

选填练习十二

1. 已知集合 $U = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x \in U \mid |x - 1| < 2\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.
- A. $\{0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

【答案】A

【解析】 $\because U = \{0, 1, 2, 3\}$,

$\therefore B = \{x \in U \mid -1 \leq x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$,

且 $A = \{-1, 0, 1\}$,

$\therefore A \cap B = \{0, 1\}$.

故选：A.

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $1 - x^2 < 0$ ”是“ $x^3 > 1$ ”的 ().
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】由 $1 - x^2 < 0$ 可得 $x < -1$ 或 $x > 1$,

由 $x^3 > 1$ 可得 $x > 1$,

所以 $x < -1$ 或 $x > 1$ 不能推出 $x > 1$,

$x > 1$ 可以推出 $x < -1$ 或 $x > 1$,

故“ $1 - x^2 < 0$ ”是“ $x^3 > 1$ ”的必要不充分条件.

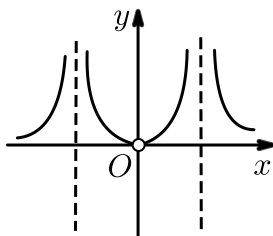
故选B.

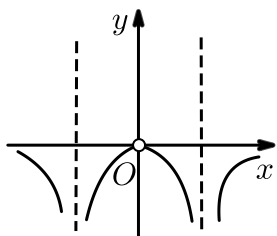
【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

3. 函数 $y = \frac{1}{\log_2 |x|}$ 的部分图象大致为 ().

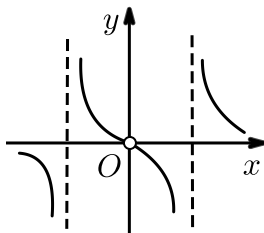
A.

B.

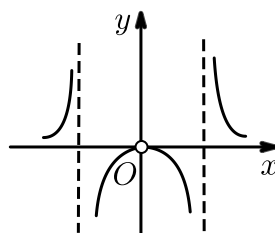




C.



D.



【答案】 D

【解析】 $\because \frac{1}{\log_2 |-x|} = \frac{1}{\log_2 |x|}$,

$\therefore f(x)$ 是偶函数, 排除 C,

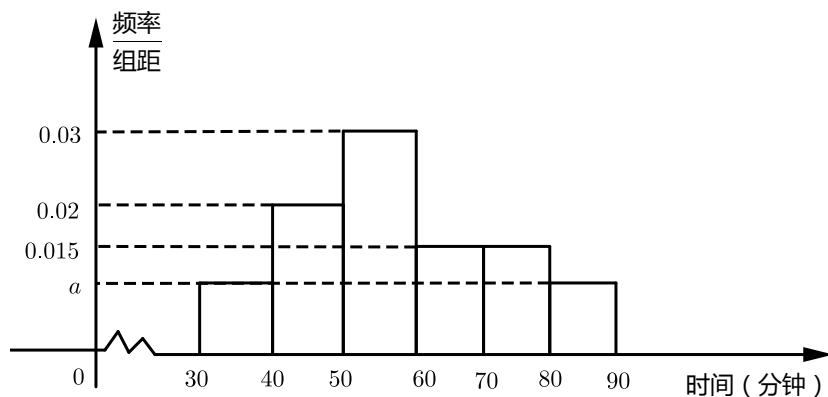
当 $x = 2$ 时, $y = \frac{1}{\log_2 2} = 1$, 排除 A,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{\log_2 \frac{1}{2}} = -1$, 排除 B.

故选 D.

【标注】 【知识点】函数图象的识别问题; 根据奇偶性确定图象

4. 某校通过问卷调查了解 500 名学生周末参加体育锻炼的时间, 频率分布直方图如下图所示, 数据的分组依次为: $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90]$, 则在调查的学生中周末参加体育锻炼的时间不少于 60 分钟的人数是 ().



A. 125

B. 175

C. 200

D. 300

【答案】 C

【解析】 根据频率分布直方图知,

设调查的学生中周末参加体育锻炼的时间在 $[30, 40)$ 内的频率为 x ,

则 $0.15 + 0.15 + x = 1 - x - 0.2 - 0.3$,

解得 $x = 0.1$,

所以不少于60分钟的频率为:

$0.15 + 0.15 + 0.1 = 0.4$,

对应的人数是 $500 \times 0.4 = 200$ (人) .

故选C .

