

选填训练

一、标题

1. 若复数 z 满足 $\bar{z} - |z| = -1 - 3i$ ，其中 i 为虚数单位，则 $z = (\quad)$.

A. $4 + 3i$

B. $3 + 4i$

C. $-5 + 3i$

D. $4 - 3i$

【答案】 A

【解析】 $z = a + bi$ ，则 $\bar{z} = a - bi$ ，

$$\therefore \bar{z} - |z| = -1 - 3i,$$

$$\therefore b = 3, a - \sqrt{a^2 + b^2} = -1.$$

$$\therefore a = 4,$$

$$\therefore z = 4 + 3i,$$

故选：A .

【标注】 【知识点】复数的加法和减法

2. 中国诗词大会的播出引发了全民的读书热，某小学语文老师在班里开展了一次诗词默写比赛，班里40名学生得分数据的茎叶图如图所示．若规定得分不小于85分的学生得到“诗词达人”的称号，小于85分且不小于70分的学生得到“诗词能手”的称号，其他学生得到“诗词爱好者”的称号，根据该次比赛的成就按照称号的不同进行分层抽样抽选10名学生，则抽选的学生中获得“诗词能手”称号的人数为 () .

9		1	2	5	6	8	
8		0	0	1	2	4	5 7 8
7		0	2	2	3	3	3 4 5 5 6 9
6		0	2	2	3	4	4 4 5 7 7 8 9
5		6	6	8	9		

A. 2

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】 B

【解析】 由茎叶图可得，“诗词能手”的称号有16人，

据该次比赛的成就按照称号的不同进行分层抽样抽选10名学生，

则抽选的学生中获得“诗词能手”称号的人数为 $10 \times \frac{16}{40} = 4$ 人，

故选：B．

【标注】 【知识点】 分层随机抽样

3. 已知 p, q 是简单命题, 那么“ $p \wedge q$ 是真命题”是“ $\neg p$ 是真命题”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 D

【解析】若 $p \wedge q$ 是真命题，则 p, q 都是真命题，则 $\neg p$ 是假命题，即充分性不成立，若 $\neg p$ 是真命题，则 p 是假命题，此时 $p \wedge q$ 是假命题，即必要性不成立，故“ $p \wedge q$ 是真命题”是“ $\neg p$ 是真命题”的既不充分也不必要条件．

故选D．

【标注】 【知识点】 充要条件与其他知识点结合

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{7}{8}$, $c - a = 2$, $b = 3$, 则 a 等于().

- A. **2** B. $\frac{5}{2}$ C. **3** D. $\frac{7}{2}$

【答案】 A

【解析】由题意可得 $c = a + 2$, $b = 3$, $\cos A = \frac{7}{8}$,
 $\therefore$ 由余弦定理可得 $\cos A = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$,
 代入数据可得 $\frac{7}{8} = \frac{9 + (a+2)^2 - a^2}{2 \times 3(a+2)}$,
 解方程可得 $a = 2$.
 故选 A.

【标注】 **【知识点】** SAS类三角形（利用余弦定理）

5. 已知一个样本为 $x, 1, y, 5$, 若该样本的平均数为 2, 则它的方差的最小值为 ().

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

【答案】 C

【解析】样本 $x, 1, y, 5$ 的平均数为 2，
故 $x + y = 2$ ，

故 $xy \leq 1$, 故 $S^2 = \frac{1}{4}[(x-2)^2 + (y-2)^2 + 10] = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2xy \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \times 2 = 3$,

故方差的最小值是3 ,

故选 : C .

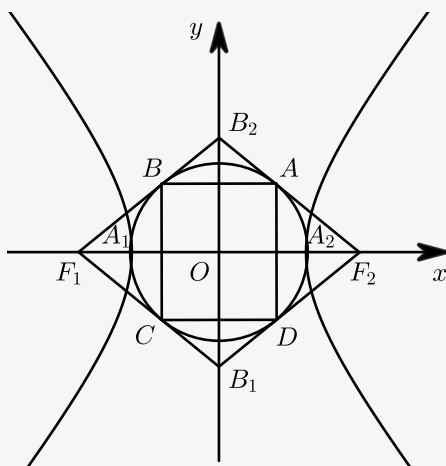
【标注】 【知识点】 极差、方差与标准差 ; 基本不等式的概念 ; 利用基本不等式求最值

6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两顶点为 A_1, A_2 , 虚轴两端点为 B_1, B_2 , 两焦点为 F_1, F_2 , 若以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$, 则双曲线的离心率是 () .

- A. $\sqrt{5} - 1$ B. $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ D. $\sqrt{3} + 1$

【答案】 C

【解析】



由题意可得 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

且 $a^2 + b^2 = c^2$, 菱形 $F_1B_1F_2B_2$ 的边长为 $\sqrt{b^2 + c^2}$,

由以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$, 切点分别为 A, B, C, D ,

由面积相等 , 可得 $\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 2c = \frac{1}{2} a \cdot 4\sqrt{b^2 + c^2}$,

即为 $b^2c^2 = a^2(b^2 + c^2)$,

即有 $c^4 + a^4 - 3a^2c^2 = 0$,

由 $e = \frac{c}{a}$, 可得 $e^4 - 3e^2 + 1 = 0$,

解得 $e^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$,

可得 $e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 或 $e = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (舍去) .

故选 : C .

【标注】 【知识点】 求双曲线的离心率

7. 为了响应国家发展足球的战略 , 哈市某校在秋季运动会中 , 安排了足球射门比赛 . 现有10名同学参加足球射门比赛 , 已知每名同学踢进的概率均为0.6 , 每名同学有2次射门机会 , 且各同学射门之间没

有影响．现规定：踢进两个得10分，踢进一个得5分，一个未进得0分，记 X 为10个同学的得分总和，则 X 的数学期望为（ ）．

A. 30

B. 40

C. 60

D. 80

【答案】 C

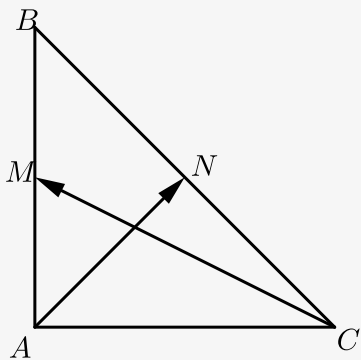
【解析】 由题意每个学生的得分服从二项分布 $X \sim B(n, p)$ ，其中 $n = 10$ ， $p = 0.6$ ，所以由二项分布的数学期望公式可得每个学生 X 的数学期望为 $E(X) = np = 0.6 \times 10 = 6$ ，因此10个同学的的数学期望是 $10E(X) = 60$ ，应选答案C．

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望；n次独立重复试验与二项分布

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 1$ ， $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ， $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$ ， $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4}$ ，则 $\angle ABC = ()$ ．
- A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】 C

【解析】 如图，



$$\because AB = AC = 1, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos \angle BAC - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, \text{ 解得 } \cos \angle BAC = 0,$$

$$\text{则 } \angle BAC = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{\pi}{4}.$$

故选：C．

【标注】 【知识点】 向量的数量积的定义

9. 若函数 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$ 为奇函数, 则使不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) + \log_2 6 < 0$ 成立的 m 的取值范围是 () .
- A. $(-\infty, 1)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$ 为奇函数,
 $\therefore f(-x) = -f(x)$, 即 $x - \log_2 \frac{2-ax}{2+x} = x + \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$,
 $\therefore a = 1$,
 不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) + \log_2 6 < 0$, 即不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) < f(1)$,
 而 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+x}{2-x}$, 要使 $f(x)$ 有意义,
 则 $\frac{2+x}{2-x} > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$, 又
 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+x}{2-x} = -x - \log_2 \left(\frac{4}{2-x} - 1\right)$,
 根据单调性的四则运算法则可得:
 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上为单调减函数,
 $\therefore 1 < \frac{1}{m} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 1$,
 故选 B.

【标注】 【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

10. 若集合 $A = \{x | x^2 < 4\}$, $B = \{y | y = x^2 - 2x - 1, x \in A\}$, 则集合 $A \cup B =$ _____ .

【答案】 $\{x | -2 \leq x < 7\}$

【解析】 集合 $A = \{x | x^2 < 4\} = \{x | -2 < x < 2\}$,
 $B = \{y | y = x^2 - 2x - 1, x \in A\} = \{y | y = (x-1)^2 - 2, x \in A\} = \{y | -2 \leq y < 7\}$,
 则集合 $A \cup B = \{x | -2 \leq x < 7\}$.
 故答案为: $\{x | -2 \leq x < 7\}$.

【标注】 【知识点】并集

11. $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中, 常数项为 _____ .

【答案】 -40

【解析】

$\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式中常数项是 $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式中的 $\frac{1}{x}$ 项与 x 的乘积，加上含 x 项与 $-\frac{1}{x}$ 的乘积。

由 $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r = 2^{5-r} \cdot C_5^r \cdot x^{5-2r}$ ，

令 $5 - 2r = -1$ ，解得 $r = 3$ ， $\therefore T_4 = 2^2 \cdot C_5^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{40}{x}$ 。

令 $5 - 2r = 1$ ，解得 $r = 2$ ， $\therefore T_3 = 2^3 \cdot C_5^2 \cdot x = 80x$ 。

所求展开式的常数项为 $\frac{40}{x} \cdot x + 80x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = 40 - 80 = -40$ 。

故答案为： -40 。

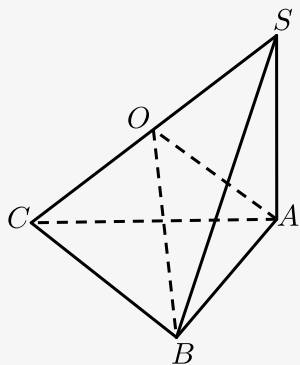
【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

12. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上， SC 是球 O 的直径，若平面 $SCA \perp$ 平面 SCB ， $SA = AC$ ， $SB = BC$ ，三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9，则球 O 的表面积为 _____。

【答案】 36π

【解析】 令 $SO = AO = OB = R$ ，

$\therefore O$ 为 SC 中点， $SA = AC$ ， $SB = BC$ ，



$\therefore AO \perp SC$ ， $BO \perp SC$ ，

$\therefore SC \perp$ 平面 ABO ，

又 $\because$ 平面 $SCA \perp$ 平面 SCB ，平面 $SCA \cap$ 平面 $SCB = SC$ ， $SC \perp AO$ ，

$\therefore AO \perp$ 平面 SCB ，

$\therefore V = \frac{1}{3} S_{\triangle SBC} \cdot OA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2R \times R \times R = 9$ ，

$\therefore R = 3$ ，

$\therefore S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 9 = 36\pi$ 。

【标注】 【知识点】空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题

13. 已知关于 x 的不等式 $|x-a| + |x-3| \geq 2a$ 的解集为 $\mathbf{R}$ ，则实数 a 的最大值为 _____ .

【答案】 1

【解析】 化简得： $|x-a| + |x-3| \geq |(x-a) - (x-3)| = |a-3| \geq 2a$ ，

当 $a-3 \geq 0$ ，即 $a \geq 3$ 时，上式化为 $a-3 \geq 2a$ ，解得 $a \leq -3$ ，所以实数 a 无解.

当 $a-3 \leq 0$ ，即 $a \leq 3$ 时，上式化为 $3-a \geq 2a$ ，解得 $3a \leq 3$ ，解得 $a \leq 1$.

综上，实数 a 的范围为 $a \leq 1$ ，

则实数 a 的最大值为 1 .

故答案为：1 .

【标注】 【知识点】含绝对值的不等式

【素养】 数学运算

14. 秉承提升学生核心素养的理念，学校开设以提升学生跨文化素养为核心的多元文化融合课程，选某艺术课程的学生唱歌、跳舞至少会一项，已知会唱歌的有 2 人，会跳舞的有 5 人，现从中选 2 人，设 ξ 为选出的人中既会唱歌又会跳舞的人数，其中 $P(\xi > 0) = \frac{7}{10}$ ，则选该艺术课程的学生人数为 _____， ξ 的 $E\xi$ 是 _____ .

【答案】 5 人； $\frac{4}{5}$

【解析】 设既会唱歌又会跳舞的有 x 人，

则文娱队中共有 $7-x$ 人，则只会一项的人数是 $7-2x$ 人，

$$\therefore P(\xi > 0) = P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = \frac{7}{10},$$

$$\therefore P(\xi = 0) = \frac{3}{10}, \text{ 即 } \frac{C_{7-2x}^2}{C_{7-x}^2} = \frac{3}{10},$$

解得 $x = 2$ ，

$\therefore$ 选该艺术课程的学生人数共有 5 人，

由题意知 ξ 的可能取值为 0, 1, 2，

$$P(\xi = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

$\therefore \xi$ 的概率分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\therefore E\xi = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；超几何分布

15. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足：当 $x \in (-1, 1]$ 时， $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ，且 $f(x+2) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立．若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有6个零点，则实数 m 的取值范围是_____．

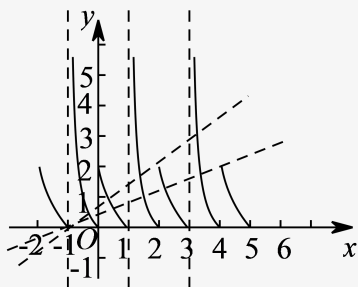
【答案】 $\left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

【解析】 $\because f(x+2) = f(x)$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期为2．

$$\text{又} \because \text{当 } x \in (-1, 1] \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象如下图所示：



$$\text{令函数 } g(x) = f(x) - m(x+1) = 0,$$

$$\text{则 } f(x) = m(x+1),$$

若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1) = 0$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有6个零点，

则 $y = f(x)$ 与 $y = m(x+1)$ 的图象在区间 $[-1, 5]$ 内有6个交点．

$\because y = m(x+1)$ 恒过点 $(-1, 0)$ ，

过 $(-1, 0)$ ， $(4, 2)$ 点的直线斜率为 $\frac{2}{5}$ ，

过 $(-1, 0)$ ， $(2, 2)$ 点的直线斜率为 $\frac{2}{3}$ ，

根据图象可得： $m \in \left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$ ，

故答案为： $\left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$ ．

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；已知零点情况求参数的取值范围

标题

1. 设复数 $z = a + 2i$ ($a \in \mathbf{R}$) 的共轭复数为 $\bar{z}$, 且 $z + \bar{z} = 2$, 则复数 $\frac{|z|}{2 - ai}$ 在复平面内对应点位于 () .
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 A

【解析】 $\bar{z} = a - 2i$,

$$z + \bar{z} = 2a = 2,$$

$$\therefore a = 1, z = 1 + 2i,$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{|1 + 2i|}{2 - i} &= \frac{\sqrt{1 + 2^2}}{2 - i} \\&= \frac{\sqrt{5}(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \\&= \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}i,\end{aligned}$$

故在第一象限.

【标注】 【知识点】 复数的乘法和除法

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^3 < 1$ ”是“ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ”的 () .
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 “ $x^3 < 1$ ”解得 $x < 1$,

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \text{ 解得 } 0 < x < 1,$$

则“ $x^3 < 1$ ”是“ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ”的必要而不充分条件.

故选 B.

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

3. 已知: $a = \ln \frac{11}{4}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{e}}$, $c = \log_{\frac{1}{e}} \frac{1}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $c > a > b$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

【答案】 A

【解析】 $\because 1 = \lg e < a = \ln \frac{11}{4} < c = \log_{\frac{1}{e}} \frac{1}{3} = \ln 3$,

$$0 < b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{e}} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1,$$

$\therefore a、b、c$ 的大小关系为 $c > a > b$.

故选A.

【标注】 【知识点】 指数函数的图象及性质；指对幂比较大小；对数函数的图象及性质

4. 已知甲、乙两人独立出行，各租用共享单车一次（假定费用只可能为1、2、3元）. 甲、乙租车费用为1元的概率分别是0.5、0.2，甲、乙租车费用为2元的概率分别是0.2、0.4，则甲、乙两人所扣租车费用相同的概率为（ ）.

A. 0.18

B. 0.3

C. 0.24

D. 0.36

【答案】 B

【解析】 由题意可知，

甲乙租车费用为3元的概率分别是0.3、0.4，

则所扣车费相同的概率 $P = 0.5 \times 0.2 + 0.2 \times 0.4 + 0.3 \times 0.4 = 0.3$.

故选B.

【标注】 【知识点】 相互独立事件的概率乘法公式

5. 在 $\triangle ABC$ 中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，若 $a = 1$ ， $c = 2\sqrt{3}$ ， $b \sin A = a \sin \left(\frac{\pi}{3} - B\right)$ ，则

$\sin C =$ （ ）.

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$

B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{12}$

D. $\frac{\sqrt{57}}{19}$

【答案】 B

【解析】 $\because b \sin A = a \sin \left(\frac{\pi}{3} - B\right)$,

$$\therefore b \sin A = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B - \frac{1}{2} \sin B \right),$$

$$\therefore \sin B \sin A + \frac{1}{2} \sin A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos B, \quad 3 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin A \cos B,$$

又 $\sin A \neq 0$,

$$\therefore 3 \sin B = \sqrt{3} \cos B, \quad \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad B = 30^\circ,$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{1 + 12 - b^2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b^2 = 7,$$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{7}, \sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

故选：B.

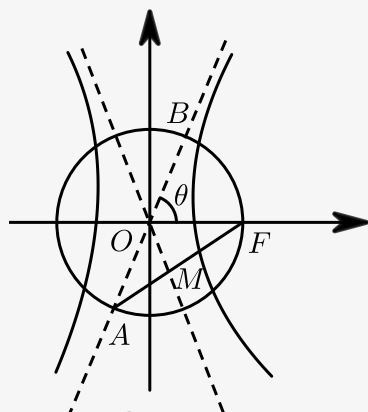
【标注】 【知识点】同角三角函数的基本关系式；正余弦定理综合求解边角

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的右焦点为 F , 圆 $x^2 + y^2 = c^2$ (c 为双曲线的半焦距) 与双曲线 C 的一条渐近线交于 A, B 两点, 且线段 AF 的中点 M 落在另一条渐近线上, 则双曲线 C 的方程是 () .

A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

【答案】 D

【解析】 草图如下：



$$\therefore \tan \theta = \frac{b}{a},$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$y_B = |OB| \cdot \sin \theta = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$x_B = |OB| \cdot \cos \theta = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\text{即 } B\left(\frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

$$\text{根据对称性 } A\left(-\frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

$$\text{则 } M\left(\frac{1}{2}\left(c - \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\frac{bc}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

$$\text{将 } M \text{ 点代入 } y = -\frac{b}{a}x, \text{ 整理可得 } \begin{cases} a^2 = 1 \\ c^2 = 4 \end{cases},$$

$$\text{即双曲线方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

故选D.

【标注】 【知识点】双曲线的基本量求解

7. 把函数 $f(x) = A \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($A \neq 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x-m)$ ($m > 0$) 是偶函数, 则实数 m 的最小值是 ().
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{\pi}{12}$

【答案】 C

【解析】 $g(x) = A \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\right]$
 $= A \sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right),$

$\therefore g(x-m)$ 的对称轴为 $x = 0$,

$\therefore g(x)$ 的对称轴为 $x = -m$,

$$\text{即 } 2x - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + \frac{k}{2}\pi$$

$$-m = \frac{7}{12}\pi + \frac{k}{2}\pi$$

$$m = -\frac{7}{12}\pi - \frac{k}{2}\pi,$$

又 $\because m > 0$,

$\therefore$ 当 $k = -2$ 时, m 最小为 $\frac{5}{12}\pi$.

故选 C.

