

选填练习十四

1. 复数 $z = \frac{2-i}{2+i}$ (i 为虚数单位) 在复平面内对应的点所在象限为 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 D

【解析】 解： $\because z = \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ ，
 $\therefore$ 复数在复平面内对应的点的坐标是 $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ ，
 $\therefore$ 它对应的点在第四象限，
故选：D.

【标注】 【知识点】 复平面；复数的四则运算综合

2. 生物实验室有5只兔子，其中只有3只测量过某项指标，若从这5只兔子中随机取出3只，则恰有2只测量过该指标的概率为 () .
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】 C

【解析】 设5只兔子编号分别为 a, b, x, y, z ，
其中 x, y, z 这3只兔子测量过某项指标，
在5只兔子中取3只，有 $(a, b, x), (a, b, y), (a, b, z), (a, x, z), (a, y, z), (a, x, y), (b, x, z), (b, y, z), (b, x, y), (x, y, z)$ ，共10种情况，其中恰有2只测量过该指标的情况有 $(a, x, z), (a, y, z), (a, x, y), (b, x, z), (b, y, z), (b, x, y)$ ，共6种情况，
则所求概率 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

【标注】 【知识点】 古典概型的概率计算（不涉及计数原理）

3. 若 $a = 2^{0.5}$ ， $b = \log_{\pi} 3$ ， $c = \log_2 \sin \frac{2\pi}{5}$ ，则 () .
A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$

【答案】 A

【解析】 $0 < \sin \frac{2\pi}{5} < 1$ ，

由指数函数的图象可知： $a > 1, 0 < b < 1, c < 0$.

故选A .

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

4. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, 且 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 () .

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{6\pi}{5}$

【答案】 B

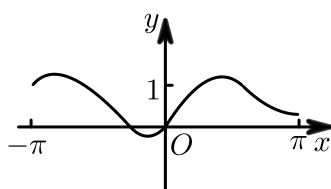
【解析】 $\because (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$,
 $\therefore (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$,
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - |\vec{b}|^2 = 0$,
 $\because$ 非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$,
 $\therefore 2|\vec{b}|^2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - |\vec{b}|^2 = 0$,
 $\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2}$,
 $\because \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$,
 $\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$.

故选B .

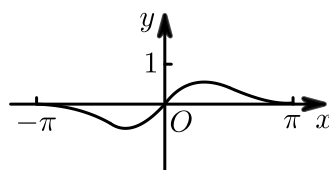
【标注】 【知识点】 利用向量数量积求夹角

5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象大致为 () .

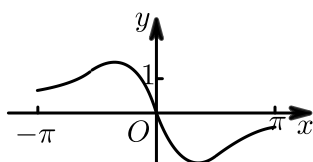
A.



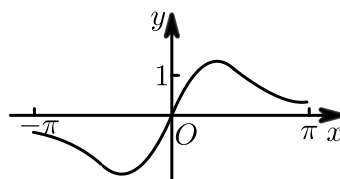
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 $\because f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$,

$$\therefore f(-x) = \frac{\sin(-x) + (-x)}{\cos(-x) + (-x)^2} = -\frac{\sin x + x}{\cos x + x^2} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，排除A；

$$\text{又 } f(\pi) = \frac{\pi}{\pi^2 - 1} > 0, \text{ 排除B、C；}$$

故选D.

【标注】 【知识点】函数图象的识别问题

6. 若 $a > 0, b > 0$ ，则“ $a + b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的（ ）.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $\because a > 0, b > 0$,

$$\therefore 4 \geq a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore 2 \geq \sqrt{ab},$$

$$\therefore ab \leq 4,$$

$$\text{即 } a + b \leq 4 \Rightarrow ab \leq 4,$$

$$\text{若 } a = 4, b = \frac{1}{4}, \text{ 则 } ab = 1 \leq 4,$$

$$\text{但 } a + b = 4 + \frac{1}{4} > 4,$$

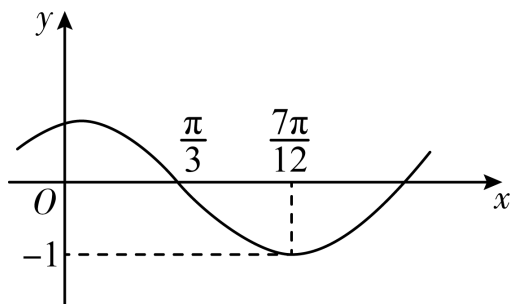
$$\text{即 } ab \leq 4 \text{ 推不出 } a + b \leq 4,$$

$\therefore a + b \leq 4$ 是 $ab \leq 4$ 的充分不必要条件.

