 0

【答案】C

【知识点】由图象确定正（余）弦型函数解析式、求图象变化前（后）的解析式

【分析】根据给定的函数图象，结合“五点法”作图求出函数  $f(x)$ ，再利用函数图象变换求出  $g(x)$  即可.

【详解】观察函数图象，函数  $f(x)$  的最小正周期  $T = \frac{4}{3}(\frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{\omega}$ ，解得  $\omega = 2$ ，

由  $f(\frac{\pi}{6}) = 1$ ，得  $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，又  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，则  $k = 0, \varphi = \frac{\pi}{6}$ ，

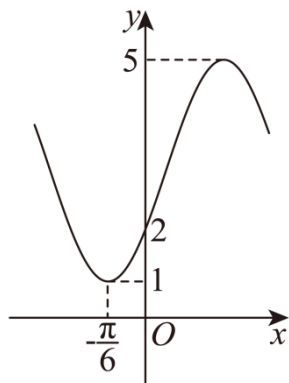
$f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，将  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度，

得  $y = \sin[2(x + \frac{\pi}{12}) + \frac{\pi}{6}] = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的图象，因此  $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ ，

所以  $g(\frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

故选：C

20. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示，则下列正确个数有 ( )



①  $f(x)$  关于点  $(\frac{\pi}{6}, 3)$  对称；

②  $f(x)$  关于直线  $x = \frac{\pi}{3}$  对称；

③  $f(x)$  在区间  $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$  上单调递减；

④  $f(x)$  在区间  $(-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$  上的值域为  $[1, 3]$ ；

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【知识点】求含  $\sin x$  (型) 函数的值域和最值、由图象确定正（余）弦型函数解析式、求正弦（型）函数的对称轴及对称中心、求  $\sin x$  型三角函数的单调性

【分析】先根据函数的图象确定函数的解析式，在逐项判断即可.

【详解】由函数的图象可知： $A = \frac{5-1}{2} = 2$ ， $B = \frac{5+1}{2} = 3$ .

因为  $f(0) = 2 \Rightarrow 2\sin\varphi + 3 = 2 \Rightarrow \sin\varphi = -\frac{1}{2}$ ，又  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ .

因为  $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow 2\sin\left(-\frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + 3 = 1 \Rightarrow \sin\left(-\frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ ,

所以  $-\frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ . 所以  $\omega = 2 - 12k$ ， $k \in \mathbb{Z}$ .

由图象可知： $\frac{T}{2} > \frac{\pi}{6} \Rightarrow T > \frac{\pi}{3}$ ，即  $\frac{2\pi}{\omega} > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega < 6$ .

所以当  $k = 0$  时， $\omega = 2$ .

所以  $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 3$ .

对①：因为  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + 3 = 4$ ，所以  $f(x)$  的图象不关于  $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$  对称，①错误；

对②：因为  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 3 = 5$ ，所以  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{3}$  对称，②正确；

对③：当  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$  时， $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ，因为  $y = \sin x$  在  $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$  上单调递减，所以函数  $f(x)$  在  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$  上单调递减，③正确；

对④：当  $x \in \left(-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right)$  时， $2x - \frac{\pi}{6} \in (-\pi, 0)$ ，所以  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 0)$ ，所以  $f(x) \in [1, 3)$ ，

④正确.

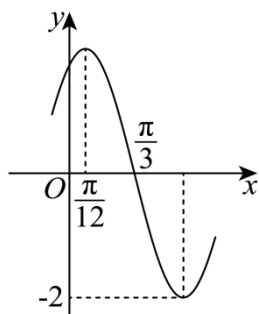
故选：C

21. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0$ ， $\omega > 0$ ， $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示，给出下列结论：

①  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$ ； ② 当  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  时， $f(x) \in [-2, \sqrt{3}]$ ；

③ 函数  $f(x)$  的单调递减区间为  $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right]$ ，( $k \in \mathbb{Z}$ )；

④ 将  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位，得到  $y = 2\sin 2x$  的图象；其中正确的结论个数是 ( )



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【知识点】由图象确定正（余）弦型函数解析式、求  $\sin x$  型三角函数的单调性、求含  $\sin x$  (型) 函数的值域和最值、求图象变化前（后）的解析式

【分析】先根据图象，求出函数的解析式，在结合正弦函数的图象和性质，逐项分析，即可得到答案.