【标注】 【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质；正余弦型、正切型函数图象变换

8. 已知 $a, b > 0$, $\left(a - \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{b}{a}$, 则当 $a + \frac{1}{b}$ 取最小值时, $a^2 + \frac{1}{b^2}$ 的值为 ().
- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. 4

【答案】 C

【解析】 由 $\left(a - \frac{1}{b}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{b^2} - \frac{2a}{b} = \frac{b}{a}$ 得,

$$a^2 + \frac{1}{b^2} = \frac{2a}{b} + \frac{b}{a},$$

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2$$

$$= a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{2a}{b}$$

$$= \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b}$$

$$= \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} \geq 4,$$

等号成立时 $\frac{4a}{b} = \frac{b}{a}$, 即 $b = 2a$, 此时 $a^2 + \frac{1}{b^2} = \frac{2a}{b} + \frac{b}{a} = 3$.

故选C .

【标注】 【知识点】基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值；基本不等式成立的条件

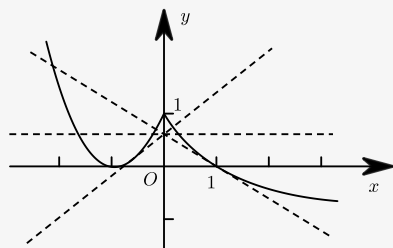
9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = f(1-x) - kx + k - \frac{1}{2}$ 恰有三个不同的零点, 则 k 的取值范围是 () .

A. $(-2 - \sqrt{2}, 0] \cup \left\{ \frac{9}{2} \right\}$
 C. $(-2 - \sqrt{2}, 0] \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

B. $(-2 + \sqrt{2}, 0] \cup \left\{ \frac{9}{2} \right\}$
 D. $(-2 + \sqrt{2}, 0] \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

【答案】 D

【解析】 $\because g(x) = f(1-x) - kx + k - \frac{1}{2}$ 恰有3个不同零点,
 $\therefore$ 方程 $f(1-x) = k(x-1) + \frac{1}{2}$ 恰有3个不同实根,
 令 $1-x = t$, 则方程 $f(t) = -kt + \frac{1}{2}$ 恰有三个不同实根,
 即函数 $y = f(x)$ 与 $y = -kx + \frac{1}{2}$ 的图象恰有3个不同交点,
 画出函数图象如下图:



当 $-k = 0$ 即 $k = 0$ 时有三个交点,

当 $y = -kx + \frac{1}{2}$ 与 $f(x) = x^2 + 2x + 1 (x < 0)$ 相切时,

$$-kx + \frac{1}{2} = x^2 + 2x + 1,$$

$$\text{化简得: } x^2 + (2+k)x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\text{由 } 2+k > 0, \Delta = 0,$$

$$\text{得: } k = -2 + \sqrt{2}.$$

当 $y = -kx + \frac{1}{2}$ 与 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}, x \geq 0$ 相切时,

$$-kx + \frac{1}{2} = \frac{1-x}{1+x},$$

$$\text{整理得: } kx^2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2} = 0.$$

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{k + \frac{1}{2}}{k} \geq 0, \\ \Delta = 0 \end{cases} \text{ 解得: } k = \frac{1}{2}.$$

故由图可得 $-2 + \sqrt{2} < k \leq 0$ 或 $k = \frac{1}{2}$ 时函数 $y = f(x)$ 与 $y = -kx + \frac{1}{2}$ 的图象恰有 3 个不同交点，即函数 $g(x) = f(1-x) - kx + k - \frac{1}{2}$ 有 3 个不同零点。

故选 D。

【标注】 【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；函数零点的概念

10. 已知全集为 $\mathbf{R}$ ，集合 $M = \{-1, 0, 1, 5\}$ ， $N = \{x | x^2 - x - 2 \geq 0\}$ ，则 $M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\{0, 1\}$

【解析】 $N = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$ ，

$\complement_{\mathbf{R}} N = \{x | -1 < x < 2\}$ ，

$M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = \{0, 1\}$ 。

【标注】 【知识点】补集；交、并、补集混合运算

11. $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中， $\frac{1}{x^2}$ 项的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 240

【解析】 $T_{r+1} = C_6^r (2\sqrt{x})^{6-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r$ ，

$$= C_6^r 2^{6-r} (-1)^r x^{3-\frac{5}{2}r}，$$

令 $3 - \frac{5}{2}r = -2$ ，得 $r = 2$ ，

$$\therefore T_3 = C_6^2 2^4 (-1)^2 x^{-2}，$$

$$= 240x^{-2}。$$

即 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为 240。

【标注】 【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增，若实数 a 满足 $f(2^{\log_3 a}) > f(-\sqrt{2})$ ，则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $(0, \sqrt{3})$

【解析】 由题意得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，

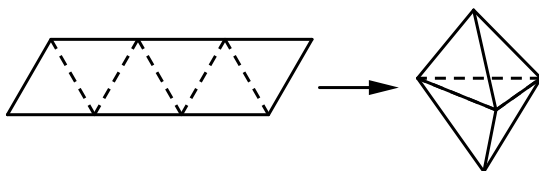
$$\therefore f(2^{\log_3 a}) > f(-\sqrt{2})，$$

$$\therefore |2^{\log_3 a}| < |-\sqrt{2}|，$$

$$\text{即 } \log_3 a < \frac{1}{2}, \\ 0 < a < \sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】 函数单调性与奇偶性综合问题

13. 农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽乾，俗称“粽子”，古称“角黍”，是端午节大家都会品尝的食品，传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原．如图，平行四边形形状的纸片是由六个边长为1的正三角形构成的，将它沿虚线折起来，可以得到如图所示粽子形状的六面体，则该六面体的体积为 _____；若该六面体内有一球，则该球体积的最大值为 _____．

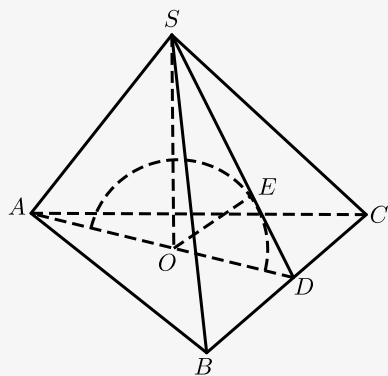


【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{8\sqrt{6}\pi}{729}$

【解析】 该六面体是由两个全等的正四面体组合而成，

正四面体的棱长为1，

如图，在棱长为1的正四面体 $S-ABC$ 中，



取 BC 的中点 D ，连接 SD 、 AD ，

作 $SO \perp$ 平面 ABC ，垂足 O 在 AD 上，

$$\text{则 } AD = SD = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$OD = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$\therefore$ 该六面体的体积：

$$V = 2V_{S-ABC} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

当该六面体内有一球，且该球体积取最大值时，

球心为 O ，且该球与 SD 相切，

过球心 O 作 $OE \perp SD$,

则 OE 就是球的半径,

$$\therefore SO \cdot OD = SD \cdot OE,$$

$$\therefore \text{球的半径 } R = OE = \frac{SO \cdot OD}{SD} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{9},$$

$\therefore$ 该球体积的最大值为:

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^3 = \frac{8\sqrt{6}\pi}{729}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{8\sqrt{6}\pi}{729}.$$

【标注】 【知识点】空间几何体的体积;空间几何体的内切球、外接球问题

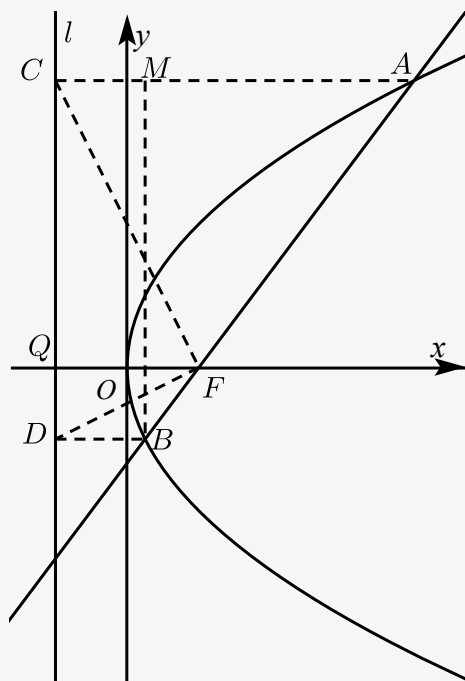
14. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 准线为 l , 过焦点的直线交抛物线于 A, B 两点, 分别过 A, B 作 l 的垂线, 垂足为 C, D , 若 $|AF| = 4|BF|$, 则 $p = \underline{\hspace{1cm}}$, 三角形 CDF 的面积为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 2; 5

【解析】 方法一: 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$,

所以 $\frac{p}{2} = 1$, 所以 $p = 2$,

如图所示, 过点 B 作 $BM \parallel l$, 交直线 AC 与点 M ,



由抛物线的定义知 $|AF| = |AC|$, $|BF| = |BD| = CM$,

且 $|AF| = 4|BF|$,

所以 $|AM| = 3|BF|$, $|AB| = 5|BF|$, 由勾股定理得 $|BM| = 4|BF|$,

所以直线 AB 的斜率为 $k = \tan \angle BAM = \frac{4}{3}$,

设直线 AB 的方程为 $y = \frac{4}{3}(x - 1)$,

点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{4}{3}(x - 1) \\ y^2 = 4x \end{cases},$$

消去 y 整理得 $4x^2 - 17x + 4 = 0$,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{17}{4},$$

$$\text{所以 } |AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{25}{4},$$

$$\text{所以 } |CD| = |AB| \sin \angle BAM = \frac{25}{4} \times \frac{4}{5} = 5,$$

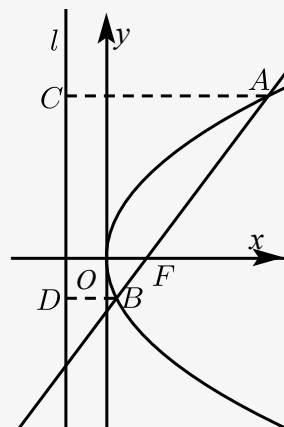
$$\text{所以 } \triangle CDF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5,$$

故答案为: 2, 5.

方法二: $\because$ 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $F(1, 0)$,

$\therefore p = 2$, 即抛物线方程为 $y^2 = 4x$,

$\therefore$ 准线 l 为 $x = -1$,



又 $\because$ 设过焦点的直线为 $x = my + 1$ 并交抛物线于 A, B ,

$$\therefore \text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } y^2 - 4my - 4 = 0,$$

$$\text{又 } \because \text{设 } A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), \text{ (设 } y_1 > 0, y_2 < 0 \text{)},$$

$$\therefore y_1 + y_2 = 4m, \quad ①$$

$$y_1 y_2 = -4, \quad ②$$

$$\text{又 } \because |AF| = 4|BF|,$$

$$\therefore \text{由抛物线性质可得 } |AC| = 4|BD|,$$

$$\text{且 } |y_1| = |4y_2| \Rightarrow y_1 = -4y_2,$$

$$\therefore 1 + \frac{y_1^2}{4} = 4\left(1 + \frac{y_2^2}{4}\right),$$

$$\text{解得 } y_1^2 = 4y_2^2 + 12, \quad ③$$

$$\text{对 } ① \text{ 式两边平方得: } (y_1 + y_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2 = 16m^2,$$

$$\text{解得 } y_1^2 + y_2^2 = 16m^2 + 8,$$

$$\therefore |y_1 - y_2| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2} = 4\sqrt{m^2 + 1},$$

$$\text{又} \begin{cases} y_1^2 = 4y_2^2 + 12 \\ y_1^2 + y_2^2 = 16m^2 + 8 \\ y_1 = -4y_2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } m^2 = \frac{9}{16},$$

$$\therefore |y_1 - y_2| = 4\sqrt{m^2 + 1} = 5,$$

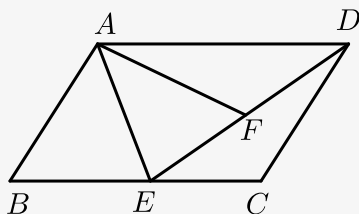
$$\therefore S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2}CD \times P = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_1 - y_2| = 5.$$

【标注】 【知识点】面积问题；抛物线的基本量求解

15. 已知平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $9\sqrt{3}$, $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, E 为线段 BC 的中点. 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = \underline{\hspace{2cm}}$; 若 F 为线段 DE 上的一点, 且 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{5}{6} \overrightarrow{AD}$, 则 $|\overrightarrow{AF}|$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-9; \sqrt{5}$

【解析】 如图, 设平行四边形的两边 AB, AD 长分别为 a, b ,



则平行四边形 $ABCD$ 的面积

$$S = ab \sin \frac{2\pi}{3} = 9\sqrt{3},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2}ab = 9\sqrt{3}, \text{ 得: } ab = 18,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = ab \cos \frac{2\pi}{3} = 18 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -9,$$

$\because E$ 是 BC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$$

$$= \lambda \left(\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$$

$$= \lambda \overrightarrow{AE} + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\lambda \right) \overrightarrow{AD},$$

$\because E, F, D$ 三点共线,

$$\therefore \lambda + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\lambda \right) = 1,$$

$$\text{解得: } \lambda = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD},$$

$$\begin{aligned} |\vec{AF}|^2 &= \frac{1}{9} \vec{AB}^2 + \frac{25}{36} \vec{AD}^2 + \frac{5}{9} \vec{AB} \cdot \vec{AD} \\ &= \frac{1}{9} a^2 + \frac{25}{36} b^2 - 5 \geq 2\sqrt{\frac{1}{9} a^2 \times \frac{25}{36} b^2} - 5 \\ &= \frac{5}{9} ab - 5 = 5, \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{1}{3}a = \frac{5}{6}b$ 时等号成立,

$$\therefore |\vec{AF}| \geq \sqrt{5},$$

即 $|\vec{AF}|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$,

综上所述, 故答案为: $-9; \sqrt{5}$.

【标注】 【知识点】基本不等式的实际应用; 利用基本不等式求最值; 平面向量基本定理及其意义; 平面向量中的三点共线问题; 向量的数量积的定义; 线性运算和数量积综合问题; 向量的模

三、标题

1. 设集合 $M = \{x | x^2 \leq 4\}$, 集合 $N = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$, $\complement_M N = (\quad)$.

A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$

B. $\{-2, -1, 0\}$

C. $\{x | x \leq -2\}$

D. $\{x | 0 < x < 2\}$

【答案】 A

【解析】 集合 $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$,

$$\text{集合 } N = \{x | 1 \leq x \leq 2\},$$

$$\complement_M N = \{x | -2 \leq x < 1\}.$$

故选A.

【标注】 【知识点】交、并、补集混合运算; 补集

2. 设 p : “事件A与事件B互斥”, q : “事件A与事件B互为对立事件”, 则 p 是 q 的 ().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 互斥不一定对立, 而对立一定互斥, 因此, 互斥为对立的必要而不充分条件.

故选B.

【标注】

【知识点】充要条件与其他知识点结合；互斥事件与对立事件；互斥事件与对立事件的概念辨析

3. 已知 x 与 y 之间的一组数据：

x	0	1	3	4
y	2.2	4.3	4.8	6.7

则 y 与 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.95x + a$ ，则 a 的值为（ ）.

A. 0.325

B. 0

C. 2.2

D. 2.6

【答案】D

【解析】计算 $\bar{x} = \frac{1}{4} \times (0 + 1 + 3 + 4) = 2$ ，

$\bar{y} = \frac{1}{4} \times (2.2 + 4.3 + 4.8 + 6.7) = 4.5$ ，

代入 y 与 x 的线性回归方程 $\hat{y} = 0.95x + a$ 中，

解得 $a = 4.5 - 0.95 \times 2 = 2.6$.

故选D .

【标注】 【知识点】线性回归方程过平均数点；线性回归方程的其他应用

4. 已知双曲线的一个焦点与抛物线 $x^2 = 20y$ 的焦点重合，且双曲线上的一点 P 到双曲线的两个焦点的距离之差的绝对值等于6，则该双曲线的标准方程为（ ）.

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

C. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

D. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

【答案】C

【解析】∵抛物线标准方程 $x^2 = 20y$ ，

则焦点坐标为 $(0, 5)$ ，即 $c = 5$ ， $c^2 = 25$ ，

又根据双曲线定义可得 $2a = 6$ ，即 $a^2 = 9$ ，

∵ $c^2 = a^2 + b^2$ ，

∴ $b^2 = 16$ ，

故双曲线方程为 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

故选C .

【标注】 【知识点】双曲线的标准方程

5.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为 S , $3c^2 = 16S + 3(b^2 - a^2)$, 则 $\tan B = ()$.

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】 D

【解析】 根据面积公式, $S = \frac{1}{2}ac \sin B$,

则原式可整理为:

$$3c^2 = 16 \times \frac{1}{2}ac \sin B + 3b^2 - 3a^2,$$

$$3(c^2 + a^2 - b^2) = 8ac \sin B,$$

$$(a^2 + c^2 - b^2) = \frac{8}{3}ac \sin B,$$

根据余弦定理:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\frac{8}{3}ac \sin B}{2ac} = \frac{4}{3} \sin B,$$

$$\text{即} \tan B = \frac{3}{4}.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 正余弦定理综合求解边角; 三角形面积公式; 余弦定理

6. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 其体积为 $\frac{4}{3}$, 若圆柱的一个底面的圆周经过正方形的四个顶点, 另一个底面的圆心为该棱锥的高的中点, 则该圆柱的表面积为().

- A. π B. 2π C. 4π D. 6π

【答案】 C

【解析】 设正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 h , 则其体积 $V = \frac{1}{3} \times 2 \times h = \frac{4}{3}$, 得 $h = 2$,

若圆柱的一个底面的圆周经过正方形的四个顶点, 另一个底面的圆心为该棱锥高的中点,

则圆柱的底面圆半径为1, 圆柱的高为1,

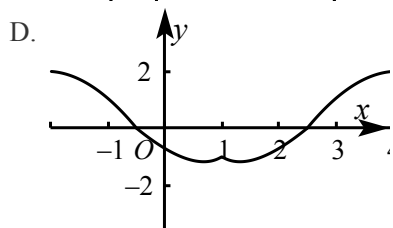
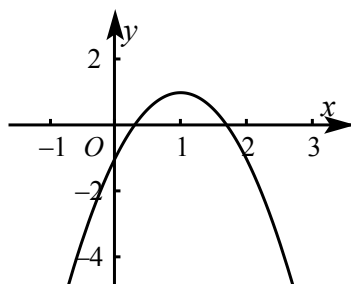
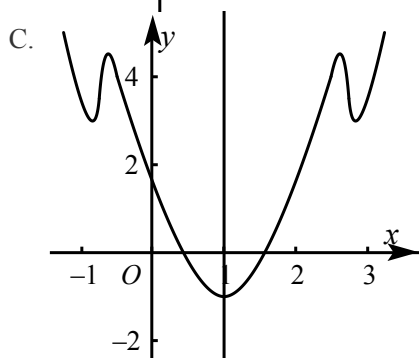
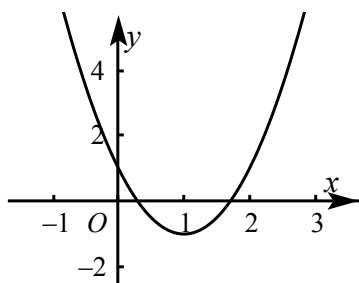
则该圆柱的表面积: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi \times 1^2 + 2\pi \times 1 \times 1 = 4\pi$.

故选C.

【标注】 【知识点】 平面图形、空间几何体的直观图认识; 组合体求体积、表面积问题; 空间几何体的表面积

7. 函数 $f(x) = e^{|x-1|} - 2\cos(x-1)$ 的部分图象可能是().

- A. B.



