裂项练习

1. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_n>0$且$a_1a_3=36$，$a_3+a_4=9(a_1+a_2)$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）若$S_n+1=3^{b_n}$，求数列$\{b_n\}$及数列$\{a_nb_n\}$的前n项和T_n．

（3）设$c_n=\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，求$\{c_n\}$的前$n$项和$P_n$．

【答案】（1）$a_n=2\times 3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$．

（2）$T_n=\dfrac{(2n-1)\times 3^n}{2}+\dfrac{1}{2}$．

（3）$P_n=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{4\times 3^n+2}$．

【解析】（1）由题意得：$a_3+a_4=9(a_1+a_2)$，可得$(a_1+a_2)q^2=9(a_1+a_2)$，$q^2=9$，

由$a_n>0$，可得$q=3$，由$a_1a_3=36$，可得$a_1a_1q^2=36$，可得$a_1=2$，

可得$a_n=2\times 3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$．

（2）由$a_n=2\times 3^{n-1}$，可得$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$，

由$S_n+1=3^{b_n}$，可得$3^n-1+1=3^{b_n}$，可得$b_n=n$，

可得$\{a_nb_n\}$的通项公式：$a_nb_n=2n\times 3^{n-1}$，

可得$T_n=2\times 3^0+2\times 2\times 3^1+2\times 3\times 3^2+\cdots+2\times(n-1)\times 3^{n-2}+2\times n\times 3^{n-1}$①，

$3T_n=2\times 3^1+2\times 2\times 3^2+2\times 3\times 3^3+\cdots+2\times(n-1)\times 3^{n-1}+2\times n\times 3^n$②，

①−②可得

$-2T_n=2+2\times\dfrac{3\left(3^{n-1}-1\right)}{3-1}-2\times n\times 3^n=2+3^n-3-2n\times 3^n=(1-2n)\times 3^n-1$，

可得$T_n=\dfrac{(2n-1)\times 3^n}{2}+\dfrac{1}{2}$．

（3）由$c_n=\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，可得

$c_n=\dfrac{2\times 3^{n-1}}{(2\times 3^{n-1}+1)(2\times 3^n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\times 3^{n-1}+1}-\dfrac{1}{2\times 3^n+1}\right)$，

可得$P_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{19}+\cdots+\dfrac{1}{2\times 3^{n-1}+1}-\dfrac{1}{2\times 3^n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2\times 3^n+1}\right)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{4\times 3^n+2}$．

【标注】【知识点】错位相减法求和；裂项相消法求和

2. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2(S_n+n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，令$b_n=a_n+1$．

（1）求证：$\{b_n\}$是等比数列．

（2）记数列$\{nb_n\}$的前n项和为T_n，求T_n．

（3）求证：$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times3^n}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{11}{16}$．

【答案】（1）证明见解析．

（2）$T_n=\frac{2n-1}{4}\times3^{n+1}+\frac{3}{4}$．

（3）证明见解析．

【解析】（1）$a_1=2$，$a_{n+1}=2(S_n+n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore a_2=2\times(2+1+1)=8$，

$n\geqslant2$时，$a_n=2(S_{n-1}+n)$，相减可得：$a_{n+1}=3a_n+2$，

变形为：$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，$n=1$时也成立，

令$b_n=a_n+1$，则$b_{n+1}=3b_n$，

$\therefore\{b_n\}$是等比数列，首项为3，公比为3．

（2）由（1）可得：$b_n=3^n$，

$\therefore$数列$\{nb_n\}$的前n项和$T_n=3+2\times3^2+3\times3^3+\ldots+n\cdot3^n$，

$3T_n=3^2+2\times3^3+\ldots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1}$，

$\therefore-2T_n=3+3^2+\ldots+3^n-n\cdot3^{n+1}$

$=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot3^{n+1}$

$=\frac{1-2n}{2}\times3^{n+1}-\frac{3}{2}$，

解得$T_n=\frac{2n-1}{4}\times3^{n+1}+\frac{3}{4}$．

（3）$\because b_n=3^n=a_n+1$，解得$a_n=3^n-1$，

由$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{3^k-1}>\frac{1}{3^k}$，

$\therefore\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}>\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}$

$$=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}$$，因此左边不等式成立，

又由$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{3^k-1}$

$$=\frac{3^{k+1}-1}{(3^k-1)(3^{k+1}-1)}<\frac{3^{k+1}}{(3^k-1)(3^{k+1}-1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^k-1}-\frac{1}{3^{k+1}-1}\right),$$

