

选填练习一

1. 设全集 $I = \{x | -3 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, 0, 2\}$, 则 $A \cup (\complement_I B) = (\quad)$.
- A. $\{-1, 1, 2\}$ B. $\{1\}$ C. $\{2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

【答案】A

【解析】 $\because I = \{x | -3 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$,

$$\therefore I = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$\therefore \complement_I B = \{-1, 1\},$$

$$\text{即 } A \cup \complement_I B = \{-1, 1, 2\}.$$

故选A.

【标注】【知识点】补集；并集；交、并、补集混合运算

2. “ $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ” 是 “ $\tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ” 的 () .
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】由三角函数性质得： $\tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore “\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})” \text{ 是 “}\tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}” \text{ 的充分必要条件.}$$

故选C.

【标注】【知识点】充要条件与三角函数结合

3. 已知 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, $g(x) = [x]$ 为取整函数, x_0 是函数 $f(x) = \ln x + x - 4$ 的零点, 则 $g(x_0) = (\quad)$.
- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

【答案】D

【解析】 $\because f(x) = \ln x + x - 4$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} + 1,$$

又 $\because x \in (0, +\infty)$,

$\therefore f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又: } f(2) = \ln 2 + 2 - 4 = \ln 2 - 2 < 0,$$

$$f(3) = \ln 3 + 3 - 4 = \ln 3 - 1 > 0,$$

$$\therefore x_0 \in (2, 3),$$

$$\text{即 } g(x_0) = [x_0] = 2.$$

故选:D.

【标注】【知识点】函数零点存在定理;判定函数零点所在区间(存在性定理);导数与单调性

4. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线与抛物线 $C_2: y^2 = 2px(p > 0)$ 的准线分别交于A, B两点. 若双曲线C的离心率为2, $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, O为坐标原点, 则抛物线 C_2 的焦点坐标为().

A. $(\sqrt{2}, 0)$

B. $(1, 0)$

C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

【答案】B

【解析】双曲线 C_1 的两条渐近线分别为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

设点A在x轴上方, 则 $A\left(-\frac{p}{2}, \frac{b}{2a}p\right)$, $B\left(-\frac{p}{2}, -\frac{b}{2a}p\right)$,

$$\therefore |AB| = \frac{b}{a}p,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{p}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot p \cdot \frac{p}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot p^2 = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{c}{a} = 2, c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{3},$$

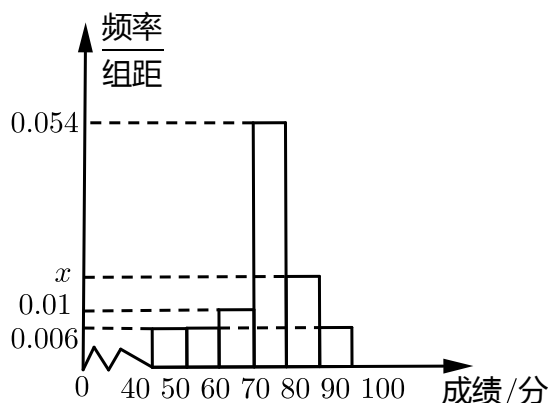
$$\therefore p = 2,$$

$\therefore C_2$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$.

故选B.

【标注】【知识点】抛物线与双曲线结合

5. 某班50名学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是： $[40, 50)$ ， $[50, 60)$ ， $[60, 70)$ ， $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100]$ ．从样本成绩不低于80分的学生中随机选取2人，记这2人成绩在90分以上（含90分）的人数为 ξ ，则 ξ 的数学期望为（ ）．



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】B

【解析】由图知 $x = 0.018$ ，

则 $[80, 90)$ 频率为0.18，人数为9人，

$[90, 100]$ 频率为0.06，人数为3人，

共 $(0.18 + 0.06) \times 50 = 12$ 人，

则抽取2人分数在90分以上人数的分布列为：

$\xi = 0, 1, 2$ ，

$$P(\xi = 0) = \frac{C_9^2}{C_{12}^2} = \frac{36}{66} = \frac{6}{11}，$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_9^1 C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{27}{66} = \frac{9}{22}，$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{C_{12}^2} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22}，$$

ξ	0	1	2
P	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

$$E(X) = 0 \times \frac{6}{11} + 1 \times \frac{9}{22} + 2 \times \frac{1}{22} = \frac{9}{22} + \frac{2}{22} = \frac{1}{2}。$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；超几何分布

6. 已知函数 $f(x) = \sin 2x - 2 \sin^2 x + 1$ ，给出下列四个结论，其中正确的结论是（ ）．

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π

B.