【答案】 A

【解析】 因为 $f(1) = -1$ ，所以排除B；

因为 $f(0) = e - 2\cos 1 > 0$ ，所以排除D；

因为当 $x > 2$ 时， $f(x) = e^{x-1} - 2\cos(x-1)$ ，

所以 $f'(x) = e^{x-1} + 2\sin(x-1) > e - 2 > 0$ ，

即 $x > 2$ 时， $f(x)$ 具有单调性，排除C。

故选A。

【标注】 【知识点】函数图象的识别问题

8. 用数字0, 1, 2, 3, 4组成没有重复数字且至少有两个数字是偶数的四位数，则这样的四位数的个数为()。

A. 64

B. 72

C. 96

D. 144

【答案】 C

【解析】 若有两个数字是偶数，则四位数个数有 $A_4^4 + C_2^1 C_3^1 A_3^3 = 24 + 36 = 60$ 个，

若有三个数字是偶数，则四位数个数有 $C_2^1 C_3^1 A_3^3 = 36$ 个，

根据分类加法计数原理可知，满足条件的四位数有 $60 + 36 = 96$ 个。

故选C。

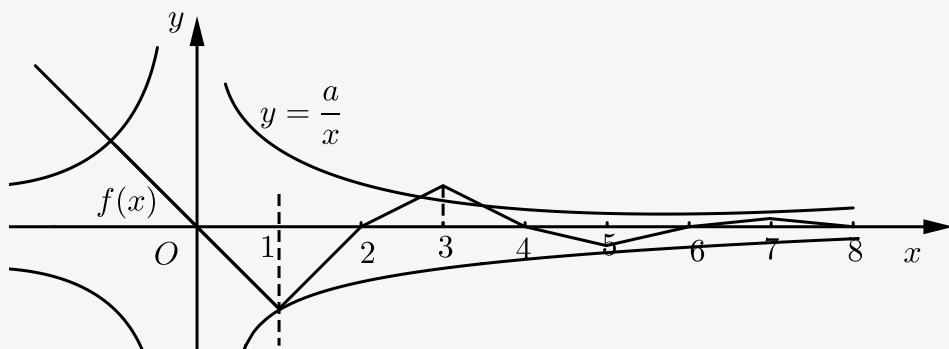
【标注】 【知识点】分步乘法计数原理；分类加法计数原理；加法原理与乘法原理的综合运用

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|-1, & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}f(x-2), & x > 2 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = x \cdot f(x) - a (a \geq -1)$ 的零点个数为2, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$ 或 $a = -1$ B. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$
C. $\frac{1}{8} < a < \frac{3}{2}$ 或 $a = -1$ D. $\frac{1}{8} < a < \frac{3}{2}$

【答案】 D

【解析】 $x \leq 2$ 时, $f(x) = \begin{cases} x-2, & 1 \leq x \leq 2 \\ -x, & x < 1 \end{cases}$,
 $2 < x \leq 4$ 时, $f(x) = -\frac{1}{2}[|x-3|-1]$,
 $4 < x \leq 6$ 时, $f(x) = \frac{1}{4}[|x-5|-1]$,
 $\dots$

故函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{a}{x}$ 的图象如下,



令 $g(x) = x \cdot f(x) - a = 0$, 当 $x = 0$ 时, 不符合题意,

当 $x \neq 0$ 时, 得 $f(x) = \frac{a}{x}$, 若 $a > 0$, 可得

$$\begin{cases} \frac{a}{3} < \frac{1}{2}, \\ \frac{a}{7} > \frac{1}{8} \end{cases}, \text{解得: } \frac{7}{8} < a < \frac{3}{2},$$

若 $a = 0$, $g(x) = x \cdot f(x) - a$ 有无数个零点, 不合题意,

若 $-1 \leq a < 0$, 因 $y = \frac{a}{x}$ 的图象的左支与 $y = f(x)$ 的图象有一个交点, 则右支必然只能交于一点,

当 $-1 < a < 0$ 时, 因为 $f(1) = -1 < \frac{a}{1}$, 所以在 $(0, 2)$ 上有两个交点, 不合题意,

当 $a = -1$ 时, $\frac{a}{5} > -\frac{1}{4}$, 不合题意,

综上, 实数 a 的取值范围是 $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$.

故选: D.

【标注】 【知识点】 分段函数; 利用函数图象研究方程根的分布问题 (图象与零点综合); 已知零点情况求参数的取值范围; 函数零点的概念

10. 设复数 z 满足 $(1 + 2i)z = 3 - 4i$ (i 是虚数单位), 则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 $z = \frac{3-4i}{1+2i} = \frac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = -1-2i$,

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

故答案为： $\sqrt{5}$.

【标注】 【知识点】复数的模

11. $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中，常数项是 _____ .

【答案】 60

【解析】 $T_{1+1} = C_6^r (2x)^{6-r} \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^r$

$$= C_6^r 2^{6-r} (-1)^r x^{6-\frac{3}{2}r},$$

$$\text{令 } 6 - \frac{3}{2}r = 0, \text{ 得 } r = 4,$$

$$\text{则 } T_5 = C_6^4 2^2 (-1)^4 x^0$$

$$= 60.$$

【标注】 【知识点】求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数；二项式定理的展开式

12. 若直线 $3x + 4y = m$ 与圆 $x^2 + y^2 = m$ 相切，则实数 $m =$ _____ .

【答案】 25

【解析】 相切时，圆心到直线距离等于半径，即 $d = r$ ，

圆心为 $(0,0)$ ，半径为 $\sqrt{m}$ ，

$$\text{可得 } \frac{|-m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{m},$$

解得 $m = 25$.

【标注】 【知识点】圆的切线的相关问题

13. 某批产品共10件，其中含有2件次品．若从该批产品中任意抽取3件，则取出的3件产品中恰好有一件次品的概率为 _____；取出的3件产品中次品的件数 X 的期望是 _____ .

【答案】 $\frac{7}{15}$ ； $\frac{3}{5}$

【解析】 从10件产品中，抽取3件，有 $C_{10}^3 = 120$ 种可能；

若取出的3件中恰有1件是次品，有 $C_8^2 \cdot C_2^1 = 56$ 种可能；

故满足题意的概率 $P = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$ ；

根据题意， $x = 0, 1, 2$ ，

$$P(x=0) = \frac{C_8^3}{120} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} ; P(x=1) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^1}{120} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} ,$$

$$P(x=2) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15} ,$$

$$\text{故 } E(x) = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{2}{3} ,$$

故答案为： $\frac{7}{15} ; \frac{2}{3}$ 。

【标注】 【知识点】离散型随机变量的数学期望

14. 已知 x, y 为正实数，且 $xy + 2x + 4y = 41$ ，则 $x + y$ 的最小值为 _____。

【答案】 8

【解析】 因为 x, y 为正实数，且 $xy + 2x + 4y = 41$ ，

$$\text{所以 } x = \frac{41 - 4y}{y + 2} ,$$

$$\text{所以 } x + y = y + \frac{41 - 4y}{y + 2} = \frac{-4(y + 2) + 49}{y + 2} + y = -6 + \frac{49}{y + 2} + y + 2 \geq -6 + 2\sqrt{\frac{49}{y + 2} \cdot (y + 2)} = 8 .$$

当且仅当 $y + 2 = \frac{49}{y + 2}$ 即 $y = 5$ ， $x = 3$ 时取等号，此时 $x + y$ 取得最小值 8。

故答案为：8。

【标注】 【素养】数学运算；逻辑推理

【知识点】 已知等式关系求最值

15. 在 $\triangle ABC$ 中，点 M, N 分别为 CA, CB 的中点，点 G 为 AN 与 BM 的交点，若 $AB = \sqrt{5}$ ， $CB = 1$ ，且满足 $3\vec{AG} \cdot \vec{MB} = \vec{CA}^2 + \vec{CB}^2$ ，则 $\vec{BC} \cdot \vec{BA} =$ _____； $\vec{AG} \cdot \vec{AC} =$ _____。

【答案】 $1 ; \frac{8}{3}$

【解析】 根据向量加减法可得， $\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA}$ ，

$\because M, N$ 分别为 CA, CB 的中点， G 是 AN 与 BM 的交点，

$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\vec{NB} = \frac{1}{2}\vec{CB}$ ， $\vec{MA} = \frac{1}{2}\vec{CA}$ ，

$$\text{即 } \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AN} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{BN}) = \frac{2}{3}\left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CB}\right) .$$

$$\because \vec{MB} = \vec{MA} + \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \vec{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{BA}) + \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{BC}) ,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore 3\vec{AG} \cdot \vec{MB} = 3 \times \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{AB} \right) \cdot \frac{1}{2} (\vec{AB} - \vec{BC}) \\
&= -\frac{1}{2} |\vec{BC}|^2 - \frac{1}{2} \vec{BC} \cdot \vec{AB} + |\vec{AB}|^2 \\
&= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \vec{BC} \cdot \vec{AB} . \\
&\therefore |\vec{CA}|^2 + |\vec{CB}|^2 = (\vec{CB} + \vec{BA}) \cdot (\vec{CB} + \vec{BA}) + |\vec{CB}|^2 \\
&= (\vec{BC} + \vec{AB}) (\vec{BC} + \vec{AB}) + |\vec{BC}|^2 \\
&= 2|\vec{BC}|^2 + 2\vec{BC} \cdot \vec{AB} + |\vec{AB}|^2 \\
&= 7 + 2\vec{BC} \cdot \vec{AB} , \\
&\therefore \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \vec{BC} \cdot \vec{AB} = 7 + 2\vec{BC} \cdot \vec{AB} , \\
&\therefore \vec{BC} \cdot \vec{AB} = -1 , \\
&\text{故 } \vec{BC} \cdot \vec{BA} = 1 . \\
&\therefore \vec{AG} \cdot \vec{AC} \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{AB} \right) \cdot (\vec{BC} + \vec{AB}) \\
&= \frac{1}{3} |\vec{BC}|^2 + \vec{BC} \cdot \vec{AB} + \frac{2}{3} |\vec{AB}|^2 \\
&= \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3} \times 5 \\
&= \frac{8}{3} .
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】向量的数量积的定义；平面向量数量积运算（非坐标）；线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律

四、标题

1. 已知集合 $A = \{x ||x| < 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\{-1, 0, 1\}$

B. $\{0, 1\}$

C. $\{0, -1\}$

D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 集合 $A = \{x ||x| < 2\} = \{x | -2 < x < 2\}$, 集合 $B = \{-1, 0, 1, 2\}$,

$\therefore A \cap B = \{-1, 0, 1\}$.

故选A .

【标注】 【知识点】交、并、补集混合运算；交集

2. 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 3a_3$, 则公比 $q = ()$.

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1或 $-\frac{1}{2}$ D. -1或 $\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_3 = 3a_3$,

则 $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_3$,

即 $a_1 + a_2 = 2a_3$,

$2q^2 - q - 1 = 0$,

$(2q + 1)(q - 1) = 0$,

解得 $q = -\frac{1}{2}$ 或 $q = 1$,

$\therefore$ 公比 $q = 1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

故选C.

【标注】 【知识点】 求等比数列的基本量

3. 已知 $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, $c = \log_3 \frac{2}{3}$, 则 $()$.

- A. $b > a > c$ B. $a > b > c$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

【答案】 A

【解析】 $\because a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$,

$0 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$,

$\therefore 0 < a < 1$,

$\because b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$,

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$,

$\therefore b > 1$,

$\because c = \log_3 \frac{2}{3}$, $\log_3 \frac{2}{3} < \log_3 1 = 0$,

$\therefore c < 0$,

综上所述, $b > a > c$.

故选A.

【标注】 【知识点】 对数函数的图象及性质; 对数的概念及其运算; 指对幂比较大小

4. 设 $p: \log_2 x < 0$, $q: 2^{x-1} < 1$, 则 p 是 q 的 $()$.

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $\because p: \log_2 x < 0$,

则 $\log_2 x < \log_2 1$,

可得 $0 < x < 1$,

$q: 2^{x-1} < 1$,

则 $2^{x-1} < 2^0$,

可得 $x - 1 < 0$,

即 $x < 1$,

$\therefore 0 < x < 1 \Rightarrow x < 1$,

但 $0 < x < 1 \Leftarrow x < 1$,

所以 p 是 q 的充分而不必要条件,

故 A 正确.

【标注】 【知识点】充要条件与不等式结合

5. 若直线 $y = x - 2$ 被圆 $(x - a)^2 + y^2 = 4$ 所截的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则实数 a 的值为 ().

A. 0或4

B. -1或 $\sqrt{3}$

C. 1或3

D. -2或6

【答案】 A

【解析】 $\because$ 直线 $y = x - 2$ 被圆 $(x - a)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 圆心 $(a, 0)$ 到直线 $y = x - 2$ 的距离为 $d = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$,

$\therefore \sqrt{2} = \frac{|a - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|a - 2|}{\sqrt{2}}$, 则 $|a - 2| = 2$, 解得 $a = 4$ 或 $a = 0$.

故选: A.

【标注】 【知识点】圆的弦长的相关问题

6. 已知正方体的体积是8, 则这个正方体的外接球的体积是 ().

A. $2\sqrt{3}\pi$

B. $4\sqrt{3}\pi$

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

D. $8\sqrt{3}\pi$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 正方体体积为8, $\therefore$ 正方体边长2,

又 $\because$ 正方体的体对角线是正方体外接球直径,

$$\therefore \text{直径为} \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{正方体外接球的体积是} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times (\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}\pi.$$

故选B.

【标注】【知识点】空间几何体的体积;组合体求体积、表面积问题;圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征;棱柱、棱锥、棱台的结构特征;空间几何体的内切球、外接球问题

7. 将函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图象沿 x 轴向右平移 $m(m > 0)$ 个单位长度, 所得函数的图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是().

A. $-\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{12}$

C. $-\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

将函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 向左平移 $m(m > 0)$ 个单位得到函数

$$y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3} - m\right),$$

$$\text{由题意可得} -\frac{\pi}{3} - m = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore m = -\frac{5}{6}\pi - k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{所以} m \text{ 的最小值为 } \frac{\pi}{6}.$$

故选D.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点的距离为4, 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2, -1)$, 则双曲线的焦距为().

A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. $2\sqrt{5}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 $(-a, 0)$, 渐近线为 $y = \frac{b}{a}x$, 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$,

$$\therefore \text{点} (-a, 0) \text{ 到点 } (\frac{p}{2}, 0) \text{ 的距离为 } \frac{p}{2} + a = 4, \text{ 由 } \begin{cases} x = -\frac{p}{2} \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases}, \text{ 解得 } x = -\frac{p}{2}, y = -\frac{pb}{2a},$$

$$\text{则 } \begin{cases} -\frac{p}{2} = -2 \\ -\frac{pb}{2a} = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } p = 4, \frac{b}{a} = \frac{1}{2},$$

又 $\because \frac{p}{2} + a = 4$, 则 $a = 2$,

$\therefore a = 2, b = 1$,

所以双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 $2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5}$, 故D正确;

故选D.

【标注】 【知识点】 抛物线的标准方程; 双曲线的渐近线

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, 0)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(0, 1)$

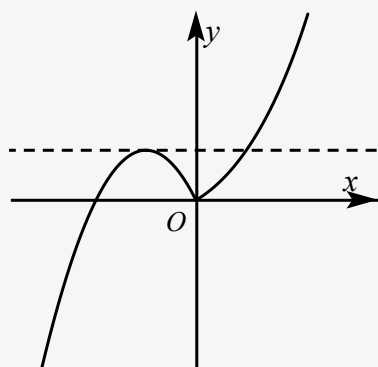
D. $[0, 1]$

【答案】 C

【解析】 画出函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示要直线 $y = m$ 与 $f(x)$ 的图象交点有3个,

故 $0 < m < 1$,

故选C项.



【标注】 【知识点】 已知零点情况求参数的取值范围; 函数零点的概念

10. 若 i 为虚数单位, 则复数 $\frac{3}{(1-i)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{2}i$

【解析】 复数 $\frac{3}{(1-i)^2} = \frac{3}{1-2i+i^2} = \frac{3}{-2i} = \frac{3i}{-2i^2} = \frac{3}{2}i$,
 $\therefore \frac{3}{(1-i)^2} = \frac{3}{2}i$.

【标注】 【知识点】 复数的四则运算综合; 复数的乘法和除法

11. 某学校三个社团的人员分布如下表 (每名同学只参加一个社团):

--	--	--	--

	合唱社	粤曲社	武术社
高一	45	30	a
高二	15	10	20

学校要对这三个社团的活动效果进行抽样调查，按分层抽样的方法从社团成员中抽取30人，结果合唱社被抽出12人，则这三个社团人数共有 _____ 。

【答案】 150

【解析】 据题意，得这三个社团共有 $30 \div \frac{12}{45+15} = 150$ （人）。

【标注】 【知识点】 分层随机抽样

12. 已知二项式 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的二项式系数之和为32，则展开式中含 x 项的系数是 _____ 。

【答案】 10

【解析】 令 $x = 1$ ，则 $2^n = 32$ ， $n = 5$ 。

二项式为 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ ，

含 x 项的式子为 $C_5^3(x^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 = C_5^3 \cdot x$ ，

系数为 $C_5^3 = 10$ 。

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数；二项式定理的展开式

13. 已知实数 a ， b 满足条件： $ab < 0$ ，且1是 a^2 与 b^2 的等比中项，又是 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的等差中项，则 $\frac{a+b}{a^2+b^2} =$ _____ 。

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】 $\because$ 实数 a ， b 满足条件： $ab < 0$ ，

1是 a^2 与 b^2 的等比中项，则 $ab = -1$ ，

又 $\because$ 1是 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的等差中项，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ ，

解得 $a + b = -2$ ，

$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$= a^2 + b^2 - 2$

$= 4$ ，

则 $a^2 + b^2 = 6$ ，

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

【标注】 【知识点】 等比中项

14. 曲线 $y = x(3 \ln x + 1)$, 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 _____ .

【答案】 $4x - y - 3 = 0$

【解析】 $\because y' = 3 \ln x + 4$,

$\therefore$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率为 4 ,

则切线方程为 $4x - y - 3 = 0$.

【标注】 【知识点】 导数的几何意义 ; 求在某点处的切线方程

15. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是单位向量 , $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 若向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是 _____ .

【答案】 $\sqrt{2} + 1$

【解析】 $\because \vec{a}$, $\vec{b}$ 是单位向量 , $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}| = 1$,

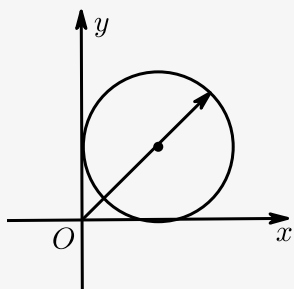
$\therefore$ 设 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, $\vec{c} = (x, y)$,

则 $\vec{c} - \vec{a} - \vec{b} = (x - 1, y - 1)$,

$\therefore |\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}| = 1$,

$\therefore (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$,

故向量 $\vec{c}$ 的终点在以 $(1, 1)$ 为圆心 , 半径等于 1 的圆上 ,



$\therefore |\vec{c}|$ 的最大值为 $\sqrt{1^2 + 1^2} + 1 = \sqrt{2} + 1$,

故答案为 : $\sqrt{2} + 1$.