可得

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1}\right)+\left(\frac{1}{3^3-1}-\frac{1}{3^4-1}\right)\ldots+\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)<\frac{11}{16}$$，因此右边不等式成立．

综上可得：$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{11}{16}$．

【标注】【知识点】错位相减法求和；裂项相消法求和

3. 已知等比数列$\{a_n\}$是递减数列，$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$\frac{1}{a_1}$，$2S_2$，$8a_3$成等差数列，$3a_2=a_1+2a_3$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，满足$T_n=n^2+n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式：

（2）若$c_n=\begin{cases}a_nb_n, n\text{ 是奇数}\\ \frac{(3n+8)a_n}{b_nb_{n+2}}, n\text{ 是偶数}\end{cases}$，求$\sum\limits_{i=1}^{2n}c_i$．

【答案】（1）$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$；$b_n=2n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（2）$\frac{169}{72}-\left(\frac{8}{3}n+\frac{20}{9}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2}$．

【解析】（1）$\because$等比数列$\{a_n\}$是递减数列，

$\therefore$设数列$\{a_n\}$的公比为q（$a_1>0$，$0<q<1$或$a_1<0$，$q>1$），

$\because\frac{1}{a_1}$，$2S_2$，$8a_3$成等差数列，

$\therefore 2\times 2S_2=\frac{1}{a_1}+8a_3$，

$\Rightarrow 4(a_1+a_2)=\frac{1}{a_1}+8a_3\Rightarrow 4(a_1+a_1q)=\frac{1}{a_1}+8a_1q^2$

$\Rightarrow 8a_1^2q^2-4a_1^2q-4a_1^2+1=0$①，

$3a_2=a_1+2a_3\Rightarrow 2q^2-3q+1=0$②，

联立①②得$a_1=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$或$a_1=-\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$（舍）或$q=1$（舍），

$\therefore a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$，

即$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n \in \mathbf{N}^*$.

①$n = 1$时，$b_1 = T_1 = 2$.

②$n \geqslant 2$时，

$\because T_n = n^2 + n$，$n \in \mathbf{N}^*$，

$\therefore T_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1)$，$n \geqslant 2$且$n \in \mathbf{N}^*$，

$\therefore b_n = T_n - T_{n-1} = 2n$，$n \geqslant 2$且$n \in \mathbf{N}^*$满足$b_1$，

$\therefore b_n = 2n$，$n \in \mathbf{N}^*$.

（2）由（1）知，$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$，$b_n = 2n$，

$$\therefore c_n = \begin{cases} 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, n\text{ 为奇数} \\ \dfrac{(3n+8)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4n(n+2)} = \dfrac{(3n+8)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n(4n+8)} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{n+2}, n\text{ 为偶数} \end{cases},$$

当n为偶数时，

记$N = c_2 + c_4 + \cdots + c_{2n}$

$$= \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4}\right] + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6}\right] + \cdots + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{2n} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2}\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{8} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2}.$$

当n为奇数时，

记$M = c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + (4n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$ ①，

则$\frac{1}{4}M = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + (4n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ ②，

①−②得$\frac{3}{4}M = 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

$-(4n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$，

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - (4n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 1$$

$$= 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right] - (4n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 1$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{4} - 1} - (4n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 1$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n - (4n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}.$$

$$\therefore M = \frac{20}{9} - \frac{32}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{4}{3}(4n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1},$$

$$= \frac{20}{9} - \left(\frac{8}{3}n + \frac{20}{9}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{2n} c_i = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2n} = M + N$$

$$= \frac{169}{72} - \left(\frac{8}{3}n + \frac{20}{9}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2}.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 2$，$a_{n+1} - 2a_n = 2^{n+1}$（$n \in \mathbf{N}^*$）.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）设$b_n = \dfrac{n+2}{n \cdot a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