故选：A.

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的概念；充要条件与不等式结合

7. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，为了得到 $f(x)$ 的图象，则只要将 $g(x) = \cos 2x$ 的图象()



A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

【答案】B

【解析】解：由图知： $A=1$ ，由 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$ ，即 $T=\pi$ ，则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ，

又 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ ，即 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0$ ，

所以 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi$ ，即 $\varphi = k\pi - \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ ，

又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，

即 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

将 $g(x) = \cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得：

$y = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$ ，

故选：B。

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换

8. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$ ，且直线 $x = -\frac{a^2}{c}$ (c 是双曲线的半焦距)与抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线重合，则此双曲线的方程为()。

A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1$

B. $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{96} = 1$

C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

D. $\frac{x^2}{3} - \frac{2y^2}{3} = 1$

【答案】C

【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线为 $x = -1$ ，

所以对双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，

有 $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ， $-\frac{a^2}{c} = -1$ ，

解得 $a = \sqrt{3}$ ， $c = 3$ ，

$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 6$ ，

则此双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 。

故选C。

【标注】【知识点】双曲线的标准方程

9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有3个零点，则()

A. $a < -1, b < 0$

B. $a < -1, b > 0$

C. $a > -1, b < 0$

D. $a > -1, b > 0$

【答案】C

【解析】解：当 $x < 0$ 时， $y = f(x) - ax - b = x - ax - b = (1-a)x - b = 0$ ，得 $x = \frac{b}{1-a}$ ，

$y = f(x) - ax - b$ 最多有一个零点；

当 $x \geq 0$ 时， $y = f(x) - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$ ，

$y' = x^2 - (a+1)x$ ，

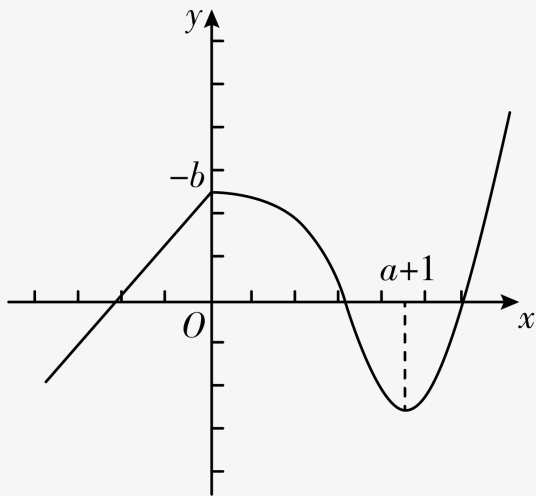
当 $a+1 \leq 0$ ，即 $a \leq -1$ 时， $y' \geq 0$ ， $y = f(x) - ax - b$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增， $y = f(x) - ax - b$ 最多有1个零点，不合题意；

当 $a+1 > 0$ ，即 $a > -1$ 时，令 $y' > 0$ ，得 $x \in (a+1, +\infty)$ ，函数单调递增，令 $y' < 0$ ，得 $x \in (0, a+1)$ ，函数单调递减，函数最多有2个零点。

根据题意函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有3个零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x) - ax - b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点，在 $[0, +\infty)$ 上有2个零点，如图，

$\therefore \frac{b}{1-a} < 0$ 且 $\begin{cases} -b > 0 \\ \frac{1}{3}(a+1)^3 - \frac{1}{2}(a+1)(a+1)^2 - b < 0 \end{cases}$
解得 $b < 0$ ， $1-a > 0$ ， $b > -\frac{1}{6}(a+1)^3$ 。

故选：C。

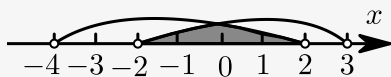


【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

10. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$ ， $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ ，则 $M \cap N = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\{x | -2 < x < 2, x \in \mathbf{R}\}$

【解析】如图：



集合 $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$

$$= \{x | (x-3)(x+2) < 0\}$$

$$= \{x | -2 < x < 3\},$$

$$\therefore \text{集合 } M = \{x | -4 < x < 2\},$$

$$\text{则 } M \cap N = \{x | -2 < x < 2, x \in \mathbf{R}\}.$$

故答案为： $\{x | -2 < x < 2, x \in \mathbf{R}\}$.