【标注】 【知识点】 向量的模 ; 利用向量数量积求模长

五、 标题

1. 设复数 z 满足 $z \cdot (1+i) = 2i+1$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的共轭复数在复平面对应的点位于().
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 D

【解析】 $z \cdot (1+i) = 2i+1$,

$$\begin{aligned} z &= \frac{2i+1}{1+i}, \\ z &= \frac{(2i+1)(1-i)}{(1+i)(1-i)}, \\ z &= \frac{2i-2i^2+1-i}{2}, \\ z &= \frac{2i+3-i}{2}, \\ z &= \frac{i+3}{2}, \bar{z} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}, \\ &\text{即}\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{第四象限}. \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】复平面；复数的四则运算综合；复数的乘法和除法；复数的加法和减法

2. 已知集合 $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{x}{x+3} \leq 0\right\}$, 则集合 A 真子集的个数为().
- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

【答案】 C

【解析】 $\frac{x}{x+3} \leq 0$,

$$x(x+3) \leq 0,$$

$$-3 \leq x \leq 0,$$

$$\because x+3 \neq 0,$$

$$\text{即 } x \neq -3,$$

$$\therefore -3 < x \leq 0,$$

$$\text{且 } x \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore A = \{-2, -1, 0\},$$

$$\text{真子集有 } 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

故选：C.

【标注】 【知识点】子集个数的计算

3. 已知 m 为实数, 直线 $l_1: mx+y-1=0$, $l_2: (3m-2)x+my-2=0$, 则“ $m=1$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的().
- A. 充要条件 B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】 $l_1: mx + y - 1 = 0$.

$l_2: (3m - 2)x + my - 2 = 0$.

若 $l_1 // l_2$, 则 $\frac{1}{m} = \frac{m}{3m - 2}$.

$m^2 - 3m + 2 = 0$.

$(m - 1)(m - 2) = 0$.

$m = 1$ 或 2 .

$m = 1$ 时, $x + y - 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$.

$m = 2$ 时, $2x + y - 1 = 0$, $4x + 2y - 2 = 0$, 重合, 故排除.

故 $m = 1$.

即“ $m = 1$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的充要条件.

故选A.

【标注】【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【知识点】直线的平行

【知识点】直线的一般式方程

【知识点】充要条件与解析几何结合

4. 已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称, 则双曲线 C 的离心率为 ().

A. $\sqrt{5}$

B. 5

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{5}{4}$

【答案】A

【解析】 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$,

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$,

圆心 $O(2, -1)$,

$\therefore$ 圆关于渐近线对称,

$\therefore$ 渐近线过圆心,

渐近线为 $y = \pm \frac{a}{b}x$,

即 $-\frac{a}{b} \times 2 = -1$,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}.$$

【标注】 【知识点】 圆的一般方程问题；求双曲线的离心率

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n^2 \sin(\frac{2n+1}{2}\pi)$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12} = ()$.
- A. 0 B. 55 C. 66 D. 78

【答案】 D

【解析】 $a_1 = 1^2 \sin \frac{3\pi}{2} = -1^2$,
 $a_2 = 2^2 \cdot \sin \frac{5\pi}{2} = 2^2$,
 $a_3 = 3^2 \sin \frac{7\pi}{2} = -3^2$,
 $a_4 = 4^2 \sin \frac{9\pi}{2} = 4^2$,
 $a_5 = -5^2$,
 $a_6 = 6^2$,
 $\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12} = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 + 10^2 - 11^2 + 12^2$
 $= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) \cdots + (10^2 - 9^2) + (12^2 - 11^2)$
 $= 78$.
 故选D .

【标注】 【知识点】 并项求和

6. 设 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数，满足条件 $y = f(x+1)$ 是偶函数，且当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ ，则 $a = f(\log_3 2)$ ， $b = f\left(-\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\right)$ ， $c = f(3)$ 的大小关系是() .
- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$

【答案】 C

【解析】 $\because y = f(x+1)$ 是偶函数，
 $\therefore f(-x+1) = f(x+1)$ ，
 即函数 $f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称 .
 $\because$ 当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ 为减函数，
 $\therefore f(\log_3 2) = f(2 - \log_3 2) = f\left(\log_3 \frac{2}{9}\right)$ ，
 且 $-\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2} = \log_{\sqrt{3}} 2 = \log_3 4$ ，

$$\log_3 4 < \log_3 3 ,$$

$$\therefore b > a > c ,$$

故选C .

【标注】 【素养】直观想象

【素养】 数学抽象

【知识点】 函数单调性与奇偶性综合问题

【知识点】 函数对称性与奇偶性综合问题

【知识点】 函数对称性与单调性综合问题

【知识点】 用单调性比较大小

7. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称 , 对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 的 x_1 , x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象 , 则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 () .

- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$ B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$
C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$ D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$

【答案】 B

【解析】 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称 ,

对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 的 x_1 , x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$,

$\therefore \omega = 2$,

再根据其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称 , 可得 $2 \times \frac{\pi}{6} + \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$, $\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$ 的图象 ,

令 $2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi + \pi$, 求得 $k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$,

则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

故选B .

【标注】 【知识点】诱导公式 ; 正弦型函数的图象与性质 ; 正余弦型、正切型函数图象变换 ; 正弦函数的图象和性质

8. 袋中装有标号为1, 2, 3, 4, 5, 6且大小相同的6个小球, 从袋子中一次性摸出两个球, 记下号码并放回, 如果两个号码的和是3的倍数, 则获奖, 若有5人参与摸球, 则恰好2人获奖的概率是 () .

A. $\frac{40}{243}$

B. $\frac{70}{243}$

C. $\frac{80}{243}$

D. $\frac{38}{243}$

【答案】C

【解析】由题意得，任意号码和为3倍数有：1和2，1和5，2和4，3和6，4和5，5种，

$$\therefore \text{获奖概率为：} \frac{5}{C_6^2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{两人获奖 } P = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= 10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27}$$

$$= \frac{80}{243}.$$

故选C.

【标注】【知识点】古典概型；n次独立重复试验与二项分布

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在 $y = kx - 1$ 的图像上，则实数 k 的取值范围是 ().

A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

B. $(0, 1)$

C. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

D. $(-1, 0)$

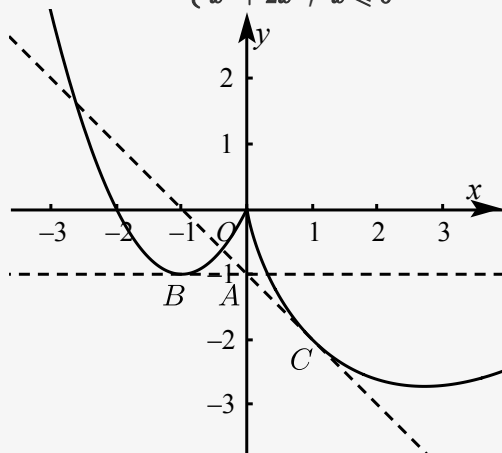
【答案】B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的点关于直线 $y = -1$ 的对称点在 $y = kx - 1$ 的图像上，

而函数 $y = kx - 1$ 关于直线 $y = -1$ 的对称图像为 $y = -kx - 1$ ，

$\therefore f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像与 $y = -kx - 1$ 的图像有且只有四个不同的交点，

作函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像与 $y = -kx - 1$ 的图像如下，



易知直线 $y = -kx - 1$ 恒过点 $A(0, -1)$ ，

设直线 AC 与 $y = x \ln x - 2x$ 相切于点 $C(x, x \ln x - 2x)$ ， $y' = \ln x - 1$ ，

$$\text{故} \ln x - 1 = \frac{x \ln x - 2x + 1}{x},$$

解得, $x = 1$, 故 $k_{AC} = -1$,

易得直线 AB 与 $y = x^2 + 2x$ 相切于点 $B(-1, -1)$,

故 $k_{AB} = 0$,

故 $-1 < -k < 0$,

故 $0 < k < 1$.

故选 B.

【标注】 【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

10. 函数 $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}(4x - 3)}$ 的定义域是 _____.

【答案】 $\frac{3}{4} < x \leq 1$

【解析】 由对数函数性质知函数 $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}(4x - 3)}$ 的定义域要满足的条件是 $\begin{cases} \log_{0.5}(4x - 3) \geq 0 \\ 4x - 3 > 0 \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} \log_{0.5}(4x - 3) \geq \log_{0.5} 1 \\ x > \frac{3}{4} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} 4x - 3 \leq 1 \\ x > \frac{3}{4} \end{cases},$$

$$\therefore \text{解得} \frac{3}{4} < x \leq 1.$$

【标注】 【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域

11. 已知二项式 $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中各项的二项式系数和为 512, 其展开式中第四项的系数 _____.

【答案】 -672

【解析】 $2^n = 512$,

$$n = 9,$$

$$\therefore \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^9,$$

$$T_4 = C_9^3 (x^2)^6 \left(-\frac{2}{x}\right)^3,$$

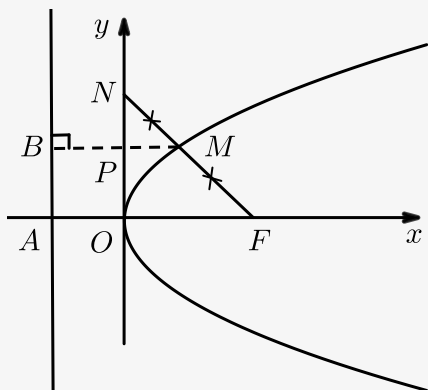
$$\therefore \text{系数为 } C_9^3 (-2)^3 = -672.$$

【标注】 【知识点】二项式系数的性质；求二项式展开式的特定项

12. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N . 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN| =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 如图：



不妨设 M 在第一象限抛物线 C 的准线交 x 轴于点 A ，

过 M 作准线的垂线垂足为 B 交 y 轴于 P ，

$\therefore PM \parallel OF$ ，

由题意得： $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，

$FO = AO = \frac{1}{2}$ ，

$\because M$ 为 FN 中点， $PM \parallel OF$ ，

$\therefore MP = \frac{1}{2}FO = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，

又 $BP = AO = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore MB = MP + BP = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ，

由定义可知 $MF = MB = \frac{3}{4}$ ，

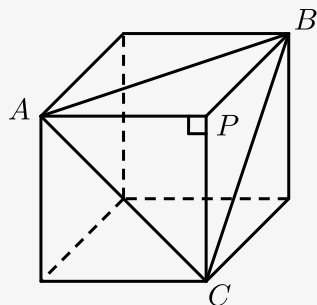
$\therefore FN = 2MF = \frac{3}{2}$ 。

【标注】 【知识点】 抛物线的定义

13. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上， $PA = PB = PC$ ， $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形， $PA \perp PC$ ，则球 O 的体积为 _____。

【答案】 $\sqrt{6}\pi$

【解析】 补全正方体，



$$AB = 2,$$

$$\therefore AP = \sqrt{2},$$

$$\therefore 2R = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6},$$

$$R = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \sqrt{6}\pi.$$

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题；已知线面位置关系判定结论的问题；点、直线、平面之间的位置关系

14. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$ ，且 $\angle C$ 为钝角，则 $\angle B = \underline{\quad}$ ； $\frac{c}{a}$ 的取值范围是 $\underline{\quad}$ 。

【答案】 $45^\circ; (\sqrt{2}, +\infty)$

【解析】 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2),$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B,$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\therefore a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{4} \times 2ac \cos B,$$

$$\therefore \sin B = \cos B,$$

$$\therefore \tan B = 1,$$

$$\text{① } \therefore \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin C}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - C\right)}$$

$$= \frac{\sin C}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos C + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin C}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\tan C + \frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\therefore C \text{ 为钝角, 且 } C \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\therefore \frac{c}{a} \in (\sqrt{2}, +\infty).$$

【标注】 【知识点】 正切函数的图象和性质；余弦定理；正余弦定理综合求解边角；正弦定理；三角形面积公式

15. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $c \geq 4$, 且 $a + b = 2$, 则 $\frac{ac}{b} + \frac{c}{ab} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{5}}{c-2}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{ac}{b} + \frac{c}{ab} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{5}}{c-2} \\ &= c \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{5}}{c-2} \\ &= c \cdot \frac{(2a^2 + 2 - ab)}{2ab} + \frac{\sqrt{5}}{c-2}, \end{aligned}$$

$\because a + b = 2,$

$\therefore 2 = \frac{(a+b)^2}{2},$

代入可得
$$\begin{aligned} & \frac{2a^2 + 2 - ab}{2ab} \\ &= \frac{2a^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - ab}{2ab} \\ &= \frac{2a^2 + \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 - ab}{2ab} \\ &= \frac{5a^2 + b^2}{4ab} \\ &\geq \frac{2\sqrt{5ab}}{4ab} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

当且仅当 $b = \sqrt{5}a$ 时等号成立,

则原式 $\geq \frac{\sqrt{5}}{2}c + \frac{\sqrt{5}}{c-2}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{5} \left[\frac{1}{2}(c-2) + \frac{1}{c-2} + 1 \right] \\ &\geq \sqrt{5} \left[2\sqrt{\frac{1}{2}(c-2) \left(\frac{1}{c-2} \right)} + 1 \right] = \sqrt{10} + \sqrt{5}, \end{aligned}$$

当且仅当 $c = 2 + \sqrt{2}$ 时取等号,

而 $c \geq 4$,

$2 + \sqrt{2} < 4,$

$\therefore$ 等号取不到,

$\therefore$ 对勾函数单调性可知 $c = 4$ 时最小,

即最小值为 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

【标注】 【素养】 逻辑推理；数学运算

【知识点】 已知等式关系求最值

六、标题

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y | y = 3x - 2, x \in A\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\{1\}$

B. $\{4\}$

C. $\{1, 3\}$

D. $\{1, 4\}$

【答案】 D

【解析】 把 $x = 1, 2, 3, 4$ 分别代入 $y = 3x - 2$ 得: $y = 1, 4, 7, 10$, 即 $B = \{1, 4, 7, 10\}$, $\because A = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $\therefore A \cap B = \{1, 4\}$, 故选: D.

【标注】 【知识点】交、并、补集混合运算; 交集

2. 已知 $x = \ln \pi$, $y = \log_5 2$, $z = e^{-\frac{1}{2}}$, 则 $(\quad)$.

A. $x < y < z$

B. $z < x < y$

C. $z < y < x$

D. $y < z < x$

【答案】 D

【解析】 因为 $\ln \pi > \ln e = 1$, $\log_5 2 < \log_5 5 = 1$, 所以 $x > y$, 故排除 A, B;
又因为 $\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{2}$, 所以 $z > y$, 故排除 C.
故选 D.

【标注】 【素养】数学运算

【知识点】 指数函数的图象及性质

【知识点】 指数函数与对数函数的关系

【知识点】 实数指数幂运算

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点重合, 则该抛物线的准线被双曲线所截得的线段长度为 $(\quad)$.

A. $\frac{7}{3}$

B. $\frac{14}{3}$

C. $\frac{5}{2}$

D. 5

【答案】 B

【解析】 由题知, 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的右焦点坐标为 $(4, 0)$,
所以抛物线的准线为 $x = -4$,
代入双曲线方程解得 $y = \pm \frac{7}{3}$,
所以抛物线的准线被双曲线所截得的线段长度为 $\frac{14}{3}$.

【标注】 【知识点】弦长求解问题；抛物线的标准方程

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, 则 $\sin \angle BAC =$ ()

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】 C

【解析】 由 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, 由余弦定理得:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 2 + 9 - 6 = 5$, $\therefore AC = \sqrt{5}$, 由正弦定理得:

$$\sin \angle BAC = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

故选C.

【标注】 【知识点】正余弦定理综合求解边角

【素养】数学运算

5. 设 a, b 是两条直线, α, β 是两个平面, 则“ $a \perp b$ ”的一个充分条件是 () .

A. $a \perp \alpha, b // \beta, \alpha \perp \beta$ B. $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha // \beta$ C. $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha // \beta$ D. $a \subset \alpha, b // \beta, \alpha \perp \beta$

【答案】 C

【解析】 A选项: 直线 a 与直线 b 可能平行, 相交或异面, A错误;

B选项: 直线 a 与直线 b 平行, B错误;

C选项: 由 $b \perp \beta, \alpha // \beta$ 得 $b \perp \alpha$, 又因为 $a \subset \alpha$, 所以 $b \perp a$, C正确;

D选项: 直线 a 与直线 b 可能平行, 相交或异面, D错误.

故选C.

【标注】 【知识点】充要条件与立体几何结合; 点、直线、平面之间的位置关系; 已知线面位置关系判定结论的问题

6. 由0, 1, 2, 3, 4, 5所组成的没有重复数字的四位数中, 能被5整除的有 () .

A. 512个 B. 192个 C. 240个 D. 108个

【答案】 D

【解析】 能被5整除的四位数末位是0或5的数, 因此分两类:

第一类, 末位为0时, 其它三位从剩下的数中任意排3个即可, 有 $A_5^3 = 60$ 个,

第二类，末位为5时，首位不能排0，则首位只能从1, 3, 4, 5选1个，
 第二位和第三位从剩下的任选2个即可，有 $A_4^1 \cdot A_4^2 = 48$ 个，
 根据分类计数原理得可以组成 $60 + 48 = 108$ 个不同的能被5整除的四位数。
 故选D。

【标注】 【知识点】 特殊位置优先法

7. 已知函数 $f(x) = 1 + \cos 2x - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，其中 $x \in \mathbf{R}$ ，则下列结论中正确的是（ ）。
- A. $f(x)$ 是最小正周期为 π 的偶函数
 B. $f(x)$ 的图象的一条对称轴是 $x = \frac{\pi}{3}$
 C. $f(x)$ 的最大值为2
 D. 将函数 $y = \sqrt{3} \sin 2x$ 的图象左移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $f(x)$ 的图象

【答案】 D

【解析】 $f(x) = 1 + \cos 2x - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \cos 2x - 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

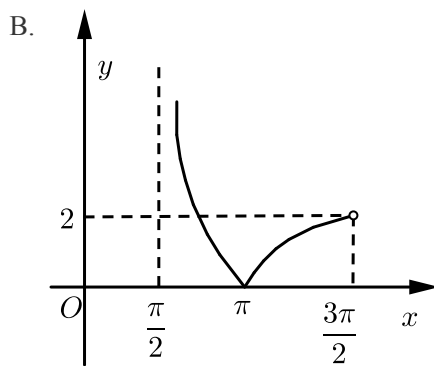
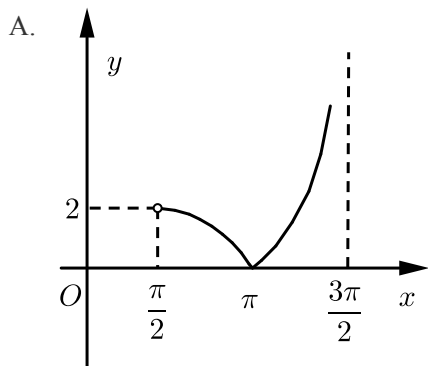
易知 $f(x)$ 不是偶函数，A错，

由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ ，知对称轴不是 $x = \frac{\pi}{3}$ ，故B错，

易知 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$ ，C错，故选D。

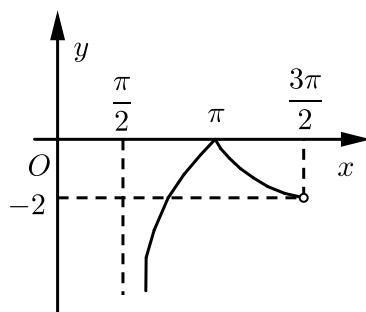
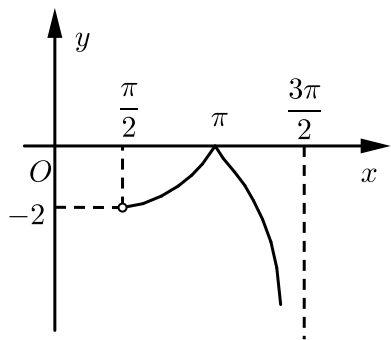
【标注】 【知识点】 已知正弦型函数判定结论正误

8. 函数 $y = \tan x + \sin x - |\tan x - \sin x|$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内的图象大致是（ ）。



C.

D.



【答案】D

【解析】函数 $y = \tan x + \sin x - |\tan x - \sin x| = \begin{cases} 2 \tan x, & \tan x < \sin x \\ 2 \sin x, & \tan x \geq \sin x \end{cases}$, 函数的图象为D.