函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 上是减函数

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{16}$ 对称

D. 函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到

【答案】 B

【解析】 $f(x) = \sin 2x - 2 \sin^2 x + 1$

$$= \cos 2x + \sin 2x$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right).$$

A、 $\frac{2\pi}{2} = \pi = T$ 最小正周期是 π ，故A错误；

B、 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}) \Rightarrow \frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，
 $k = 0$ 时， $\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5\pi}{8}$ ，故B正确；

C、 $x = \frac{\pi}{16}$ ， $f(x) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} \right) \neq \pm \sqrt{2}$ ，非对称轴，故C错误；

D、向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 时成立， $\sqrt{2} \sin \left[2 \left(x + \frac{\pi}{8} \right) \right] = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ ，故D错误。

故选B。

【标注】 【知识点】 辅助角公式；倍角、和差角公式综合；正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质；正余弦型、正切型函数图象变换

7. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，对任意两个正数 x_1, x_2 ，($x_1 < x_2$)，都有 $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$ ，记
 $a = 25f(0.2^2)$ ， $b = f(1)$ ， $c = -\log_5 3 f\left(\log_{\frac{1}{3}} 5\right)$ ，则 a, b, c 大小关系为()。
- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

【答案】 C

【解析】 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，

则函数 $g(x)$ 单减，

$$a = 25f(0.2^2)$$

$$= \frac{f(0.2^2)}{0.2^2}$$

$$= g(0.2^2),$$

$$b = f(1) = \frac{f(1)}{1} = g(1),$$

$\because f(x)$ 为奇函数，

$$\therefore f\left(\log_{\frac{1}{3}} 5\right) = -f\left(-\log_{\frac{1}{3}} 5\right) = -f(\log_3 5),$$

$$c = -\log_5 3 \cdot f\left(\log_{\frac{1}{3}} 5\right) = \frac{f(\log_3 5)}{\log_3 5} = g(\log_3 5),$$

$$\because 0.2^2 < 1 < \log_3 5$$

$$\therefore a > b > c.$$

故选C.

【标注】【知识点】用单调性比较大小

8. 国际高峰论坛，组委会要从6个国内媒体团和3个国外媒体团中选出3个媒体团进行提问，要求这三个媒体团中既有国内媒体团又有国外媒体团，且国内媒体团不能连续提问，则不同的提问方式的种数为（ ）.

A. 378

B. 306

C. 268

D. 198

【答案】 D

【解析】 两上国媒一个外媒，有 $C_6^2 C_3^1 A_2^2 = 90$ 种，

两个外媒，一个国媒 $C_6^1 C_3^2 A_3^3 = 108$ 种.

共198种.

故选D.

【标注】【知识点】分步乘法计数原理；加法原理与乘法原理的综合运用；分类加法计数原理

9. 已知圆O的半径为2，P，Q是圆O上任意两点，且 $\angle POQ = 60^\circ$ ，AB是圆O的一条直径，若点C满足 $\overrightarrow{OC} = (\lambda - 1)\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{OQ} (\lambda \in \mathbf{R})$ ，则 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的最小值为（ ）.