【详解】由图象可知：  $A=2$ ，  $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$ .

由  $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \Rightarrow 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 2$ ，又  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，所以  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

所以  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

因为  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ ，故①正确；

当  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$  时，  $-\frac{2\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$ ，所以  $-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以  $-2 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$ ，故②

正确；

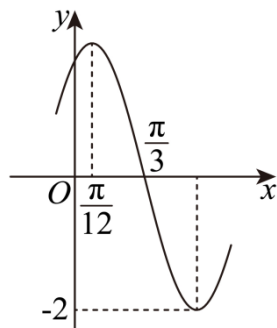
由  $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ，  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{12}$ ，  $k \in \mathbb{Z}$ ，

所以函数  $f(x)$  的单调递减区间为  $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right]$ ，  $k \in \mathbb{Z}$ . 故③正确；

将的图象向右平移个单位，得到  $y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象，故④错误.

故选：C

22. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示，给出下列结论：



①  $f(0) = \sqrt{3}$ ；

② 当  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  时，  $f(x) \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ；

③函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right]$ , ( $k \in \mathbf{Z}$ );

④将  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 得到  $y = 2\sin 2x$  的图象; 其中正确的结论个数是 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【知识点】由图象确定正(余)弦型函数解析式、求  $\sin x$  型三角函数的单调性、求含  $\sin x$ (型)函数的值域和最值、求图象变化前(后)的解析式

【分析】先根据图象, 求出函数的解析式, 再结合正弦函数的图象和性质, 逐项分析, 即可得到答案.

【详解】由图象可知:  $A = 2$ ,  $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$ ,

由  $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \Rightarrow 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 2$ , 又  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

所以  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,

因为  $f(0) = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ , 故①正确;

当  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$  时,  $-\frac{2\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$ , 所以  $-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 所以  $-2 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$ , 故②

错误;

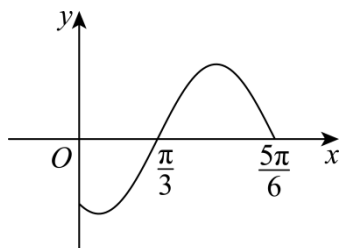
由  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . 故③正确;

将的图象向右平移个单位, 得到  $y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象, 故④错误.

故选: B.

23. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 < \varphi < 2\pi$ ) 的部分图象如图所示, 给出下列结论:



①  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ ;

②  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$  上单调递增;

③ 当  $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$  时,  $f(x)$  的取值范围为  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right]$ ;

④  $f(x)$  的图象可以由函数  $g(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$  的图象向左平移  $\frac{2\pi}{3}$  个单位长度得到.

其中错误结论的个数为 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【知识点】由图象确定正(余)弦型函数解析式、求图象变化前(后)的解析式、求含  $\sin x$ (型)函数的值域和最值、求正弦(型)函数的最小正周期

【分析】由图象中两个零点间的距离,可直接求得  $f(x)$  的最小正周期,判断①;求得  $f(x)$  的解析式,用整体代换的思想判断②, ③;由图象平移的规则知函数  $g(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$  的图象向左平移  $\frac{2\pi}{3}$  个单位长度得到函数的解析式,可判断④.

【详解】对于①,由图可知  $f(x)$  的最小正周期为  $2 \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \pi$ . 所以①错误;  
对于②,由①知,  $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ , 所以  $\omega = 2$ .

$$\text{根据图象有} \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0 \\ \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{6} + \varphi\right) = 0 \\ \sin \varphi < 0 \end{cases}, \text{所以} \begin{cases} 2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2 \times \frac{5\pi}{6} + \varphi = (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 < \varphi < 2\pi \\ \sin \varphi < 0 \end{cases}$$

解得  $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ , 所以  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$ .

当  $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$  时,  $2x + \frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ .

令  $t = 2x + \frac{4\pi}{3}$ , 因为  $t = 2x + \frac{4\pi}{3}$  是增函数,  $y = \sin t$  在  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$  是增函数, 所以  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$  上单调递增;

所以②正确;

对于③,由②知,  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)$ .

当  $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$  时,  $2x + \frac{4\pi}{3} \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$ , 所以  $\sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ .