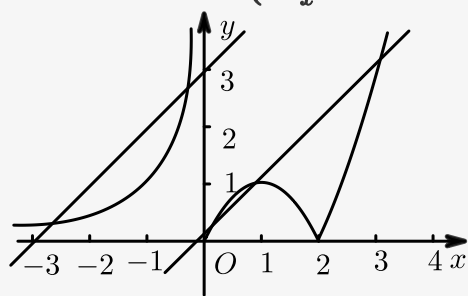
【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = |f(x)| - x + m$ 恰有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{4}, 0]$ B. $[0, \frac{1}{4}) \cup (2, +\infty)$
C. $(-2, -\frac{1}{4}] \cup [0, +\infty)$ D. $(\frac{1}{4}, 2) \cup [0, +\infty)$

【答案】A

【解析】根据 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 的图象, 取绝对值可知 $|f(x)| = x - m$ 如图.



当 $|f(x)| = x - m$ 的函数图象有三个交点时分两种情况.

①当直线 $y = x - m$ 与抛物线部分相交于三个点时, 临界条件分别为 $y = x - m$ 过原点时, 此时 $m = 0$, 以及与抛物线相切, 此时 $2x - x^2 = x - m \Rightarrow x^2 - x - m = 0$,

判别式 $\Delta = 1 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$, 故 $m \in (-\frac{1}{4}, 0]$;

②当直线 $y = x - m$ 与抛物线部分相交于1个点, 与 $y = -\frac{1}{x}$ 相交于两点, 此时临界条件为直线 $y = x - m$ 与 $y = -\frac{1}{x}$ 相切, 此时 $-\frac{1}{x} = x - m \Rightarrow x^2 - mx + 1 = 0$, 判别式 $\Delta = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$, 由图得 $y = x - m$ 中 $m < 0$, 故 $m = -2$ 为临界条件.

故此时 $m \in (-\infty, -2)$;

综上所述, $m \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{4}, 0\right]$;

故选A .

【标注】 【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；函数零点的概念

10. i 是虚数单位, 若复数 $(1-2i)(a+i)$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为 _____ .

【答案】 -2

【解析】 $(1-2i)(a+i) = a+2-(2a-1)i$ 为纯虚数 .

$$\therefore a+2=0,$$

$$\therefore a=-2.$$

【标注】 【知识点】复数三角形式的乘除法及其应用

11. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中 x 项的系数为 _____ . (用数字作答)

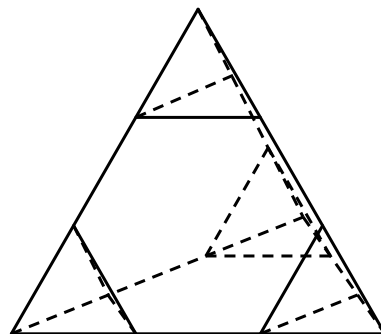
【答案】 -56

【解析】 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_8^r (x^2)^{8-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_8^r (-1)^r x^{16-3r}$,

$$\text{令 } r=5, T_6 = C_8^5 (-1)^5 x = -56x .$$

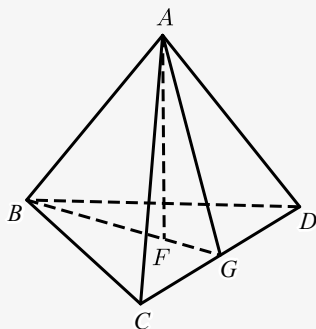
【标注】 【知识点】求二项式展开式的特定项

12. 半正多面体亦称“阿基米德多面体”, 是由边数不全相同的正多边形为面组成的多面体. 如将正四面体所有棱各三等分, 沿三等分点从原几何体割去四个小正四面体如图所示, 余下的多面体就成为一个半正多面体, 若这个半正多面体的棱长为2, 则这个半正多面体的体积为 _____ .



【答案】 $\frac{46\sqrt{2}}{3}$

【解析】 设原正四面体为 $A-BCD$ ，如下图所示：



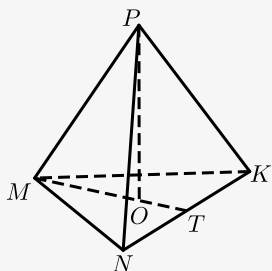
由题意可知，正四面体的棱长 $BC = 6$ ，设 F 为底面 BCD 的中心， G 是边 CD 中点，

则正四面体 $A-BCD$ 的高 AF ，则 $BG = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 3\sqrt{3}$ ， $BF = \frac{2}{3}BG = 2\sqrt{3}$ ，

所以在 $\text{Rt}\triangle BFA$ 中， $AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$ ，

所以原正四面体为 $A-BCD$ 的体积为 $V_1 = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BCD} \times AF = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \times 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2}$ ；

设从原几何体中割去的其中一个小正四面体为 $P-MNK$ ，如下图所示：



则小正四面体的棱长 $PM = 2$ ，设 O 为底面 BCD 的中心， T 为边 NK 中点，

则小正四面体 $P-MNK$ 的高 PO ，则 $MT = \frac{\sqrt{3}}{2}MN = \sqrt{3}$ ， $MO = \frac{2}{3}MT = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

所以在 $\text{Rt}\triangle PMO$ 中， $PO = \sqrt{PM^2 - MO^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，

所以小正四面体为 $P-MNK$ 的体积为 $V_2 = \frac{1}{3} \times S_{\triangle MNT} \times MO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ；

所以从原几何体中割去四个小正四面体体积为 $4V_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ ，

所以这个半正多面体的体积为 $V_1 - 4V_2 = 18\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{46\sqrt{2}}{3}$ 。

故答案为： $\frac{46\sqrt{2}}{3}$ 。

【标注】 【知识点】 组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积

13. 已知圆 C 的圆心在直线 $x - 2y - 3 = 0$ 上，且过点 $A(2, -3)$ ， $B(-2, -5)$ ，则圆 C 的标准方程为 _____。

【答案】 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$

【解析】由已知，线段 AB 的中垂线所在直线与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 的交点即为圆 C 的圆心，

$$\text{线段} AB \text{的斜率为: } K_{AB} = \frac{-3+5}{2-(-2)} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{线段} AB \text{的中垂线所在直线的斜率为} -\frac{1}{K_{AB}} = -2,$$

又 $\because$ 线段 AB 的中点为 $(0, -4)$,

$$\therefore \text{线段} AB \text{的中垂线所在直线方程为: } y + 4 = -2x,$$

$$\text{即 } 2x + y + 4 = 0,$$

$$\text{由 } \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases},$$

$$\text{求得 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 圆 C 的圆心坐标为 $(-1, -2)$,

$$\therefore \text{圆} C \text{的半径} r \text{满足: } r^2 = (2+1)^2 + (-3+2)^2 = 10,$$

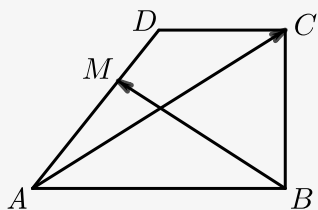
$$\therefore \text{圆} C \text{的标准方程为 } (x+1)^2 + (y+2)^2 = 10.$$

【标注】 【知识点】圆的标准方程问题；直线的垂直

14. 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 3$, $CD = 2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6$, 若 M 为线段 AD 上的一点, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的最大值为 _____.

【答案】 -2

【解析】



$$\because AB \parallel CD, AB = 4, AD = 3, CD = 2, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\text{设 } \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AD} (0 \leq \lambda \leq 1),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \right)$$

$$= \lambda \overrightarrow{AD}^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1 \right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$

$$= \lambda \cdot 3^2 + 6 \left(\frac{1}{2}\lambda - 1 \right) - \frac{1}{2} \times 4^2$$

$$= 12\lambda - 14,$$

$$\text{当 } \lambda = 1 \text{ 时, } \left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} \right)_{\max} = 12 - 14 = -2.$$

故答案为: -2 .

【标注】 【知识点】线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律；平面向量的数乘运算及运算规则

15. 若 $b > a > 1$, 且 $3\log_a b + 6\log_b a = 11$, 则 $a^3 + \frac{2}{b-1}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $2\sqrt{2} + 1$

【解析】 由 $3\log_a b + 6\log_b a = 11$ 可得 $3(\log_a b)^2 - 11\log_a b + 6 = 0$,

即 $(3\log_a b - 2)(\log_a b - 3) = 0$,

$\therefore b > a > 1$,

$\therefore \log_a b > 1$,

解得 $\log_a b = 3$,

$\therefore b = a^3$ 且 $a^3 > 1$,

$\therefore a^3 + \frac{2}{b-1}$

$= (a^3 - 1) + \frac{2}{a^3 - 1} + 1$

$\geq 2\sqrt{(a^3 - 1) \cdot \frac{2}{a^3 - 1}} + 1$

$= 2\sqrt{2} + 1$,

当且仅当 $a^3 - 1 = \frac{2}{a^3 - 1}$ 即 $a^3 = 1 + \sqrt{2}$ 时取等号 ,

$\therefore a^3 + \frac{2}{b-1}$ 的最小值为 $2\sqrt{2} + 1$.

综上所述 , 答案为 : $2\sqrt{2} + 1$.

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值

七、标题

1. 已知全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $\complement_U(A \cap B) = (\quad)$.

A. $\{-1\}$

B. $\{0, 1\}$

C. $\{-1, 2, 3\}$

D. $\{-1, 0, 1, 3\}$

【答案】 C

【解析】 $\because A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$,

$\therefore A \cap B = \{0, 1\}$, 又 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,

$\therefore \complement_U(A \cap B) = \{-1, 2, 3\}$.

故选C .

【标注】 【知识点】 交集；交、并、补集混合运算；补集

2. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x > y$ ”是“ $\ln x > \ln y$ ”的 () .

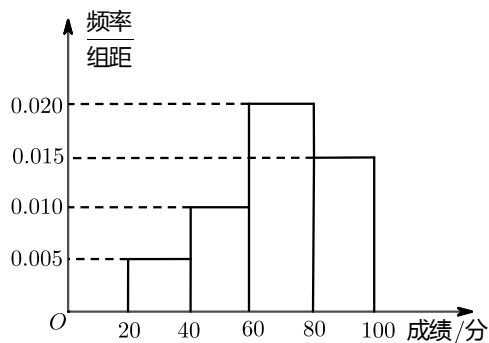
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 由题意可知, “ $\ln x > \ln y$ ” $\Leftrightarrow$ “ $x > y > 0$ ”,
故“ $x > y$ ”推不出“ $\ln x > \ln y$ ”, “ $\ln x > \ln y$ ”可推出“ $x > y$ ”,
故“ $x > y$ ”是“ $\ln x > \ln y$ ”的必要不充分条件.
故选B.

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

3. 某学校组织学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$. 若低于60分的人数是18人, 则该班的学生人数是 () .



- A. 45
B. 48
C. 54
D. 60

【答案】 D

【解析】 低于60的频率为:

$$(0.005 + 0.01) \times 20 = 0.3,$$

$$\frac{18}{0.3} = 60 \text{ (人)}.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 用样本的数字特征估计总体的数字特征问题；频率分布直方图

4. 已知 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2a}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为112, 则实数 a 的值为 () .

A. ± 1

B. 1

C. 2

D. ± 2 **【答案】** A**【解析】** 由题意可知： $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2a}{x}\right)^8$ 的展开项的通式 $T_{r+1} = C_8^r \cdot (\sqrt[3]{x})^{8-r} \cdot \left(-\frac{2a}{x}\right)^r = C_8^r \cdot (-2a)^r x^{\frac{8-4r}{3}}$ 当 $\frac{8-4r}{3} = 0$ 时, $r = 2$, 此时 $C_8^2 \cdot (-2a)^2 = 112a^2 = 112$,故 $a = \pm 1$.

故选 A.

【标注】 【知识点】求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数5. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则双曲线的实轴长是 ().A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$

C. 1

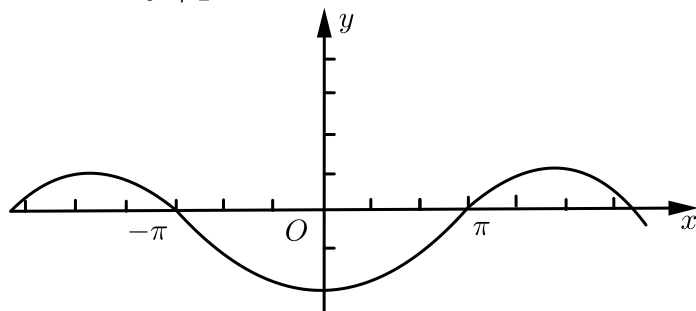
D. 2

【答案】 D**【解析】** 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $(1, 0)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的渐近线 $x \pm ay = 0$ 的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,可得： $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 可得 $a^2 = 1$, 所以 $a = 1$, $\therefore$ 双曲线的实轴长 $2a = 2$.

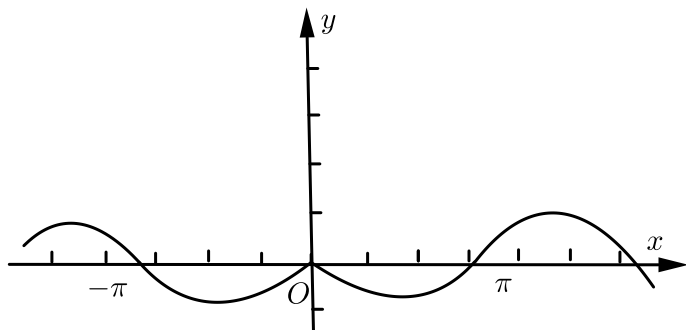
故选：D.

【标注】 【知识点】双曲线的基本量求解；抛物线的标准方程6. 函数 $f(x) = \frac{(e^x - 1) \sin x}{e^x + 1}$ 的部分图象大致为 ().

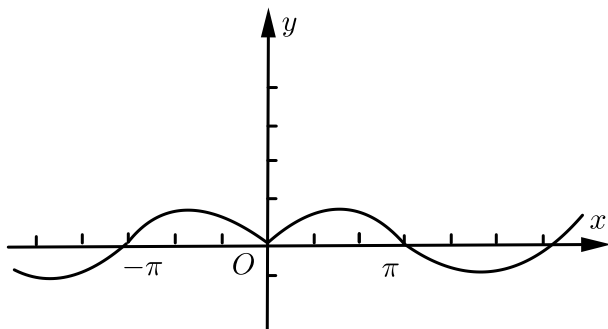
A.



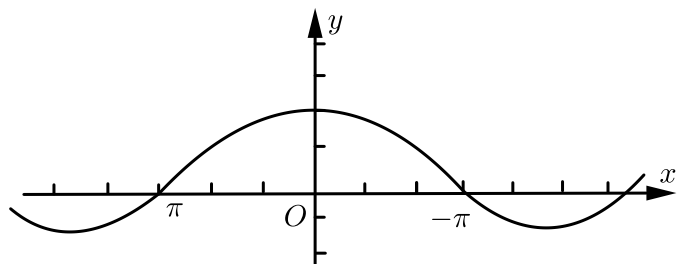
B.



C.



D.



【答案】 C

【解析】 当 $x=0$ 时, $f(0) = \frac{(e^0 - 1) \sin 0}{e^0 + 1} = 0$, 故排除选项 A、D,
 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) \sin \frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}} + 1} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi}{2}} + 1} > 0$, 故排除选项 B.
 故选 C.

【标注】 【知识点】 图象法；函数图象的识别问题

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 ().

A. $f(2^{1.1}) > f(\ln 3) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2)$

B. $f(2^{1.1}) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2) > f(\ln 3)$

C. $f(\ln 3) > f(2^{1.1}) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2)$

D. $f(\ln 3) > f(\log_{\frac{1}{3}} 2) > f(2^{1.1})$

【答案】 A

【解析】 $\because 2^1 < 2^{1.1} < 2^2$,
 $\therefore 2 < 2^{1.1} < 4$,
 $\therefore \ln e < \ln 3 < \ln e^2$,

$$\therefore 1 < \ln 3 < 2.$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} 1,$$

$$\therefore -1 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < 0,$$

$$\therefore 0 < -\log_{\frac{1}{3}} 2 < 1.$$

$$\text{即 } 0 < -\log_{\frac{1}{3}} 2 < \ln 3 < 2^{1.1}.$$

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore f(\log_{\frac{1}{3}} 2) = f(-\log_{\frac{1}{3}} 2), f(2^{1.1}) > f(\ln 3) > f(-\log_{\frac{1}{3}} 2) = f(\log_{\frac{1}{3}} 2).$$

故选 A.

【标注】 【知识点】对数函数的图象及性质; 指数函数的图象及性质; 指对幂比较大小

8. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$), 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且只有两个零点, 则 ω 的取值范围为 ().

A. $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$

B. $\left[\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right]$

C. $\left(\frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right)$

D. $\left[\frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right]$

【答案】 B

【解析】 $\because x \in (0, \pi), \omega > 0,$

$$\therefore \omega x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \omega\pi - \frac{\pi}{6}\right),$$

由 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上恰有 2 个零点可得:

$$\because y = \sin x, \text{ 当 } x = k\pi (k \in \mathbf{Z}) \text{ 时, } y = 0,$$

$$\therefore x > -\frac{\pi}{6} \text{ 时, } y = \sin x \text{ 恰有 2 个零点, 只能是 } 0, \pi,$$

$$\therefore \pi < \omega\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi,$$

$$\frac{7\pi}{6} < \omega\pi \leq \frac{13\pi}{6},$$

$$\text{解得: } \frac{7}{6} < \omega \leq \frac{13}{6},$$

$$\therefore \omega \text{ 的取值范围是 } \left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right].$$

故选 B.

