

高考导数

1. 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$) , $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 .

(1) 当 $k = 6$ 时 ,

① 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

② 求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值 .

(2) 当 $k \geq -3$ 时 , 求证 : 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有 $\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

2. 已知函数 $f(x) = ax - xe^x$ ($a > 0$) .

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程 .

(2) 证明 : $f(x)$ 有唯一的极值点 .

(3) 若存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立 , 求实数 b 的取值范围 .