【答案】（1）$a_n = n \cdot 2^n$．

（2）$T_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$．

【解析】（1）由$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = 1$，且$\dfrac{a_1}{2} = 1$，

可知$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$以1为首项1为公差的等差数列，

即$\dfrac{a_n}{2^n} = n$，

$a_n = n \cdot 2^n$．

（2）裂项得$b_n = \dfrac{n+2}{n \cdot a_{n+1}}$

$= \dfrac{n+2}{n \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}}$

$= \dfrac{(n+2) \cdot 2^n}{n \cdot 2^n \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}}$

$= \dfrac{1}{n \cdot 2^n} - \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$

$= \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}$，

故所求$T_n = \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3} + L + \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$．

【标注】【知识点】裂项相消法求和

5. 已知$a_n = n$，$b_n = 3^n$．

（1）若$c_{n+1}=2c_n+a_n+b_n$，$c_1=3$，求$\{c_n\}$的通项公式．

（2）若$t_n=\dfrac{2(1-4n)b_n}{a_na_{n+2}}$，求$\{t_n\}$的前$n$项和$T_n$．

【答案】（1）$c_n=2^n+3^n-n-1$．

（2）$T_n=\dfrac{15}{2}-\dfrac{3^{n+1}}{n+1}-\dfrac{3^{n+2}}{n+2}$．

【解析】（1）$c_{n+1}=2c_n+n+3^n$，

$\Rightarrow c_{n+1}+n+1=2(c_n+n)+3^n+1$，

令$d_n=c_n+n$，

则有$d_{n+1}=2d_n+3^n+1$，

$\Rightarrow d_{n+1}-3^{n+1}=2d_n+3^n-3^{n+1}+1$

$=2(d_n+3^n)+1$，

令$e_n=d_n-3^n$，

则$e_{n+1}=2e_n+1$，

$e_{n+1}+1=2(e_n+1)=2^n(e_1+1)$，

故$e_{n+1}=2^{n+1}-1$，$e_n=2^n-1$，

反推$d_n=e_n+3^n=2^n+3^n-1$，

$c_n=d_n-n=2^n+3^n-n-1$．

（2）$t_n=\dfrac{2(1-4n)3^n}{n(n+2)}=\dfrac{(1-4n)3^n}{n}-\dfrac{(1-4n)3^n}{n+2}$

$=\dfrac{3^n}{n}-4\cdot3^n+\dfrac{4n-1}{n+2}\cdot3^n$

$=\dfrac{3^n}{n}-4\cdot3^n+\dfrac{4(n+2)-9}{n+2}\cdot3^n$

$=\dfrac{3^n}{n}-4\cdot3^n+4\cdot3^n-\dfrac{9}{n+2}\cdot3^n$

$=\dfrac{3^n}{n}-\dfrac{3^{n+2}}{n+2}$，

故$T_n=\left(\dfrac{3^1}{1}-\dfrac{3^3}{3}\right)+\left(\dfrac{3^2}{2}-\dfrac{3^4}{4}\right)+\left(\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{3^5}{5}\right)+\cdots$

$+\left(\dfrac{3^{n-1}}{n-1}-\dfrac{3^{n+1}}{n+1}\right)+\left(\dfrac{3^n}{n}-\dfrac{3^{n+2}}{n+2}\right)$

$=\dfrac{3}{1}+\dfrac{3^2}{2}-\dfrac{3^{n+1}}{n+1}-\dfrac{3^{n+2}}{n+2}$

$=\dfrac{15}{2}-\dfrac{3^{n+1}}{n+1}-\dfrac{3^{n+2}}{n+2}$．

【标注】【知识点】裂项相消法求和

6. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$．

（1）设$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式．

（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n．

（3）记$c_n=\dfrac{(-1)^n(n^2+4n+2)2^n}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$．

【答案】（1）$b_n=n$．

（2）$S_n=(n-1)2^{n+1}+2$．

（3）$T_n=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{(n+4)(-1)^{n+1}}{3(n+1)\cdot 2^{n+1}}$．