【标注】 【知识点】正弦函数的图象和性质

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (t+1)x + 2t^2, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq t$ 的解集为 $[a, b] \cup [c, d]$, 且 $b < c$,

$$ab + cd - \frac{t}{2} < \frac{27}{32}, \text{ 则实数 } t \text{ 的取值范围为 ().}$$

A. $\left(\frac{5}{16}, \frac{4}{7}\right)$

B. $\left(\frac{5}{16}, \frac{5}{8}\right)$

C. $\left(\frac{5}{16}, 1\right)$

D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right)$

【答案】 B

【解析】 $\because f(x) = \begin{cases} x^2 + (t+1)x + 2t^2, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$,

$\therefore t$ 是未知数, 故首先可以得到 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时的图象, 如图1,

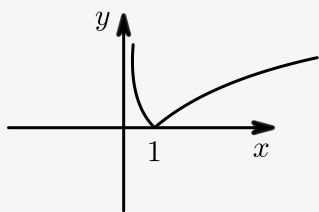


图1

$\therefore$ 关于不等式 $f(x) \leq t$ 的解集为 $[a, b] \cup [c, d]$, 且 $b < c$,

① $b < 0$ 时,

$\therefore f(x) = t$ 有四个不等实根, a, b, c, d ,

观察图1, 可知当 $x > 0$ 时, $f(x) = t$ 最多有两个不等实根,

而当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + (t+1)x + 2t^2$, 此时 $f(x) = t$ 也最多有两个不等实根,

$\therefore$ 可知 $|\ln x| = t$ 有两不等实根 c, d ,

$x^2 + (t+1)x + 2t^2 = t$ 有两不等实根 a, b ,

$\therefore$ 可知 $f(x)$ 大概图象, 如图2,

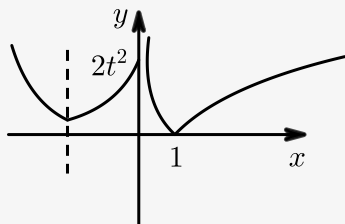


图2

$$f(0) = 0^2 + (t+1) \times 0 + 2t^2 = 2t^2,$$

$\therefore f(x) = t$ 有四个不等实根, 且 $|\ln x| \geq 0$ 恒成立,

$$\therefore t > 0 \text{ 且 } 2t^2 \geq t \text{ 解之得 } t \geq \frac{1}{2},$$

$\therefore x^2 + (t+1)x + 2t^2 = t$, 即 $x^2 + (t+1)x + 2t^2 - t = 0$, 有两不等实根 a, b ,

$$\therefore a + b = -\frac{t+1}{1} = -t-1, a \cdot b = \frac{2t^2-t}{1} = 2t^2-t,$$

$\therefore |\ln x| = t$ 有两不等实根 c, d ,

$\therefore \ln c = -\ln d$, 故得 $\ln c + \ln d = \ln(c \cdot d) = 0$, 故 $c \cdot d = 1$,

$$\text{此时有 } ab + cd - \frac{t}{2} < \frac{27}{32},$$

$$2t^2 - t + 1 - \frac{t}{2} < \frac{27}{32},$$

$$2t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{5}{32} < 0,$$

$$t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{5}{64} < 0,$$

$$\left(t - \frac{1}{8}\right)\left(t - \frac{5}{8}\right) < 0,$$

$$\therefore \frac{1}{8} < t < \frac{5}{8}, \text{ 又 } t \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8} \right),$$

② $b = 0$ 时 ,

$$\therefore \text{可知 } f(0) = 0^2 + (t+1) \times 0 + 2t^2 = 2t^2 \leq t ,$$

$$\therefore |\ln x| = t \text{ 有两不等实根 } c, d, \text{ 故得 } t > 0 ,$$

$$\therefore 2t^2 \leq t, \text{ 解之得 } t \leq \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore |\ln x| = t \text{ 有两不等实根 } c, d ,$$

$$\therefore \ln c = -\ln d, \text{ 即 } \ln c + \ln d = \ln(c \cdot d) = 0, \text{ 可得 } c \cdot d = 1 ,$$

$$\therefore ab + cd - \frac{t}{2} < \frac{27}{32} ,$$

$$0 + 1 - \frac{t}{2} < \frac{27}{32} ,$$

$$\frac{t}{2} > \frac{5}{32} ,$$

$$t > \frac{5}{16} ,$$

$$\therefore t \leq \frac{1}{2}, t > \frac{5}{16}, t > 0, \text{ 综合 } t \in \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{2} \right] ,$$

$$\text{综上所述, } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8} \right) \text{ 或 } t \in \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{2} \right], \text{ 故得 } t \in \left(\frac{5}{16}, \frac{5}{8} \right) .$$

【标注】 【特色题型】选择压轴

【思想】 数形结合思想；分类讨论思想

【知识点】 利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；分段函数；绝对值函数

【素养】 数学运算

10. 已知复数 $(1+i)z = 2-3i$ (i 为虚数单位) , 则复数 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ _____ .

【答案】 $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

【解析】 $\because (1+i)z = 2-3i ,$

$$\therefore z = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i ,$$

$$\therefore \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i .$$

【标注】 【知识点】共轭复数

11. 过点 $(1,0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 交圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 于 A, B 两点, 则弦 AB 的长为 _____ .

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 直线 l 过点 $(1,0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 则直线 $l: x-y-1=0$,

联立: $\begin{cases} x-y-1=0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$, 可得:

$$(x-1)^2 + (x-3)^2 = 4, \text{ 得 } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

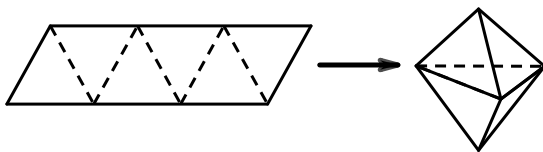
$$\text{则有: } x_1 = 3, x_2 = 1,$$

$$\therefore |AB| = |x_1 - x_2| \times \sqrt{1^2 + 1} = 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

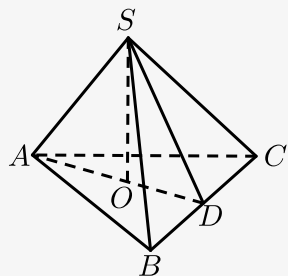
【标注】 【知识点】弦长求解问题；圆的弦长的相关问题

12. 农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽乾，俗称“粽子”，古称“角黍”，是端午节大家都会品尝的食品，传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原．如图，平行四边形形状的纸片是由六个边长为2的正三角形构成的，将它沿虚线折起来，可以得到如图所示粽子形状的六面体．则该六面体的体积为 _____ ．



【答案】 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

【解析】 该六面体是由两个全等的正四面体组合而成，正四面体的棱长为2，



如图，在棱长为2的正四面体 $S-ABC$ 中，

取 BC 中点 D ，连结 SD 、 AD ，

作 $SO \perp$ 平面 ABC ，垂足 O 在 AD 上，

$$\text{则 } AD = SD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$OD = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{3}, SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$\therefore$ 该六面体的体积：

$$V = 2V_{S-ABC} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

故答案为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

【标注】 【知识点】空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题

13.

某校在高一年级一班至六班进行了“社团活动”满意度调查（结果只有“满意”和“不满意”两种），从被调查的学生中随机抽取了50人，具体的调查结果如表：

班号	一班	二班	三班	四班	五班	六班
频数	4	5	11	8	10	12
满意人数	3	2	8	5	6	6

现从一班和二班调查对象中随机选取4人进行追踪调查，则选中的4人中恰有2人不满意的概率为 _____；若将以上统计数据中学生持满意态度的频率视为概率，在高一年级全体学生中随机抽取3名学生，记其中满意的人数为 X ，则随机变量 X 的数学期望是 _____。

【答案】 $\frac{10}{21}, \frac{9}{5}$

【解析】 由表中数据可知，一班，二班被调查的人数分别为4人，5人，两班中有4人对“社团活动”不满意，

则选中的4人中恰有2人不满意的概率为 $\frac{C_4^2 C_5^2}{C_9^4} = \frac{6 \times 10}{126} = \frac{10}{21}$ ，

因为高一年级被调查的人数为50人，

对“社团活动”满意的人数为30人，持满意态度的频率为 $\frac{3}{5}$ ，

由题意知 $X \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$ ，所以 $E(X) = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$ 。

【标注】 【知识点】离散型随机变量的数学期望；古典概型的概率计算（涉及计数原理）

14. 已知 $x > 0, y > 0, x + 2y = 3$ ，则 $\frac{x^2 + y}{xy}$ 的最小值为 _____。

【答案】 $\frac{2\sqrt{6} + 1}{3}$

【解析】 $\because x + 2y = 3$ ，

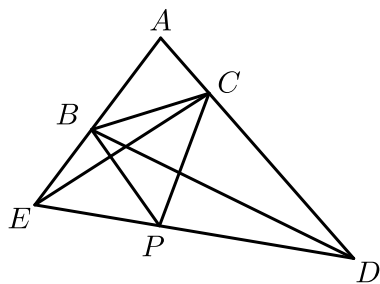
$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2 + y}{xy} &= \frac{x^2 + \frac{1}{3}(x + 2y)y}{xy} \\ &= \frac{x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{2}{3}y^2}{xy} \\ &= \frac{x}{y} + \frac{2y}{3x} + \frac{1}{3} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{2y}{3x}} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{6} + 1}{3}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{2y}{3x}$ ，即 $3x^2 = 2y^2$ 时等号成立。

故答案为： $\frac{2\sqrt{6} + 1}{3}$ 。

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的概念

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=1$, D , E 分别是直线 AB , AC 上的点, $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AC}$ 且 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = -2$, 则 $\angle BAC =$ _____; 若 P 是线段 DE 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的最小值为 _____.



【答案】 $\frac{\pi}{3}$; $\frac{37}{7}$

【解析】 $\because \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AC}$, $AB = 2$, $AC = 1$,

$$\therefore BE = AB = 2, CD = 4 \times 1 = 4, AE = 2 \times 2 = 4, AD = 1 + 4 = 5,$$

$$\because \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = -2,$$

$$\therefore (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$$

$$= 2 \times 1 \times \cos \angle BAC + 5 \times 1 \times \cos 180^\circ + 2 \times 4 \times \cos 180^\circ$$

$$+ 5 \times 4 \times \cos \angle BAC$$

$$= 22 \cos \angle BAC - 13$$

$$= -2.$$

$$\therefore \cos \angle BAC = (-2 + 13) \div 22 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{\pi}{3}, AE = 4, AD = 5,$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得 } DE = \sqrt{AE^2 + AD^2 - 2 \times AE \times AD \times \cos \angle BAC}$$

$$= \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{16 + 25 - 20}$$

$$= \sqrt{21}.$$

$$\cos \angle AED = \frac{AE^2 + DE^2 - AD^2}{2 \times AE \times DE}$$

$$= \frac{4^2 + \sqrt{21}^2 - 5^2}{2 \times 4 \times \sqrt{21}}$$

$$= \frac{16 + 21 - 25}{8\sqrt{21}}$$

$$= \frac{12}{8\sqrt{21}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{21}}.$$

$$\cos \angle ADE = \frac{AD^2 + DE^2 - AE^2}{2 \times AD \times DE}$$

$$= \frac{5^2 + \sqrt{21}^2 - 4^2}{2 \times 5 \times \sqrt{21}}$$

$$= \frac{25 + 21 - 16}{10\sqrt{21}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}}$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{21}.$$

∵ P 为 DE 上一动点, 故设 $DP = x$.

$$\begin{aligned} \therefore \vec{BP} \cdot \vec{CP} &= (\vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DP})(\vec{CD} \cdot \vec{DP}) \\ &= \vec{BA} \cdot \vec{CD} + \vec{AD} \cdot \vec{CD} + \vec{DP} \cdot \vec{CD} + \vec{BA} \cdot \vec{DP} + \vec{AD} \cdot \vec{DP} + \vec{DP} \cdot \vec{DP} \\ &= 2 \times 4 \times \cos(\pi - \angle EAD) + 5 \times 4 \times \cos 0^\circ + x \cdot 4 \cdot \cos(\pi - \angle ADE) \\ &\quad + 2 \times x \times \cos(\pi - \angle DEA) + 5 \times x \times \cos(\pi - \angle ADE) + x \times x \times \cos 0^\circ \\ &= -8 \cdot \cos \angle EAD + 20 - 4x \cdot \cos \angle ADE - 2x \cdot \cos \angle DEA - 5x \cdot \cos \angle ADE + x^2 \\ &= -8 \times \frac{1}{2} + 20 - 9x \times \frac{1}{7}\sqrt{21} - 2x \times \frac{1}{14}\sqrt{21} + x^2 \\ &= x^2 - \frac{10}{7}\sqrt{21}x + 16 \\ &= \left(x - \frac{5}{7}\sqrt{21}\right)^2 + \frac{37}{7}. \end{aligned}$$

∵ P 为 DE 上一动点,

$$\therefore x \in [0, \sqrt{21}],$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{5}{7}\sqrt{21} \text{ 时, } \vec{BP} \cdot \vec{CP} \text{ 取最小值为 } \left(\frac{5}{7}\sqrt{21} - \frac{5}{7}\sqrt{21}\right)^2 + \frac{37}{7} = 0 + \frac{37}{7} = \frac{37}{7}.$$

【标注】 【知识点】利用向量数量积求夹角; 线性运算和数量积综合问题; 向量的数量积的定义

八、标题

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{1, 3\}$, $B = \{4\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B = ()$.

A. $\{2\}$

B. $\{4\}$

C. $\{2, 4\}$

D. $\{1, 3, 4\}$

【答案】 B

【解析】 ∵ $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3\}$,

$$\therefore \complement_U A = \{2, 4\},$$

$$\therefore B = \{4\},$$

$$\therefore (\complement_U A) \cap B = \{4\}.$$

故选B.

【标注】 【知识点】交集; 交、并、补集混合运算; 补集

2. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, e^{x_0} > x_0 + 1$ ”的否定是 ().

A. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x < x + 1$

B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, e^{x_0} < x_0 + 1$

C. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \leq x + 1$

D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, e^{x_0} \leq x_0 + 1$

【答案】 C

【解析】 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, e^{x_0} > x_0 + 1$ ”的否定为：“ $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \leq x + 1$ ”，
 故选C.

【标注】 【知识点】全称量词与存在量词；全称量词命题与存在量词命题的否定

3. 若复数 $\frac{1+2ai}{2-i}$ (i 为虚数单位) 的实部与虚部相等, 则实数 a 的值为 ().

A. $\frac{1}{6}$

B. $-\frac{1}{6}$

C. 1

D. -1

【答案】 A

$$\begin{aligned} \text{【解析】 复数 } \frac{1+2ai}{2-i} &= \frac{(1+2ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{2+2ai^2+(4a+1)i}{4-i^2} \\ &= \frac{2-2a+(4a+1)i}{5} \end{aligned}$$

又∵该复数实部与虚部相等,

$$\therefore 2-2a=4a+1,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{6}.$$

故选A.

【标注】 【知识点】复数的四则运算综合

4. 袋子中有6个大小质地完全相同的球, 其中1个红球, 2个黄球, 3个蓝球, 从中任取3个球, 则恰有两种颜色的概率是 ().

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{7}{20}$

D. $\frac{13}{20}$

【答案】 D

【解析】 由题意可得, 从6个球中任取3个球, 共有 $C_6^3 = 20$ 种, 恰有两种颜色的概率

$$P = \frac{C_2^1 C_3^2 + C_2^2 C_3^1 + C_2^2 C_1^1 + C_3^2 C_1^1}{C_6^3} = \frac{13}{20}.$$

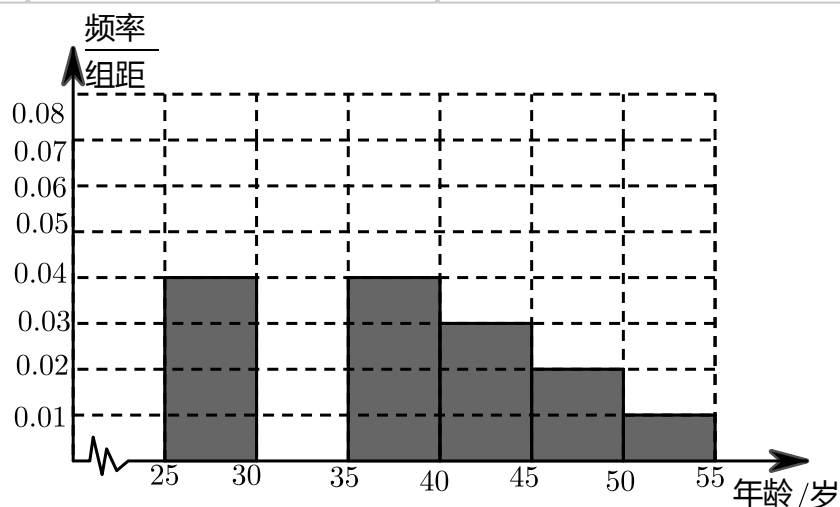
故选D.

【标注】 【素养】数学运算

【知识点】 古典概型的概率计算 (涉及计数原理)

5. 某班同学进行社会实践，对[25, 55]岁的人群随机抽取 n 人进行了生活习惯是否符合低碳观念的调查，若生活习惯符合低碳观念的称为“低碳族”，否则称为“非低碳族”，得到如下统计表和各年龄段人数频率分布直方图如下，则图表中的 p ， a 的值分别为（ ）。

组数	分组	低碳族的人数	占本组的频率
第一组	[25, 30)	120	0.6
第二组	[30, 35)	195	p
第三组	[35, 40)	100	0.5
第四组	[40, 45)	a	0.4
第五组	[45, 50)	30	0.3
第六组	[50, 55]	15	0.3



- A. 0.79 , 20 B. 0.195 , 40 C. 0.65 , 60 D. 0.975 , 80

【答案】 C

【解析】 ∵由图可知，

第一组人数为 $120 \div 0.6 = 200$ 人，

且第1组的频率为 $0.04 \times 5 = 0.2$ ，

∴总人数 $n = \frac{200}{0.2} = 1000$ ，

又第二组的频率为 $1 - (0.04 + 0.04 + 0.03 + 0.02 + 0.01) \times 5 = 0.3$ ，

∴第二组共有 $1000 \times 0.3 = 300$ 人，

∴ $P = \frac{195}{300} = 0.65$ ，

又∴第四组的频率为 $0.03 \times 5 = 0.15$ ，

∴第四组有 $0.15 \times 1000 = 150$ 人，

$$\therefore a = 0.4 \times 150 = 60,$$

$$\text{故 } P = 0.65, a = 60,$$

故选C项.

【标注】 【知识点】 频率分布直方图；频率与概率问题

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 和直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, 若过双曲线 C 的左焦点和点 $(0, -b)$ 的直线与直线 l 平行, 则双曲线 C 的离心率为().

A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 5

【答案】 A

【解析】 $\because$ 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 左焦点为 $F(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$,

则过点 $F(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 和点 $(0, -b)$ 的直线为 $y = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}x - b$,

由曲线 $y = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}x - b$ 与直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ 平行,

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{3}{5} = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ 3 = -b \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = \frac{4}{3}b,$$

$\therefore$ 双曲线 C 的离心率为 $e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \frac{5}{4}$, 故A正确.

故选A.

【标注】 【知识点】 求双曲线的离心率

7. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 直线 $y = k(x - \frac{p}{2})$ 交抛物线于 A, B 两点, 过点 A 作准线 l 的垂线, 垂足为 E , 若等边 $\triangle AFE$ 的面积为 $36\sqrt{3}$, 则 $\triangle BEF$ 的面积为().

A. $6\sqrt{3}$

B. $12\sqrt{3}$

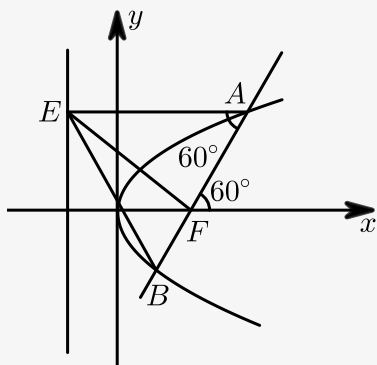
C. 16

D. $24\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 因为 $\triangle AEF$ 为等边三角形, 故 $k = \sqrt{3}$, $\triangle AEF$ 边长为 $2p$,

$$\text{由 } \frac{1}{2} \times 2p \times 2p \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}, \text{ 得 } p = 6,$$



抛物线方程为 $y^2 = 12x$ ，联立 $\begin{cases} y = \sqrt{3}(x-3) \\ y^2 = 12x \end{cases}$ ，

得 $x^2 - 10x + 9 = 0$ ，

故 $x_A = 9$ ， $x_B = 1$ ，

所以 $|BF| = x_B + \frac{p}{2} = 1 + \frac{6}{2} = 4$ ，

故 $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ 。

故选B。

【标注】 【知识点】 面积问题

8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x$ ，则 ()。

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称

C. $f(x)$ 的最大值为 2

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

【答案】 D

【解析】 A 选项： $f(x) = \sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2},$$

$$\therefore T_{\min} = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故A错误.}$$

$$\text{B 选项: 当 } x = -\frac{\pi}{12} \text{ 时, } f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{2} \neq \frac{1}{2} \neq 0,$$

$\therefore$ 点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 不是对称中心，故B错误。

$$\text{C 选项: } f(x)_{\max} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 故C错误.}$$

$$\text{D 选项: 对称轴, } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } x = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 是对称轴, 故D正确.}$$

故选 D。

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质

9. 已知函数 $f(x) = x - \ln x + m (m \in \mathbf{R})$ ，若 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，则下列选项中不正确的是 () .