【标注】 【知识点】 频数与频率

5. 设 $a = 2^{\log_2 3}$, $b = \log_{0.3} 0.4$, $c = 3 \ln 2$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $b < a < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $a < b < c$

【答案】 C

【解析】 $a = 2^{\log_2 3} = 3$ (对数公式 $a^{\log_a x} = x$) ,

$b = \log_{0.3} 0.4 > \log_{0.3} 1 = 0$,

又 $\log_{0.3} 0.4 < \log_{0.3} 0.3 = 1$,

$\therefore 0 < b < 1$,

$c = 3 \ln 2 > \ln e = 1$,

又 $3 \ln 2 < 3 \ln e = 3$,

$\therefore 1 < c < 3$,

综上所述 $a > c > b$.

故选C .

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

6. 已知圆柱 OO_1 的两底面圆周上的所有点都在球 C 的表面, 且圆柱 OO_1 的底面半径为1, 高为 $2\sqrt{3}$, 则球 C 的表面积为 () .

A. 2π

B. 8π

C. 12π

D. 16π

【答案】 D

【解析】 设球的半径为 R , 则 $2R = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$,

所以, $R = 2$,

因此, 球 O 的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

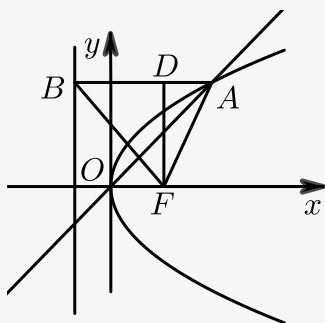
故选D.

【标注】 【知识点】 空间几何体的表面积

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于点 A , 点 B 是抛物线的准线上一点, 抛物线的焦点 F 为双曲线的一个焦点, 且 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 则双曲线的方程为 ().
- A. $\frac{7x^2}{3} - \frac{7y^2}{4} = 1$ B. $\frac{7x^2}{4} - \frac{7y^2}{3} = 1$ C. $\frac{3x^2}{7} - \frac{4y^2}{7} = 1$ D. $\frac{7x^2}{12} - \frac{7y^2}{16} = 1$

【答案】 A

【解析】 如图,



由抛物线 $y^2 = 4x$, 得 $F(1, 0)$, 则双曲线的半焦距 $c = 1$,

由抛物线定义可知, $|AF| = |AB|$ 时, AB 与 x 轴平行,

$\therefore \triangle ABF$ 为等边三角形,

$\therefore A$ 点的横坐标为 3, 代入 $y^2 = 4x$, 可得 $A(3, 2\sqrt{3})$,

则双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$, 即 $\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$\text{联立 } \begin{cases} c = 1 \\ \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2 = \frac{3}{7}, b^2 = \frac{4}{7},$$

$\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{7x^2}{3} - \frac{7y^2}{4} = 1$.

故选: A.

【标注】 【知识点】 双曲线的焦点三角形问题 (小题); 双曲线的标准方程

8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 其中 $\omega > 0, |\varphi| < \pi$. 给出下列结论:

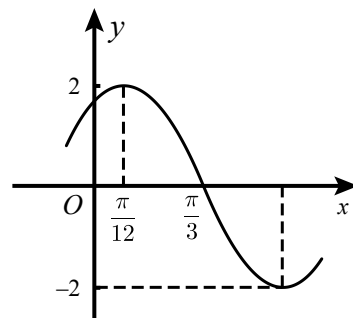
① ω 的值为 2;

② φ 的值为 $-\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$;

③ 直线 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴;

④ 函数 $f(x)$ 的解析式可表示为 $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

其中所有正确结论的序号是 ().



A. ①②

B. ①④

C. ①②③

D. ①②④

【答案】 B

【解析】 ① $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$, $\omega = 2$, 故①正确;

② 将 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 代入 $f(x) = 2 \cdot \sin(2x + \varphi)$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$),

$\because |\varphi| < \pi$,

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$,

故②错误;

③ 相邻2条对称轴间的距离为 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$,

$x_{\text{对}} = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

$k = 1$ 时, $x = \frac{7\pi}{12}$,

$k = -1$ 时, $x = -\frac{5\pi}{12}$,

故③错误;

④ $f(x) = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

$= 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

$= 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

故④正确;

综上所述①④正确.

故选B.