A. -1

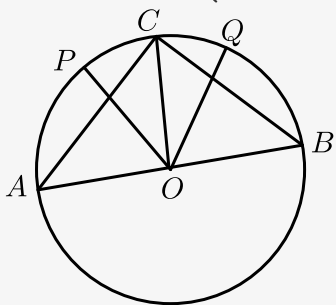
B. -2

C. -3

D. -4

【答案】 C

【解析】 由题意可得 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$
 $= \overrightarrow{CO}^2 + \overrightarrow{CO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB},$



∵ AB 是圆 O 的任意一条直径,

$$\therefore \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{0}, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -4,$$

$$\therefore \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \vec{CO}^2 + 0 - 4 = \vec{CO}^2 - 4,$$

要求 $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ 的最小值问题就是求 $\vec{CO}^2$ 的最小值,

$$\text{由于点 } C \text{ 满足 } \vec{OC} = (\lambda - 1)\vec{OP} + \lambda\vec{OQ} (\lambda \in \mathbf{R}),$$

两边平方可得

$$\vec{CO}^2 = (\lambda - 1)^2 \vec{OP}^2 + \lambda^2 \vec{OQ}^2 + 2\lambda(\lambda - 1)\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$$

$$= 4(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 2\lambda(\lambda - 1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 4(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)$$

$$= 4 \left[3 \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right],$$

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $\vec{CO}^2$ 取得最小值 1,

故 $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ 的最小值为 $1 - 4 = -3$.

故选 C.

【标注】【知识点】数量积的最值问题

10. 已知 a 为实数, i 为虚数单位, 若复数 $z = (a^2 - 1) + (a + 1)i$ 为纯虚数, 则 $\left| \frac{a + i^{2020}}{1 + i} \right| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 ∵ z 为纯虚数,

$$\therefore \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a + 1 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore \left| \frac{a + i^{2020}}{1 + i} \right| = \left| \frac{1 + (i^4)^{505}}{1 + i} \right| = \left| \frac{2}{1 + i} \right| = \left| \frac{2(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \right| = |1 - i| = \sqrt{2}.$$

故答案为: $\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】复数中的周期问题; 复数的四则运算综合; 复数的乘法和除法; 复数的模; 复数的基本概念

11. 若 $\left(x + \frac{a}{\sqrt[3]{x}} \right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数为 -488 , 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】 二项式 $\left(x + \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$,

展开式通项为

$$T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} \left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^r$$

$$= C_8^r a^r x^{8-\frac{4r}{3}},$$

$$\text{令 } 8 - \frac{4r}{3} = 4,$$

可得 $r = 3$,

由题意 $\left(x + \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数为 $C_8^3 a^3 = -488$,

得 $a = -2$.

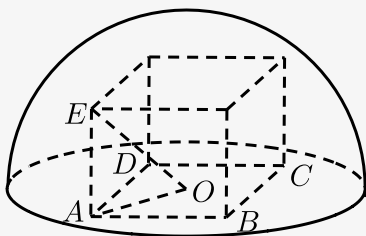
【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

12. 已知一个体积为8的正方体内接于半球体，即正方体的上底面的四个顶点在球面上，下底面的四个顶点在半球体的底面圆内，则该半球体的体积为 _____ .

【答案】 $4\sqrt{6}\pi$

【解析】 由题意，底面正方形 $ABCD$ 的中心 O ，即为半球的球心，

连接 OA ， OE ，如图：



则半球的半径为 EO ，

$\because$ 正方体的体积为8，

$\therefore$ 该正方体的棱长为2，正方形 $ABCD$ 的对角线长为 $2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore AO = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

又 $EA = 2$ ，

$$\therefore EO = \sqrt{EA^2 + AO^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6},$$

$$\text{该半球体的体积为 } \frac{2}{3}\pi \cdot EO^3 = \frac{2}{3}\pi (\sqrt{6})^3 = 4\sqrt{6}\pi.$$

故答案为： $4\sqrt{6}\pi$.

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题

13. 函数 $f(x) = x \ln x + a$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线被圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 截得弦长为 2, 则实数 a 的值为 _____.