A. $m < -1$

B. $x_1 + x_2 \leq 2$

C. $0 < x_1 < 1$

D. $e^{x_1-x_2} = \frac{x_1}{x_2}$

【答案】 B

【解析】 $\because f(x) = x - \ln x + m (m \in \mathbf{R})$ ，且易得 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\therefore f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = 1,$$

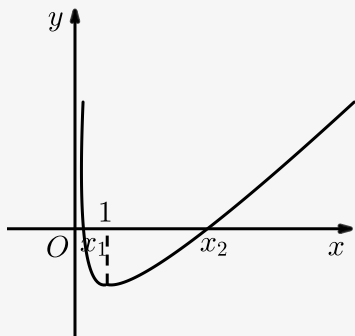
$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 得 } x > 1,$$

$$\text{令 } f'(x) < 0, \text{ 得 } 0 < x < 1,$$

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

又 $\because f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，

$\therefore f(x)$ 的图象如图所示：



$$\text{故 } f(x)_{\min} = f(1) = 1 + m < 0,$$

即 $m < -1$ ，并且 $0 < x_1 < 1$ ，所以选项 A、C 正确，

由于 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的零点，故有

$$\begin{cases} x_1 - \ln x_1 + m = 0 \text{ ①} \\ x_2 - \ln x_2 + m = 0 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{①}-\text{②得：} x_1 - x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2}, \text{ 即}$$

$$e^{x_1-x_2} = \frac{x_1}{x_2}, \text{ 故选项 D 正确.}$$

$$\because m < -1,$$

$$\therefore \text{当 } m \leq -2 + \ln 2 \text{ 时, } x_2 \geq 2,$$

$$\therefore x_1 + x_2 > 2, \text{ 故选项 B 不正确.}$$

【标注】 【知识点】 求参数范围（含参指对型导函数）

10. 二项式 $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中常数项为 _____ .

【答案】 15

【解析】 二项展开式的通项公式 $T_{k+1} = C_0^k x^{6-k} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$
 $= C_0^k x^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{-\frac{k}{2}}$
 $= (-1)^k C_0^k x^{6-\frac{3}{2}k}$ 要使其为常数,
则 $6 - \frac{3}{2}k = 0$, 即 $k = 4$, 常数项为 $T_5 = (-1)^4 C_0^4 x^0 = 15$.

【标注】 【素养】数学运算

【素养】 逻辑推理

【知识点】 求二项式展开式的特定项

【知识点】 二项式定理的展开式

【知识点】 求项的系数或二项式系数

11. 圆心在直线 $3x - y = 0$ 上, 与 x 轴相切, 且被直线 $x - y = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程为 _____ .

【答案】 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ 或 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$

【解析】 设圆心横坐标为 b ,

又 $\because$ 圆心在直线 $3x - y = 0$ 上, 与 x 轴相切,

$\therefore$ 圆心为 $(b, 3b)$, 半径 $r = |3b|$,

设圆心到直线 $x - y = 0$ 的距离为 d ,

则 $d = \frac{|3b - b|}{\sqrt{2}} = |\sqrt{2}b|$,

又 $\because$ 圆被直线 $x - y = 0$ 截得弦长为 $2\sqrt{7}$,

$\therefore$ 有 $(\sqrt{7})^2 = r^2 - d^2$, 即 $9b^2 - 2b^2 = 7$,

解得 $b = \pm 1$,

$\therefore$ 圆方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ 或 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$.

【标注】 【知识点】圆的标准方程问题

12. 曲线 $y = e^x - \frac{1}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 _____, 在该点处的切线方程为 _____.

【答案】 $e + 1$; $(e + 1)x - y - 2 = 0$

【解析】 设函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$,

$$\therefore f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2},$$

$$\therefore f'(1) = e + 1, f(1) = e - 1,$$

$$\therefore \text{曲线 } y = e^x - \frac{1}{x} \text{ 在点 } (1, f(1)) \text{ 处的切线的斜率为 } e + 1, \text{ 切线方程为 } (e + 1)x - y - 2 = 0.$$

【标注】 【知识点】导数的几何意义；求在某点处的切线方程

13. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{3}{a+2} + \frac{3}{b+2} = 1$, 则 $a + 2b$ 的最小值为 _____.

【答案】 $3 + 6\sqrt{2}$

【解析】 $\because a > 0, b > 0$,

$$a + 2b = (a + 2) + 2(b + 2) - 6,$$

$$\text{由 } \frac{3}{a+2} + \frac{3}{b+2} = 1,$$

$$\text{则 } a + 2b = [(a + 2) + 2(b + 2)] \left(\frac{3}{a+2} + \frac{3}{b+2} \right) - 6$$

$$= 3 + \frac{3(a+2)}{b+2} + \frac{6(b+2)}{a+2} + 6 - 6$$

$$= \frac{3(a+2)}{b+2} + \frac{6(b+2)}{a+2} + 3$$

$$\therefore \frac{3(a+2)}{b+2} + \frac{6(b+2)}{a+2} \geq 2\sqrt{\frac{3(a+2)}{b+2} \cdot \frac{6(b+2)}{a+2}} = 6\sqrt{2},$$

$$\text{当 } \frac{3(a+2)}{b+2} = \frac{6(b+2)}{a+2} \text{ 时},$$

$$\text{即 } b = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1, a = 3\sqrt{2} + 1 \text{ 时, 等号成立},$$

$$\therefore a + 2b \geq 3 + 6\sqrt{2},$$

$$\therefore a + 2b \text{ 的最小值为 } 3 + 6\sqrt{2}.$$

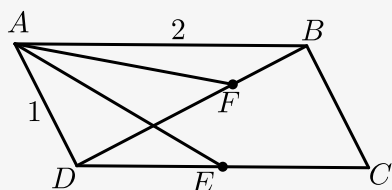
故答案为： $3 + 6\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 2, AD = 1, \angle BAD = 60^\circ$, 若 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 如图,



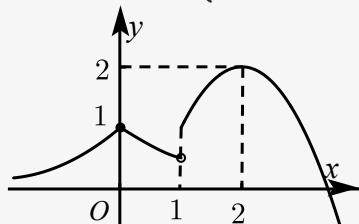
$$\begin{aligned}
&\because \text{平行四边形 } ABCD \text{ 中}, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FB}, \\
&\therefore E \text{ 为 } DC \text{ 中点}, F \text{ 为 } DB \text{ 三等分点且 } DF = 2FB, \\
&\because \angle BAD = 60^\circ, AB = 2, AD = 1, \\
&\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1, \\
&\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \\
&\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \\
&\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\
&= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \frac{5}{6} + \frac{5}{3} \\
&= \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；线性运算和数量积综合问题；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量的减法运算及运算规则

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = a (a \in \mathbf{R})$ 恰有两个互异的实数解，则 a 的取值范围是 _____。

【答案】 $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$

【解析】 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & x > 1 \end{cases}$ ，图象如图所示：



若要使 $f(x) = a$ 恰有两个相异实数解，则 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$ 。

故答案为： $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$ 。

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；已知零点情况求参数的取值范围；函数零点的概念

九、标题

1. 复数 $z = \frac{4+3i}{3-4i}$ (i 是虚数单位) 在复平面内对应点的坐标为 () .

A. (1,0)

B. (0,1)

C. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

D. $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

【答案】 B

【解析】 $z = \frac{4+3i}{3-4i} = \frac{(4+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{12+9i+16i-12}{25} = i$,

$\therefore z$ 对应的坐标为(0,1) .

故选B .

【标注】 【知识点】 复数的四则运算综合

2. 某中学高一、高二、高三年级的学生人数之比依次为6:5:7, 防疫站欲对该校学生进行身体健康调查, 用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为 n 的样本, 样本中高三年级的学生有21人, 则 n 等于 () .

A. 35

B. 45

C. 54

D. 63

【答案】 C

【解析】 $n = 21 \div \frac{7}{6+5+7} = 54$,

故选C .

【标注】 【知识点】 分层随机抽样

3. 方程 $x^2 + y^2 - kx + 2y + k^2 - 2 = 0$ 表示圆的一个充分不必要条件是 () .

A. $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

B. $k \in (2, +\infty)$

C. $k \in (-2, 2)$

D. $k \in (0, 1]$

【答案】 D

【解析】 $x^2 + y^2 - kx + 2y + k^2 - 2 = 0$ 表示圆 ,

$\therefore k^2 + 4 - 4(k^2 - 2) > 0$,

$\therefore k^2 + 4 - 4k^2 + 8 > 0$,

$\therefore k^2 < 4$,

$\therefore -2 < k < 2$,

$\therefore (0, 1] \subset (-2, 2)$,

$\therefore k \in (0, 1]$ 为方程 $x^2 + y^2 - kx + 2y + k^2 - 2 = 0$ 表示圆的充分不必要条件.

故选D.

【标注】 【知识点】充要条件与解析几何结合；圆的一般方程问题

4. 设 $a = 2^{\ln 2}$, $b = -\log_{\frac{1}{2}} 4$, $c = \log_3 2$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $b > a > c$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $a > c > b$

【答案】 A

【解析】 $\because 0 < \ln 2 < 1$,

$\therefore 1 < 2^{\ln 2} < 2$,

$\because b = -\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_2 4 = 2$,

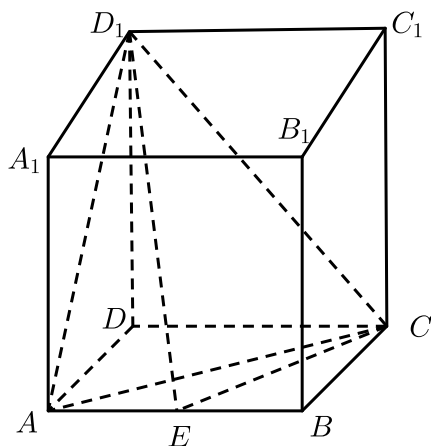
又 $\because 0 < \log_3 2 < 1$,

$\therefore b > a > c$.

故选A.

【标注】 【知识点】指对幂比较大小

5. 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是面积为2的正方形, 该长方体的外接球体积为 $\frac{32}{3}\pi$, 点E为棱AB的中点, 则三棱锥 $D_1 - ACE$ 的体积是 ().



A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 1

【答案】 C

【解析】 $\because AB = BC = \sqrt{2}$, 长方体的外接球体积为 $\frac{32}{3}\pi$,

$\therefore$ 长方形外接球半径 $r = 2$,

$$\therefore \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2 + AA_1^2}}{2} = 2,$$

$$\therefore AA_1 = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{三棱锥 } D_1 - ACE \text{ 的体积: } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ACE} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选项C正确.

故选C.

【标注】 【知识点】空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的内切球、外接球问题

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 以双曲线 C 的右焦点 F 为圆心, a 为半径作圆 F , 圆 F 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M 、 N 两点, 则 $\angle MFN = ()$.

A. 45°

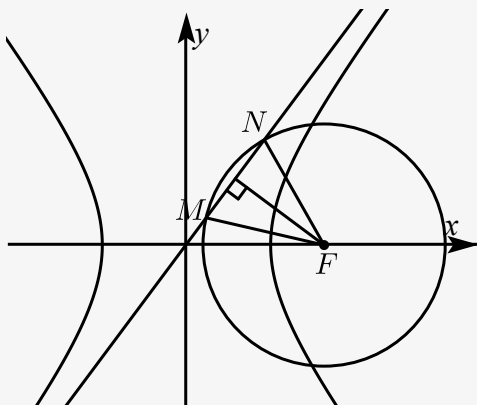
B. 60°

C. 90°

D. 120°

【答案】 C

【解析】



$$\cos \angle FMN = \frac{b}{a},$$

$$\therefore \text{双曲线的离心率 } \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \cos \angle FMN = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又 } \angle FMN = \angle FNM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MFN = 90^\circ.$$

故选C.

【标注】 【知识点】双曲线与圆结合

某学校食堂为了进一步加强学校疫情防控工作，降低学生因用餐而交叉感染的概率规定：就餐时，每张餐桌（如图）至多坐两个人，一张餐桌坐两个人时，两人既不能相邻也不能相对（即二人只能坐在对角线的位置上）。现有3位同学到食堂就餐，如果3人在1号和2号两张餐桌上就餐（同一张餐桌的4个座位是没有区别的），则不同的坐法种数为（ ）。



A. 6

B. 12

C. 24

D. 48

【答案】 D

【解析】 不同的坐法为： $4C_3^2C_4^1 = 48$ ，
故选项D正确。

【标注】 【知识点】 组合

8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)， $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称，且与 x 轴交点的横坐标构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列，则函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的一个单调减区间为（ ）。
- A. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ B. $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ D. $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

【答案】 A

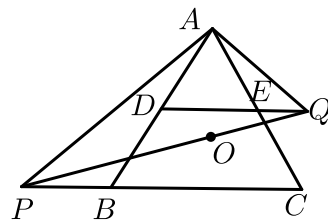
【解析】 $\because f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列，
 $\therefore \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ ，
 $\therefore$ 周期 $T = \pi$ ，
 $\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ， $\omega = 2$ ，
 又 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称，
 $\therefore 2 \times \frac{5\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ，
 由 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 可知 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，
 $\therefore f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，
 $\therefore f'(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，
 $\therefore 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \pi + 2k\pi$ ，
 $\therefore$ 解得 $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi$ ，
 令 $k = 0$ ，

$$\therefore \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{7}{12}\pi.$$

故选A.

【标注】 【知识点】余弦型三角函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质；余弦函数的图象和性质

9. 如图，在边长 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 中， D, E 分别是边 AB, AC 的中点， O 为 $\triangle ABC$ 的中心，过点 O 的直线 l 与直线 BC 交于点 P ，与直线 DE 交于点 Q ，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 的取值范围是（ ）.



- A. $[3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(-\infty, \frac{9}{2})$ D. $(-\infty, \frac{9}{2}]$

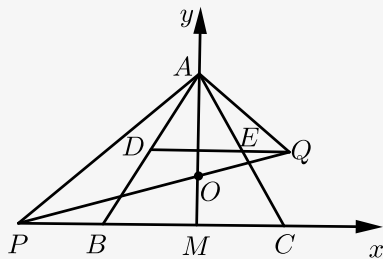
【答案】 D

【解析】 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

且边长为 $2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 可做 $AM \perp BC$ ，

以 M 为原点， $\overrightarrow{MC}$ 为 x 轴正方向， $\overrightarrow{MA}$ 为 y 轴正方向建立直角坐标，



又 $\because DE$ 分别为 AB, AC 中点，

$\therefore$ 有坐标 $B(-\sqrt{3}, 0)$ ， $C(\sqrt{3}, 0)$ ， $A(0, 3)$ ， $O(0, 1)$ ， $D(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ ， $E(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ ，

$\therefore$ 可知直线 DE 解析式为 $y = \frac{3}{2}$ ，直线 BC 解析式为 $y = 0$ ，

当直线 QP 斜率不存在时，即 $l_{QP}: x = 0$ ，

此时 $Q(0, \frac{3}{2})$ ， $P(0, 0)$ ，

$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = (0, -3) \cdot (0, -\frac{3}{2}) = 0 + (-3) \times (-\frac{3}{2}) = \frac{9}{2}$ ，

当直线 QP 斜率存在时，则可设 $l_{QP}: y = kx + b$ ， $(k \neq 0)$ ，

将 O 点代入，则有 $b = 1$ ，故 $l_{QP}: y = kx + 1$ ， $(k \neq 0)$ ，

设 $Q(x_1, \frac{3}{2})$ ， $P(x_2, 0)$ ，

代入则有 $x_1 = \frac{1}{2k}$,

$$x_2 = -\frac{1}{k},$$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{2k}, \frac{3}{2}\right), P\left(-\frac{1}{k}, 0\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \left(-\frac{1}{k}, -3\right) \cdot \left(\frac{1}{2k}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2k^2} + \frac{9}{2}, (k \neq 0),$$

$$\text{令 } f(k) = -\frac{1}{2k^2} + \frac{9}{2}, (k \neq 0),$$

$$\therefore f'(k) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot k^{-3} = \frac{1}{k^3}, (k \neq 0),$$

$\therefore$ 可知当 $k \in (-\infty, 0)$ 时, $f(k)$ 在单调递减,

$k \in (0, +\infty)$ 时, $f(k)$ 在单调递增,

又 $\therefore$ 当 k 无限大或无限小时, $\frac{1}{2k^2}$ 就无限接近于 0,

$$\therefore \text{可知 } -\frac{1}{2k^2} + \frac{9}{2} < 0 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\therefore \text{此时 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2k^2} + \frac{9}{2} \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right),$$

结合 2 种情况可知,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right].$$

【标注】 【素养】数学运算；逻辑推理；直观想象

【知识点】 数量积的最值问题；建系法求平面向量的数量积

10. 已知集合 $A = \{x | (x+1)(x-2) \leq 0\}$, $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

【答案】 $\{x | 0 < x \leq 2\}$

【解析】 $\because A = \{x | (x+1)(x-2) \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$,

$$\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\},$$

$$\therefore B = \{x | 0 < x \leq 3\},$$

$$\therefore A \cap B = \{x | 0 < x \leq 2\}.$$

【标注】 【知识点】一元二次不等式；交集

11. 若 $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^6$ 的二项展开式中 x^3 的系数为 $\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

【答案】 2

【解析】 $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^6$ 的二项展开式中包含 x^3 的一项为 $C_6^3 \cdot (x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{ax}\right)^3 = \frac{20}{a^3} \cdot x^3 = \frac{5}{2}x^3$,

$$\therefore a = 2.$$

【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项

12. 过点 $(-\sqrt{3}, 1)$ 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相切, 则直线 l 在 y 轴上的截距为 ____ .

【答案】 4

【解析】 若直线 l 的斜率不存在, 即 $l: x = -\sqrt{3}$, 可知与 $x^2 + y^2 = 4$ 相交,

$\therefore$ 不成立.

设直线 l 的斜率为 k ,

$$\therefore l: y - 1 = k(x + \sqrt{3}),$$

$$\therefore kx - y + \sqrt{3}k + 1 = 0,$$

$$\therefore \text{圆心}(0, 0) \text{到} l \text{的距离} d = \frac{|\sqrt{3}k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2,$$

$$\therefore 3k^2 + 2\sqrt{3}k + 1 = 4k^2 + 4,$$

$$\therefore k^2 - 2\sqrt{3}k + 3 = 0,$$

$$\therefore k = \sqrt{3},$$

$$\text{则} l: y = \sqrt{3}x + 4,$$

$\therefore$ 直线 l 在 y 轴上的截距为4.

【标注】 【知识点】 已知直线和圆的位置关系求直线的方程

13. 一袋中装有6个大小相同的黑球和白球. 已知从袋中任意摸出2个球, 至少得到1个白球的概率是 $\frac{4}{5}$, 则袋中白球的个数为 ____ ; 从袋中任意摸出2个球, 则摸到白球的个数 X 的数学期望为 ____ .

【答案】 3; 1

【解析】 设白球的个数为 n , $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \leq 5$,

$$\therefore \text{至少得到1个白球的概率为} \frac{C_n^2 + C_n^1 \cdot C_{6-n}^1}{C_6^2} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \text{解得} n = 3,$$

$$\therefore \text{袋中白球的个数为3},$$

$$\text{可知} X \sim H(2, 3, 6),$$

$$\therefore EX = 2 \times \frac{3}{6} = 1,$$

$\therefore$ 摸到白球个数 X 的数学期望为1.