【标注】 【知识点】已知正弦型函数图象求参数值

9. 已知函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2) = f(x)$, 且当 $-1 \leq x < 1$ 时, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \notin \mathbf{Z} \\ e^x, & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} |\log_a x|, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 恰有5个互异的实数解, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(7, 9]$

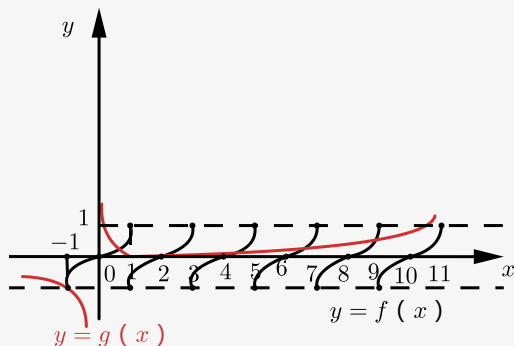
B. $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{7}\right) \cup (7, 9]$

C. $\left[\frac{1}{11}, \frac{1}{9}\right) \cup (9, 11]$

D. $\left[\frac{1}{11}, \frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{9}\right) \cup (9, 10) \cup (10, 11]$

【答案】D

【解析】



$\because y = f(x)$ 对任意 x 满足 $f(x+2) = f(x)$,

$\therefore f(x)$ 的周期 $T = 2$,

$\therefore$ 在同一坐标系下画出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像,

由 $f(x) = g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上恰有 5 个互异根, $\Leftrightarrow y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上有 5 个交点,

当 $x = 1$ 时, $f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq g(-1) = -1$,

而当 $x \notin \mathbb{Z}$ 时, $x^3 = \frac{1}{x}$, 无解,

$\therefore y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 y 轴左侧无交点,

$\therefore y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 y 轴右侧有 5 个交点,

根据把 $f(x)$ 周期性与 $g(x)$ 图象结合,

二者在 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 7)$, $(7, 8)$, $(8, 9)$ 这些区间中共有 5 个交点,

故 $y = f(x)$ 图像会在 $(9, 10)$ 或 $(10, 11]$ 内与 $y = 1$ 相交,

$$\therefore \begin{cases} |\log_a 9| < 1 \\ |\log_a 10| > 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} |\log_a 9| < 1 \\ |\log_a 11| \geq 1 \end{cases},$$

$$\therefore a \geq 1 \text{ 或 } 0 < a < \frac{1}{9}, 1 < a < 10 \text{ 或 } \frac{1}{10} < a < 1,$$

$$a > 9 \text{ 或 } 0 < a < \frac{1}{9}, 1 < a \leq 11 \text{ 或 } \frac{1}{11} \leq a < 1,$$

$$\text{综上 } a \text{ 的取值范围 } \left[\frac{1}{11}, \frac{1}{10} \right) \cup \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{9} \right) \cup (9, 10) \cup (10, 11].$$

故选 D.

【标注】 【知识点】 利用函数图象研究方程根的分布问题 (图象与零点综合)

10. i 是虚数单位, 则 $\left| \frac{3-i}{1+i} \right|$ 的值为 ____.

【答案】 $\sqrt{5}$

$$\text{【解析】 } \because \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i,$$

$$\therefore \left| \frac{3-i}{1+i} \right| = |1-2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5},$$

故答案为: $\sqrt{5}$.

【标注】 【知识点】复数的模

11. 在 $\left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中, x^3 的系数是 _____ .

【答案】 2160

【解析】 $T_{r+1} = C_6^r (2x)^{6-r} \left(-3x^{-\frac{1}{2}}\right)^r = C_6^r (-3)^r (2)^{6-r} x^{6-\frac{3}{2}r}$

$$\text{当 } 6 - \frac{3}{2}r = 3 \Rightarrow r = 2,$$

$$\therefore T_3 = C_6^2 \cdot (-3)^2 (2)^4 x^3 = 2160x^3,$$

$\therefore x^3$ 的系数是 2160 ,

$$\begin{aligned} T_3 &= C_6^2 \cdot (-3)^2 (2)^4 x^3 \\ &= \left(\frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 9 \times 16\right) x^3 \\ &= (15 \times 9 \times 6) x^3 \\ &= 2160 \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】求项的系数或二项式系数

12. 设 $m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq 0$, 若直线 $l: 2x - y + m = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 相切, 则 $m =$ _____ .

【答案】 -10

【解析】 由题干可知: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$,

$$\text{标准方程为 } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5,$$

故圆心为 $(2, -1)$, 半径 $r = \sqrt{5}$,

$\therefore$ 直线 $l: 2x - y + m = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 相切 ,

则圆心 $(2, -1)$ 到直线 $l: 2x - y + m = 0$ 的距离为圆的半径, 即

$$\frac{|4 + 1 + m|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5},$$

$$\therefore |5 + m| = 5, m \neq 0,$$

$$\therefore 5 + m = -5,$$

$$\therefore m = -10.$$

【标注】 【知识点】已知直线和圆的位置关系求参数

13. 某校从 5 名学生中选派 3 人参加劳动技能大赛. 已知这 5 名学生中有高一年级学生 2 名, 高二年级学生 2 名, 高三年级学生 1 名, 则所选 3 人分别来自不同年级的概率为 _____. 记所选 3 人中高一年级学生的

人数为 X ，则随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{5}, \frac{6}{5}$

【解析】 某校从5名学生中选派3人参加劳动技能大赛 .