【解析】（1）数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$，

可得$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+1$，

设$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，数列$\{b_n\}$是等差数列，公差为1，首项为1，

$\therefore b_n=n$．

（2）易得$a_n=n\cdot 2^n$，其前n项和：$S_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n\cdots①$，

$2S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n+1}\cdots②$，

②−①可得：$S_n=-1-2^2-2^3-\cdots-2^n+n\cdot 2^{n+1}$，

$\therefore S_n=(n-1)2^{n+1}+2$．

（3）$c_n=\dfrac{(-1)^n(n^2+4n+2)2^n}{n\cdot 2^n\cdot(n+1)2^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n(n^2+4n+2)}{n\cdot(n+1)2^{n+1}}$

$$=\frac{(-1)^n[n^2+n+2(n+1)+n]}{n\cdot(n+1)2^{n+1}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}+(-1)^n\left[\frac{1}{n\cdot 2^n}+\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left[\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}-\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right],$$

$$T_n=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$+\left[\left(\frac{-1}{1\cdot 2^1}-\frac{(-1)^2}{2\cdot 2^2}\right)+\left(\frac{(-1)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(-1)^3}{3\cdot 2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}-\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right)\right]$$

$$=-\frac{2}{3}-\frac{(n+4)(-1)^{n+1}}{3(n+1)\cdot 2^{n+1}}.$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；分组法求和；错位相减法求和

7. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$6S_n=3^{n+1}+a$（$a\in\mathbf{N}^+$）．

（1）求a的值及数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）设$b_n=\dfrac{(-1)^{n-1}(2n^2+2n+1)}{(\log_3 a_n+2)^2(\log_3 a_n+1)^2}$，求$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

【答案】（1）$a_n=3^{n-1}$．

（2）$T_n=1+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n+1)^2}$．

【解析】（1）$\because$等比数列$\{a_n\}$满足$6S_n=3^{n+1}+a$（$a\in\mathbf{N}^+$），

$\therefore$当$n=1$时，$6a_1=9+a$；

当$n\geqslant 2$时，$6a_n=6(S_n-S_{n-1})=2\times 3^n$．

$\therefore a_n=3^{n-1}$，

$\because n=1$时也成立，$\therefore 1\times 6=9+a$，解得$a=-3$，

$\therefore a_n=3^{n-1}$．

（2）$b_n=\dfrac{(-1)^{n-1}(2n^2+2n+1)}{(\log_3 a_n+2)^2(\log_3 a_n+1)^2}$

$=\dfrac{(-1)^{n-1}(2n^2+2n+1)}{n^2(n+1)^2}$

$=(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$．

当n为奇数时，$T_n=\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}\right)-\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$

$=1+\dfrac{1}{(n+1)^2}$；

当n为偶数时，$T_n=\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}\right)-\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots-\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$

$=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$．

综上，$T_n=1+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n+1)^2}$．

【标注】【知识点】裂项相消法求和

8. 已知数列$\{a_n\}$为单调递增数列，S_n为其前n项和，$2S_n = a_n^2 + n$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式．

（2）若$b_n = \dfrac{a_{n+2}}{2^{n+1} \cdot a_n \cdot a_{n+1}}$，$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，证明：$T_n < \dfrac{1}{2}$．

【答案】（1）$a_n = n$．

（2）证明见解析．

【解析】（1）当$n = 1$时，$2S_1 = 2a_1 = a_1^2 + 1$，

所以$(a_1 - 1)^2 = 0$，即$a_1 = 1$，

又$\{a_n\}$为单调递增数列，所以$a_n \geqslant 1$．

由$2S_n = a_n^2 + n$得$2S_{n+1} = a_{n+1}^2 + n + 1$，

所以$2S_{n+1} - 2S_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 + 1$，

整理得$2a_{n+1} = a_{n+1}^2 - a_n^2 + 1$，

所以$a_n^2 = (a_{n+1} - 1)^2$．

所以$a_n = a_{n+1} - 1$，

即$a_{n+1} - a_n = 1$，

所以$\{a_n\}$是以1为首项，1为公差的等差数列，所以$a_n = n$．

（2）$b_n = \dfrac{a_{n+2}}{2^{n+1} \cdot a_n \cdot a_{n+1}} = \dfrac{n+2}{2^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)}$