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望; 超几何分布; 古典概型

14. 已知 $ab > 0$, 则 $\frac{(a^2 + 4b^2)^2 + 2(a^2 + 4b^2) + 5}{4ab + 1}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 4

【解析】 $\because a^2 + 4b^2 \geq 4ab$,

$$\therefore \frac{(a^2 + 4b^2)^2 + 2(a^2 + 4b^2) + 5}{4ab + 1} \geq \frac{(a^2 + 4b^2)^2 + 2(a^2 + 4b^2) + 5}{a^2 + 4b^2 + 1},$$

令 $t = a^2 + 4b^2$, $t > 0$,

$$\text{则 } \frac{t^2 + 2t + 5}{t + 1} = \frac{(t + 1)^2 + 4}{t + 1} = t + 1 + \frac{4}{t + 1} \geq 4,$$

当且仅当 $a^2 = 4b^2$, $a^2 + 4b^2 = 1$ 时, 等号成立.

$$\therefore \frac{(a^2 + 4b^2)^2 + 2(a^2 + 4b^2) + 5}{a^2 + 4b^2 + 1} \text{ 的最小值为 } 4.$$

【标注】 【知识点】基本不等式成立的条件; 利用两次基本不等式求最值

15. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 且 $f(-1) = -1$. 若 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 则 x 的取值范围是 _____; 设函数 $g(x) = \begin{cases} (\sqrt{x} + 1)^2 - a - 1, & x > 0, \\ 2^x + x - a + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 若方程 $f(g(x)) + 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为 _____.

【答案】 $[0, 2]; (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$

【解析】 由 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 得 $f(x+1) \geq -1$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(-1) = -1$, 则 $f(1) = -1$,

$\therefore f(x-1) \geq -1$ 等价于 $f(x+1) \geq f(-1)$, 等价于 $f(|x-1|) \geq f(1)$, 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, $\therefore$

$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

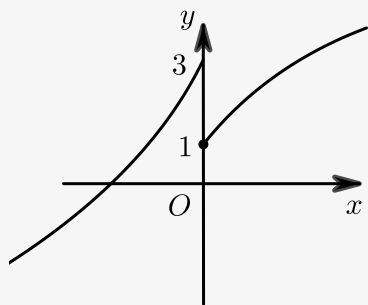
$\therefore |x-1| \leq 1$, 解得 $0 \leq x \leq 2$,

故若 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 则 x 的取值范围是 $[0, 2]$,

若 $f(g(x)) + 1 = 0$, 则 $g(x) = -1$ 或 $g(x) = 1$,

$$\text{令 } h(x) = \begin{cases} (\sqrt{x} + 1)^2, \\ 2^x + x + 2, \end{cases}$$

则 $g(x) = -1$ 等价于 $h(x) = a$, $g(x) = 1$ 等价于 $h(x) = a + 2$, 若方程 $f(g(x)) + 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数根, 则函数 $y = h(x)$ 与直线 $y = a$ 和直线 $y = a + 2$ 共有两个不同的交点, 作出函数 $y = h(x)$ 的大致图像, 如下图所示.



由图像知, $\begin{cases} a \leq 1 \\ a+2 \leq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a > 3 \\ a+2 > 3 \end{cases}$.

解得 $a \leq -1$ 或 $a > 3$.

则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$.

【标注】 【知识点】已知零点情况求参数的取值范围；函数单调性与奇偶性综合问题

十、标题

1. 已知集合 $A = \{x|x^2 - x - 2 < 0\}$, $B = \{x|x > 1\}$, 则 $A \cup B = ()$.

- A. $(-1, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 $A = \{x|x^2 - x - 2 < 0\} = \{x|(x-2)(x+1) < 0\}$

$= \{x|x-1 < x < 2\}$;

$B = \{x|x > 1\}$, 则 $A \cup B = (-1, +\infty)$.

故选C.

【标注】 【知识点】并集；交、并、补集混合运算

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x-2| < 1$ ”是“ $x^2 + x - 2 > 0$ ”的 ().

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 不等式 $|x-2| < 1$ 的解集是 $\{x|1 < x < 3\}$,

不等式 $x^2 + x - 2 > 0$ 的解集是 $\{x|x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$,

$\therefore \{x|1 < x < 3\} \subsetneq \{x|x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$,

$\therefore |x-2| < 1$ 是 “ $x^2 + x - 2 > 0$ ” 的充分而不必要条件 .

故选A .

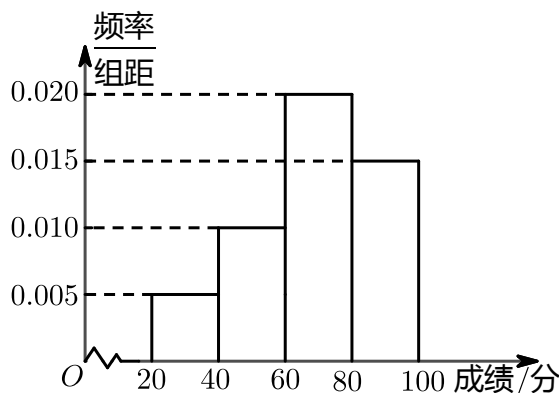
【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

【知识点】 一元二次不等式

【知识点】 含绝对值的不等式

【素养】 逻辑推理

3. 某学校组织学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$, 若低于60分的人数是15人, 则该班的学生人数是 () .



A. 45

B. 50

C. 55

D. 60

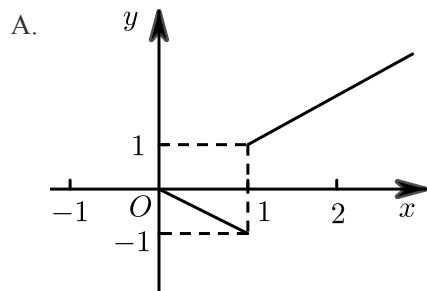
【答案】 B

【解析】 根据频率分布直方图可知, 低于60分的频率是 $(0.005 + 0.01) \times 20 = 0.3$, 所以该班的学生人数是 $\frac{15}{0.3} = 50$.

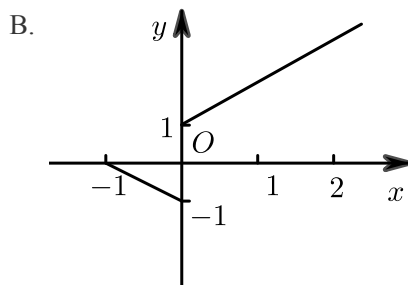
故选B .

【标注】 【知识点】 频率分布直方图

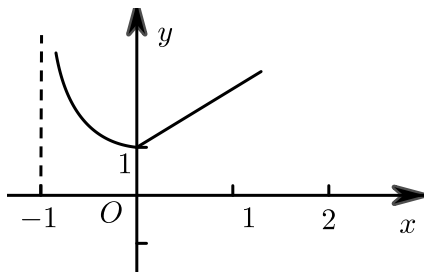
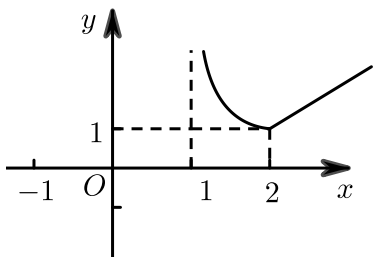
4. 已知函数 $f(x) = e^{|\ln x|}$, 则函数 $y = f(x+1)$ 的图像大致为 () .



C.



D.



【答案】D

【解析】当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = e^{\ln x} = x$, 其图像为一条直线;

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$, 函数 $y = f(x+1)$ 的图像为函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移1个单位长度后得到的.

故选D.

【标注】【知识点】图象法; 函数图象的识别问题

5. 已知抛物线 $\frac{1}{20}x^2 = y$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点重合, 且点 F 到双曲线的渐近线的距离为4, 则双曲线的方程为 ().

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{41} = 1$

C. $\frac{y^2}{41} - \frac{x^2}{16} = 1$

D. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

【答案】D

【解析】抛物线 $\frac{1}{20}x^2 = y$ 焦点坐标为 $(0, 5)$,

双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线的方程为 $by + ax = 0$,

$\therefore$ 抛物线的焦点到双曲线渐近线的距离为4,

$$\therefore \frac{5b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4, \text{ 即 } b = 4,$$

$$\therefore c = 5,$$

$$\therefore a = 3,$$

$$\therefore \text{双曲线方程为: } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

故选D.

【标注】【知识点】双曲线的基本量求解; 抛物线的标准方程

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x-1)$ 的图像关于 $x=1$ 对称, 且当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 若 $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(0.5^{-1.3})$, $c = f(0.7^6)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $c > a > b$

B. $b > a > c$

C. $a > c > b$

D. $c > b > a$

【答案】 A

【解析】 $\because f(x-1)$ 关于 $x=1$ 对称, 则 $f(x)$ 关于 y 轴对称, 为偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\because \log_{0.5} 3 < 0, \log_{0.5} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3 = -\log_2 3,$$

$$\therefore f(-\log_2 3) = f(\log_2 3),$$

$$\because 1 < \log_2 3 < 2,$$

$$\text{又} \because 0.5^{-1.3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.3} = 2^{1.3} > 2,$$

$$\text{又} \because 0.7^6 < 1,$$

$$\therefore 0.7^6 < \log_2 3 < 0.5^{-1.3},$$

又 $\because$ 在 $x > 0$, $f(x)$ 单调递减,

$$\therefore f(0.7^6) > f(\log_2 3) > f(0.5^{-1.3}),$$

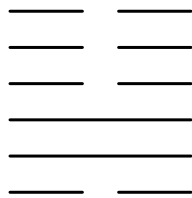
$$\therefore c > a > b.$$

故选 A.

【标注】 【素养】 逻辑推理; 数学运算

【知识点】 函数对称性与奇偶性综合问题; 函数对称性与单调性综合问题; 用单调性比较大小

7. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成, 爻分为阳爻“—”和阴爻“— —”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有3个阳爻的概率是 ().



A. $\frac{5}{16}$

B. $\frac{15}{64}$

C. $\frac{21}{32}$

D. $\frac{11}{16}$

【答案】 A

【解析】 在所有重卦中随机取一重卦, 基本事件总数 $n = 2^6 = 64$,

该重卦恰有3个阳爻包含的基本个数 $m = C_6^3 C_3^3 = 20$,

$$\text{则该重卦恰有3个阳爻的概率 } p = \frac{m}{n} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$$

故选 A.

【标注】 【知识点】 古典概型

8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称且 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1$, $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调, 则 ω 可取数值的个数为 ().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 A

【解析】 $\because f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调, 即 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 同一单调区间内,

$$\therefore -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$\therefore 0 < \omega \leq 8 \text{ ①}.$$

$\because$ 函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称,

$\therefore$ 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x) = \pm\sqrt{2}$, 即 $\frac{\omega\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ ②}.$

由 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1$, 可得如 $\sin\left(\omega \cdot \frac{3\pi}{8} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore \omega \cdot \frac{3\pi}{8} + \varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \text{ ③},$$

$$\text{或 } \omega \cdot \frac{3\pi}{8} + \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi, m, n \in \mathbf{Z} \text{ ④}.$$

故①②③成立, 或①②④成立.

$$\text{由②③可得 } \omega = 2 + (k - 2n) \cdot 8,$$

再结合①可得, $\omega = 2$; 此时, $k = 2n$,

$$\text{令 } n = 0, \text{ 可得 } \varphi = -\frac{\pi}{2}, f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right),$$

满足 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减,

$$\text{由②④可得 } \omega = -2 + (k - 2m) \cdot 8,$$

再结合①可得 $\omega = 6$, 此时, $k = 2m + 1$,

$$\text{令 } m = 1, \text{ 可得 } \varphi = \frac{\pi}{2}, f(x) = \sqrt{2} \sin\left(6x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上不单调, 故不满足条件.

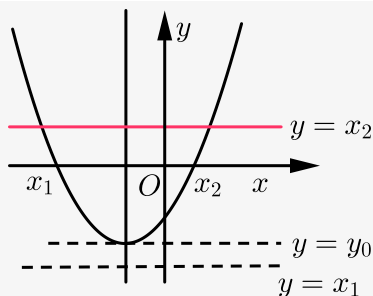
综上可得, ω 可取数值的个数为 1.

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质; 已知正弦型函数图象或性质求参数值

9. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($x \in \mathbf{R}, a > 0$) 的零点为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 函数 $f(x)$ 的最小值为 y_0 , 且 $y_0 \in [x_1, x_2]$, 则函数 $y = f[f(x)]$ 的零点个数是 ().
- A. 2或3 B. 3或4 C. 3 D. 4

【答案】 A

【解析】 如图所示,



$\therefore$ 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的零点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0$,

由 $f(f(x)) = af^2(x) + bf(x) + c = 0$.

$\therefore \Delta > 0$,

$\therefore f(x) = x_1$ 或 $f(x) = x_2$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小值为 y_0 ,

且 $y_0 \in [x_1, x_2]$ 画出直线 $y = x_2, y = x_1$.

则直线 $y = x_2$ 与 $y = f(x)$ 必有两个交点,

此时 $f(x) = x_2$, 有 2 个实数根,

即函数 $y = f(f(x))$ 有两个零点.

直线 $y = x_1$ 与 $y = f(x)$ 可能有一个交点或无交点,

此时 $f(x) = x_1$, 有一个实数根 $x = -\frac{b}{2a}$ 或无实数根.

综上所述: 函数 $y = f(f(x))$ 的零点有 2 个或 3 个.

故选 A.

【标注】 【知识点】一元二次方程根的分布; 函数零点的概念; 利用函数图象研究方程根的分布问题 (图象与零点综合)

10. 已知复数 $(a + 2i)(1 + i)$ 为纯虚数, 其中 i 为虚数单位, 则实数 a 的值是 ____.

【答案】 2

【解析】 $(a + 2i)(1 + i) = a - 2 + (a + 2)i$,

由题意可知: $a - 2 = 0$,

故 $a = 2$.

【标注】 【知识点】复数的四则运算综合; 复数的乘法和除法

11. 在 $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 二项展开式中, 常数项为 ____.

【答案】 15

【解析】 $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 二项展开式，

$$\text{通项为 } T_{r+1} = C_6^r x^r \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{6-r}$$

$$= C_6^r x^r \cdot x^{-3+\frac{1}{2}r}$$

$$= C_6^r x^{-3+\frac{3}{2}r},$$

$$\text{令 } -3 + \frac{3}{2}r = 0, r = 2,$$

$$\text{则 } T_3 = C_6^2 x^0 = C_6^2 = 15.$$

故 $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中，常数项为 15.

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

12. 设直线 $y = x + 2a$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 相交于 A, B 两点，若 $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\pm\sqrt{2}$

【解析】 $x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 可化为 $x^2 + (y - a)^2 = 2 + a^2$,

由题意可知，圆心 $(0, a)$ 到直线 $x - y + 2a = 0$ 的距离为 $d = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$,

由直线与圆相交的性质可知， $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{a^2 + 2 - \frac{1}{2}a^2} = 2\sqrt{3}$,

解得 $a = \pm\sqrt{2}$.

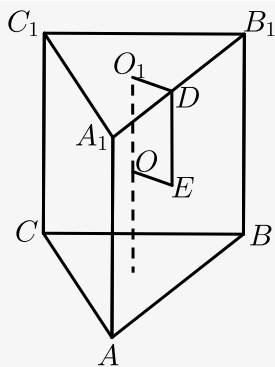
故答案为： $\pm\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

13. 一个球与一个正三棱柱的三个侧面和两个底面都相切，已知这个球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$ ，那么这个三棱柱的体积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $48\sqrt{3}$

【解析】 方法一：由图可知，四边形 OO_1DE 是边长为 r 的正方形，



设 $\triangle A_1B_1C_1$ 是边长为 a 的等边三角形，

$$\text{可知 } r = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a,$$

$$\text{所以 } \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi \Rightarrow r = 2, \text{ 则 } a = 4\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 2r = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 48 \times 4 = 48\sqrt{3}.$$

方法二：设球的半径为 r ，则 $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$ 所以 $r = 2$ ，所以柱体的高为 $2r = 4$ ．又正三棱柱的底面正三角形的内切圆半径与球的半径相等，所以底面正三角形的边长为 $4\sqrt{3}$ ，所以正三棱柱的体积

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{3})^2 \times 4 = 48\sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】空间几何体中的求值问题

14. 已知正实数 a, b 满足 $2a + b = 3$ ，则 $\frac{2a^2 + 1}{a} + \frac{b^2 - 2}{b + 2}$ 的最小值是_____．

【答案】 $\frac{13}{5}$

【解析】 正实数 a, b 满足 $2a + b = 3$ ，

$$\therefore 2a + b + 2 = 5,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{2a^2 + 1}{a} + \frac{b^2 - 2}{b + 2} &= 2a + \frac{1}{a} + \frac{(b + 2)^2 - 4(b + 2) + 2}{b + 2} \\ &= 2a + b + 2 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2} - 4 = 1 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2} \\ &= 1 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2} \right) [2a + (b + 2)] = 1 + \frac{1}{5} \left(4 + \frac{b + 2}{a} + \frac{4a}{b + 2} \right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{5} (4 + 4) = \frac{13}{5}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{b + 2}{a} = \frac{4a}{b + 2}$ 且 $2a + b = 3$ 即 $a = \frac{5}{4}, b = \frac{1}{2}$ 时取等号，

即 $\frac{2a^2 + 1}{a} + \frac{b^2 - 2}{b + 2}$ 的最小值是 $\frac{13}{5}$ ．

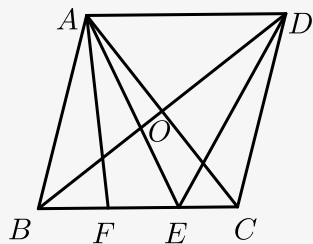
故答案为： $\frac{13}{5}$ ．

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式成立的条件

15. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为3，对角线 AC 与 BD 相交于 O 点， $|\vec{AC}| = 2\sqrt{3}$ ， E 为 BC 边（包含端点）上一点，则 $|\vec{EA}|$ 的取值范围是_____， $\vec{EA} \cdot \vec{ED}$ 的最小值为_____．

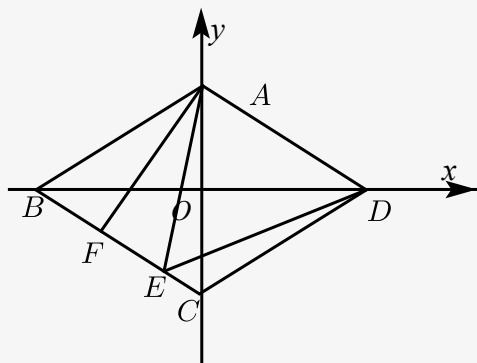
【答案】 $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$; $\frac{23}{4}$

【解析】 根据菱形性质可得 $OC = \sqrt{3}$, 则 $BO = \sqrt{6}$.



①作 $AF \perp BC$, 则 $AF = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{2}$, 此时 AE 最短, 当 E 与 C 重合时, AE 最长, 故 $2\sqrt{2} \leq AE \leq 2\sqrt{3}$, 即 $|\vec{EA}| \in [2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$.

②以 O 为原点, BD 所在直线为 x 轴建系如图:



则 $A(0, \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{6}, 0)$, $C(0, -\sqrt{3})$, $D(\sqrt{6}, 0)$,

所以 $BC: y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{3}$, 设 $E\left(m, -\frac{\sqrt{2}}{2}m - \sqrt{3}\right)$,

则 $\vec{EA} \cdot \vec{ED} = \left(-m, 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}m\right) \left(\sqrt{6} - m, \frac{\sqrt{2}}{2}m + \sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$, 其中 $m \in [-\sqrt{6}, 0]$,

对称轴为 $m = -\frac{\sqrt{6}}{12} \in [-\sqrt{6}, 0]$, 故当 $m = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ 时 $\vec{EA} \cdot \vec{ED}$ 最小, 最小值为 $\frac{23}{4}$.

故答案为: $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$; $\frac{23}{4}$.

【标注】 【知识点】平面向量数量积运算 (非坐标); 数量积的坐标表达式