这5名学生中有高一年级学生2名，高二年级学生2名，高三年级学生1名，

基本事件总数 $n = C_5^3 = 10$ ，

所选3人分别来自不同年级包含的基本事件个数 $m = C_2^1 C_2^1 C_1^1 = 4$ ，

$\therefore$ 所选3人分别来自不同年级的概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ，

记所选3人中高一年级学生的人数为 X ，

则 X 可能取值为0，1，2，

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}，$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{6}{10}，$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_1^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}，$$

$\therefore$ 随机变量的数学期望

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5} .$$

故答案为： $\frac{2}{5}, \frac{6}{5}$.

【标注】 【知识点】超几何分布；离散型随机变量的数学期望

14. 已知正实数 x, y 满足 $x+y = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} + 6$ ，则 $x+y$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 8

【解析】 由 $x+y = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} + 6$ ，可得 $x+y-6 = \frac{1}{x} + \frac{9}{y}$.

两边同时乘以 $x+y$ ，可得 $(x+y-6) \cdot (x+y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right) \cdot (x+y)$ ，

因为 $\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right) \cdot (x+y) = 10 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y} \geq 10 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{9x}{y}} = 16$ ，

当且仅当 $y=3x$ ，即 $x=2, y=6$ 时，等号成立，

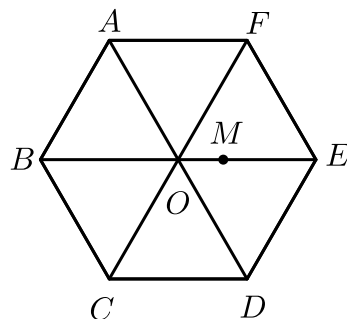
则 $(x+y-6) \cdot (x+y) \geq 16$ ，即 $(x+y)^2 - 6(x+y) - 16 \geq 0$ ，

解得 $x+y \leq -2$ （舍去）或 $x+y \geq 8$.

故答案为：8 .

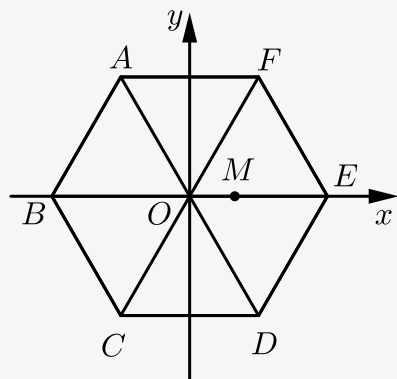
【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值

15. 如图所示, 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为2, 线段 AD , BE , CF 交于点 O , 则 $|\vec{OA} + \vec{CE}| = \underline{\hspace{1cm}}$; 若点 M 是线段 BE 上一点, 且 $\vec{AD} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{DM} + \frac{1}{3}\vec{FM}\right) = -2$, 则 $|\vec{OM}| = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 $4; \frac{2}{5}$

【解析】 以 O 为坐标原点, 建立平面直角坐标系如图,



则 $A(-1, \sqrt{3})$, $C(-1, -\sqrt{3})$, $E(2, 0)$, $F(1, \sqrt{3})$, $D(1, -\sqrt{3})$,

$\therefore \vec{OA} = A(-1, \sqrt{3})$, $\vec{CE} = (3, \sqrt{3})$.

$\therefore \vec{OA} + \vec{CE} = (2, 2\sqrt{3})$,

则 $|\vec{OA} + \vec{CE}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$, $\vec{AD} = (2, -2\sqrt{3})$.

设 $M(a, 0) (-2 \leq a \leq 2)$,

$\frac{1}{2}\vec{DM} = \left(\frac{a-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\frac{1}{3}\vec{FM} = \left(\frac{a-1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

由 $\vec{AD} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{DM} + \frac{1}{3}\vec{FM}\right) = -2$,

得 $(2, -2\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{5(a-1)}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{5}{3}(a-1) - 1 = 0$,

即 $a = \frac{2}{5}$,

$\therefore M\left(\frac{2}{5}, 0\right)$, 则 $|\vec{OM}| = \frac{2}{5}$.

故答案为: $4; \frac{2}{5}$.

【标注】 【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算; 平面向量数量积的坐标运算