所以③错误;

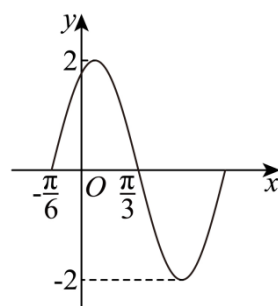
对于④, 函数  $g(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$  的图象向左平移  $\frac{2\pi}{3}$  个单位长度得到函数

$g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] = \sin 2x \neq f(x)$ , 所以④错误.

所以四个结论中错误的个数为 3.

故选: C.

24. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ,  $\left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$  的部分图象如图所示, 则下列结论正确的是 ( )



A.  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

B. 将  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 再将所有点的横坐标变为原来 2 倍, 得到  $g(x)$  的图象, 则  $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

C.  $f(x)$  的对称中心为  $\left(k\pi - \frac{\pi}{6}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$

D. 若  $-\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3}$ , 且  $f(x_1) = f(x_2)$ , 则  $f(x_1 + x_2) = \sqrt{3}$

**【答案】D**

**【知识点】** 求正弦 (型) 函数的对称轴及对称中心、由图象确定正 (余) 弦型函数解析式、利用正弦函数的对称性求参数、求图象变化前 (后) 的解析式

**【分析】** 根据函数图象确定相关参数, 可求出函数解析式, 判断 A; 利用正弦函数图象平移、伸缩变换可判断 B; 根据正弦函数的对称性可判断 C; 对于 D, 根据正弦函数图象的对称性结合已知图象得到  $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6}$ , 代入求值, 即可判断.

【详解】已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ,  $\left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ .

由图知  $A = 2$ ,  $T = 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \pi$ , 故  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ,

又过点  $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ , 且该点在函数增区间上,

故  $2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \varphi = 0$ , 则  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ,

则  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ , 故 A 错误;

将  $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 可得

$f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象, 再将所有点的横坐标变为原来 2 倍,

可得  $f\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象, 即  $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ , 故 B 错误;

令  $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 则  $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ , 即对称中心为  $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$ , 故 C 错误;

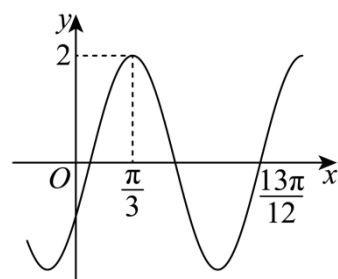
因为  $-\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3}$ , 且  $f(x_1) = f(x_2)$ , 根据正弦函数图象的对称性结合已知图象, 可知

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{12},$$

则  $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6}$ , 则  $f(x_1 + x_2) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ , 故 D 正确.

故选: D

25. 函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi)$  的部分图象如图所示, 则下列结论正确的个数是 ( )



① 函数  $f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$  对称;

② 函数  $f(x)$  的解析式可以为  $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ;

③ 函数  $f(x)$  在  $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{24}\right)$  上的值域为  $[0, 2]$ ;

④若将  $f(x)$  图象上所有点的横坐标缩短为原来的  $\frac{2}{3}$  倍, 纵坐标不变, 再向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位, 则所得函数的解析式是  $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right)$ .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【知识点】求含  $\sin x$ (型)函数的定义域、求正弦(型)函数的对称轴及对称中心、由图象确定正(余)弦型函数解析式、求图象变化前(后)的解析式

【分析】由图象求得函数解析式, 然后根据正弦函数的性质判断各结论.

【详解】由已知  $A = 2$ ,  $T = \left(\frac{13}{12}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{4}{3} = \pi$ .  $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ,

$$2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 又 } |\varphi| < \pi, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \neq 0, \text{ ①错};$$

$$\text{又 } f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right), \text{ ②正确};$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{24}\right) \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{11\pi}{12}\right), \text{ 因此 } f(x) \in (0, 2], \text{ ③错误};$$

若将  $f(x)$  图象上所有点的横坐标缩短为原来的  $\frac{2}{3}$  倍, 纵坐标不变, 得  $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 再向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位, 则所得函数的解析式是

$$y = 2\sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(3x - \frac{5\pi}{12}\right), \text{ ④错},$$

所以正确的只有一个,

故选: A.