【标注】 【知识点】交集；交、并、补集混合运算

11. 某高校甲、乙、丙、丁四个专业分别有150、150、400、300名学生. 为了解学生的就业倾向, 用分层抽样的方法从该校这四个专业共抽取40名学生进行调查, 应在丙专业抽取的学生人数为 ____ .

【答案】 16

【解析】 应在丙专业抽取的学生人数是 $\frac{400}{150 + 150 + 400 + 300} \times 40 = 16$.

【标注】 【素养】数据分析

【素养】 数学运算

【知识点】 分层随机抽样

12. 曲线 $y = \cos x - \frac{x}{2}$ 在点(0,1)处的切线方程为 ____ .

【答案】 $x + 2y - 2 = 0$

【解析】 解：由题意, 可知 $y' = -\sin x - \frac{1}{2}$,

$$\therefore y'|_{x=0} = -\sin 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} .$$

$\therefore$ 曲线 $y = \cos x - \frac{x}{2}$ 在点(0,1)处的切线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}x$,

整理, 得 $x + 2y - 2 = 0$.

故答案为： $x + 2y - 2 = 0$.

【标注】 【知识点】求在某点处的切线方程

13. 函数 $y = a^{1-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点A, 若点A在直线 $mx + ny - 1 = 0$ ($mn > 0$) 上, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 ____ .

【答案】 4

【解析】 $\therefore$ 函数 $y = a^{1-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点A,

$$\therefore A(1, 1),$$

$\therefore$ 点 A 在直线 $mx + ny - 1 = 0$ 上 ($mn > 0$),

$$\therefore m + n = 1 \quad (mn > 0),$$

$$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = (m+n) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) = 2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 4, \text{ 当且仅当 } m = n = \frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore m = n = \frac{1}{2} \text{ 时, } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \text{ 的最小值为 } 4.$$

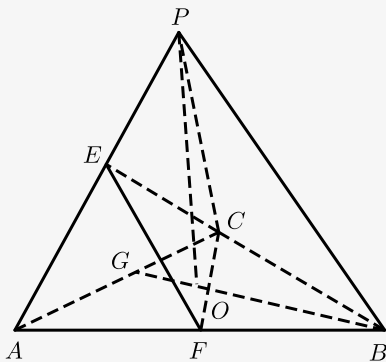
故答案为: 4.

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的概念；指数函数的图象及性质

14. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF = 90^\circ$, 则球 O 的体积为 _____.

【答案】 $\sqrt{6}\pi$

【解析】 如图, 由 $PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, 可知三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥,



则顶点 P 在底面的射影 O 为底面三角形的中心, 连接 BO 并延长, 交 AC 于点 G ,

则 $AC \perp BG$, 又 $PO \perp AC$, $PO \cap BG = O$,

可得 $AC \perp$ 平面 PBG , 则 $PB \perp AC$,

$\therefore E, F$ 分别是 PA, AB 的中点,

$$\therefore EF \parallel PB,$$

又 $\angle CEF = 90^\circ$, 即 $EF \perp CE$,

$\therefore PB \perp CE$, 得 $PB \perp$ 平面 PAC ,

$\therefore$ 正三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直,

把正三棱锥补形为正方体, 则正方体的外接球即为三棱锥的外接球,

$$\text{其直径 } 2R = \sqrt{PA^2 + PB^2 + PC^2} = \sqrt{6}, \text{ 则球 } O \text{ 的体积为 } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \sqrt{6}\pi.$$

故答案为: $\sqrt{6}\pi$.

【标注】 【知识点】空间几何体的体积；空间几何体的内切球、外接球问题

15. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2$ ，若对于任意的 $x \in [t, t+2]$ ，不等式 $f(x+t) \geq 2f(x)$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是 _____ .

【答案】 $[\sqrt{2}, +\infty)$

【解析】 当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2$ ，

$\because$ 函数是奇函数，

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时， $f(x) = -x^2$ ，

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases},$$

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数，

且满足 $2f(x) = f(\sqrt{2}x)$ ，

$\therefore$ 不等式 $f(x+t) \geq 2f(x) = f(\sqrt{2}x)$ 在 $[t, t+2]$ 恒成立，

$\therefore x+t \geq \sqrt{2}x$ 在 $[t, t+2]$ 恒成立，

即： $x \leq (1+\sqrt{2})t$ 在 $[t, t+2]$ 恒成立，

$\therefore t+2 \leq (1+\sqrt{2})t$ ，

解得： $t \geq \sqrt{2}$.

故答案为： $[\sqrt{2}, +\infty)$.

【标注】 【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题