$= \dfrac{1}{n \cdot 2^n} - \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$，

所以$T_n = \left(\dfrac{1}{1 \times 2^1} - \dfrac{1}{2 \times 2^2}\right) + \left(\dfrac{1}{2 \times 2^2} - \dfrac{1}{3 \times 2^3}\right) + \cdots$

$+ \left[\dfrac{1}{n \cdot 2^n} - \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}\right]$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} < \dfrac{1}{2}$．

【标注】【知识点】裂项相消法求和；构造等差数列求通项；消去Sn构造an递推关系

9. 设$\{a_n\}$是等比数列，公比大于0，$\{b_n\}$是等差数列，$(n \in \mathbf{N}^*)$．已知$a_1 = 1$，$a_3 = a_2 + 2$，$a_4 = b_3 + b_5$，$a_5 = b_4 + 2b_6$．

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

（2）设数列$\{c_n\}$满足$c_1=c_2=1$，$c_n=\begin{cases}1,3^k<n<3^{k+1}\\a_k,n=3^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$．

① 求数列$\{b_{3^n}(c_{3^n}-1)\}$的通项公式．

② 若$\left\{\dfrac{na_n}{(n+1)(n+2)}\right\}(n\in\mathbf{N}^*)$的前$n$项和$T_n$，求$T_{3n}+\sum\limits_{i=1}^{3^n}b_ic_i(n\in\mathbf{N}^*)$．

【答案】（1）$a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（2）① $b_{3^n}(c_{3^n}-1)=3\times6^{n-1}-3^n$．

② $\dfrac{8^n}{3n+2}+\dfrac{6^{n+1}+4}{10}+\dfrac{9^n-2\times3^n}{2}$．

【解析】（1）由题意，设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

则$a_2=q$，$a_3=q^2$，

则$q^2-q-2=0$，

解得$q=-1$（舍去），或$q=2$，

$\therefore a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，则

由$a_4=b_3+b_5$，

可得$b_1+3d=4$，

由$a_5=b_4+2b_6$，

可得$3b_1+13d=16$，

联立$\begin{cases}b_1+3d=4\\3b_1+13d=16\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b_1=1\\d=1\end{cases}$，

$\therefore b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（2）① 由（1），可知

$$c_n=\begin{cases}1,3^k<n<3^{k+1}\\a_k,n=3^k\end{cases}=\begin{cases}1,3^k<n<3^{k+1}\\2^{k-1},n=3^k\end{cases},$$

$\therefore b_{3^n}(c_{3^n}-1)=b_{3^n}(a_n-1)=3^n\left(2^{n-1}-1\right)=3\times6^{n-1}-3^n$．

② 由题意，可得

$$\frac{na_n}{(n+1)(n+2)}=\frac{n\times2^{n-1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^n}{n+2}-\frac{2^{n-1}}{n+1},$$

$$\text{则}T_n=\frac{2^1}{3}-\frac{2^0}{2}+\frac{2^2}{4}-\frac{2^1}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n+2}-\frac{2^{n-1}}{n+1}$$
$$=\frac{2^n}{n+2}-\frac{1}{2}\text{，}$$
$$\therefore T_{3n}=\frac{2^{3n}}{3n+2}-\frac{1}{2}=\frac{8^n}{3n+2}-\frac{1}{2}\text{，}$$
$$\because\sum_{i=1}^{3^n}b_ic_i=\sum_{i=1}^{3^n}[b_i(c_i-1)+b_i]$$
$$=\sum_{i=1}^{3^n}b_i(c_i-1)+\sum_{i=1}^{3^n}b_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}b_{3^i}(c_{3^i}-1)+\sum_{i=1}^{3^n}b_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(3\times6^{i-1}-3^i)+\sum_{i=1}^{3^n}i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}3\times6^{i-1}-\sum_{i=1}^{n}3^i+\sum_{i=1}^{3^n}i$$
$$=\frac{3\times(1-6^n)}{1-6}-\frac{3\times(1-3^n)}{1-3}+\frac{(1+3^n)\times3^n}{2}$$
$$=\frac{3\times(6^n-1)}{5}-\frac{3\times(3^n-1)}{2}+\frac{(1+3^n)\times3^n}{2}$$
$$=\frac{6^{n+1}+9}{10}+\frac{3^{2n}-2\times3^n}{2}\text{，}$$
$$\therefore T_{3n}+\sum_{i=1}^{3^n}b_ic_i=\frac{8^n}{3n+2}-\frac{1}{2}+\frac{6^{n+1}+9}{10}+\frac{3^{2n}-2\times3^n}{2}$$
$$=\frac{8^n}{3n+2}+\frac{6^{n+1}+4}{10}+\frac{9^n-2\times3^n}{2}\text{．}$$