【答案】-6或2

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = x \ln x + a$,

$$f'(x) = \ln x + 1, f'(1) = \ln 1 + 1 = 1, f(1) = a,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处切线为 $y = x - 1 + a$,

$$\therefore \text{圆 } C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0, (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9,$$

由题意, 圆心 $C(1, -2)$ 到直线 $y = x - 1 + a$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,

$$\therefore 2\sqrt{2} = \frac{|1 + 2 - 1 + a|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2+a|}{\sqrt{2}}, \text{ 即 } |2+a| = 4, \text{ 解得 } a = -6 \text{ 或 } a = 2.$$

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题

14. 若 $x > 0, y > 0$, 且 $\log_2 3^x + \log_2 9^y = \log_4 81$, 则此时 $x + 2y =$ _____, $\frac{2}{x} + \frac{x+3y}{3y}$ 的最小值为 _____.

【答案】2; $\frac{2\sqrt{6}+6}{3}$

【解析】 $\because \log_2 3^x + \log_2 9^y = \log_2 (3^x \cdot 9^y) = \log_2 (3^{x+2y}) = (x+2y)\log_2 3$,

$$\log_4 81 = \log_2 9 = 2\log_2 3, \therefore x + 2y = 2,$$

$$\therefore x + 2y = 2,$$

$$\therefore \frac{2}{x} + \frac{x+3y}{3y} = \frac{2}{x} + \frac{2+y}{3y} = \frac{1}{1-y} + \frac{2}{3y} + \frac{1}{3},$$

$$\therefore x + 2y = 2, x > 0, y > 0,$$

$$\therefore 0 < x < 2, 0 < y < 1,$$

$$\therefore 1 - y > 0,$$

$$\therefore 1 - y + y = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{1-y} + \frac{2}{3y} = \left(\frac{1}{1-y} + \frac{2}{3y} \right) (1-y+y) = \frac{y}{1-y} + \frac{2(1-y)}{3y} + \frac{2}{3} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{5}{3}$$

,

当且仅当 $\frac{y}{1-y} = \frac{2(1-y)}{3y}$ 时取等号, 故

$$\frac{2}{x} + \frac{x+2y}{3y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{6}+6}{3},$$

即 $\frac{2}{x} + \frac{x+3y}{3y}$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{6}+6}{3}$.

【标注】【素养】逻辑推理；数学运算

【知识点】利用基本不等式求最值；解对数方程

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x \in [-2, 0] \\ 2f(x-2), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$, 则 $3^{\log_{f(3)} 256} = \underline{\hspace{2cm}}$; 若方程 $f(x) = x + a$ 在区间 $[-2, 4]$ 有三个不等实根, 则实数 $\frac{1}{a}$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

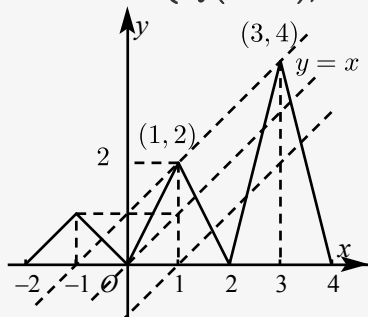
【答案】 $81; \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$

【解析】 1 :

$$f(3) = 2f(3-2) = 2f(1) = 2[2f(1-2)] = 4f(-1) = (1 - |-1+1|) \cdot 4 = 4 ,$$

$$\therefore 3^{\log_4 256} = 3^{\log_4 4^4} = 3^4 = 81 .$$

2 : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x \in [-2, 0] \\ 2f(x-2), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$, 图象如下 ,



如图, 当 $y = x + 1$ 与 $y = 1 - |x + 1|$ 恰与三个交点,

$$\therefore a = 1, \frac{1}{a} = 1 ,$$

当直线过 $(2, 0)$ 时, $y = x + a \Rightarrow 0 = 2 + a \Rightarrow$ 解得 $a = -2, \frac{1}{a} = -\frac{1}{2} ,$

此时 $y = x - 2$ 与 $y = 1 - |x + 1|$ 恰有 2 个交点,

$$\text{故 } \frac{1}{a} \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{1\} .$$

【标注】【知识点】函数零点的概念；已知零点情况求参数的取值范围；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；分段函数；函数求值问题