【标注】【知识点】等比数列求和问题；裂项相消法求和

10. 正项数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：$S_n^2-\left(n^2+n-1\right)S_n-\left(n^2+n\right)=0$，

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

（2）令$b_n=\dfrac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$．证明：对于任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$T_n<\dfrac{5}{64}$．

【答案】（1）$a_n=2n$．

（2）见解析

【解析】（1）由$S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$，

得$[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$．

由于数列$\{a_n\}$是正项数列，所以$S_n>0, S_n=n^2+n$．

于是$a_1=S_1=2$，当$n\geqslant 2$时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-n(n-1)=2n$．

综上可知，数列$\{a_n\}$的通项$a_n=2n$．

（2）由于$a_n=2n$，$b_n=\dfrac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$，

则$b_n=\dfrac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\dfrac{1}{16}\left[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right]$．

$T_n=\frac{1}{16}\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$

$<\dfrac{1}{16}\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)=\dfrac{5}{64}$．

【标注】【知识点】利用Sn与an的关系求通项；裂项相消法求和

11．已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_2^2=a_3+a_4$，数列$\{b_n\}$满足：$b_1=a_1$，$nb_{n+1}-(n+1)b_n=-n(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）求证：数列$\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$为等差数列，并求$\{b_n\}$前$n$项和的最大值．

（3）求$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3b_k}{a_{k+1}}$．

【答案】（1）$a_n=3\cdot 2^{n-1}$．

（2）证明见解析，10．

（3）$2+\dfrac{n^2-2}{2^n}$．

【解析】（1）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

由$a_1=3$，$a_2^2=a_3+a_4$，可得$9q^2=3q^2+3q^3$，

解得$q=2$，

所以$a_n=3\cdot 2^{n-1}$．

（2）由$nb_{n+1}-(n+1)b_n=-n(n+1)$，得$\dfrac{b_{n+1}}{n+1}-\dfrac{b_n}{n}=-1$，

又$\dfrac{b_1}{1}=3$，

所以数列$\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$是首项为3，公差为$-1$的等差数列．

所以$\frac{b_n}{n}=3-(n-1)=4-n$，

所以$b_n=4n-n^2$，

依题意有$\begin{cases}b_n=4n-n^2\geqslant 0\\ b_{n+1}=4(n+1)-(n+1)^2\leqslant 0\end{cases}$，

解得$3\leqslant n\leqslant 4$，所以当$n=3$或4时，$\{b_n\}$前n项和取最大值，最大值为10．

（3）因为$\frac{3b_k}{a_{k+1}}=\frac{3(4k-k^2)}{3\cdot 2^k}=\frac{4k-k^2}{2^k}=\frac{k^2}{2^k}-\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}}$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3b_k}{a_{k+1}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k^2}{2^k}-\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}}\right]$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k^2}{2^k}-\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}\right]+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$

$=\frac{n^2}{2^n}+2-\frac{2}{2^n}=2+\frac{n^2-2}{2^n}$．

【标注】【知识点】裂项相消法求和；分组法求和；数列中最大项与最小项的求解问题；等差数列的判定（涉及新数列构造）；等比数列求通项问题

12. 已知等差数列$\{a_n\}$，等比数列$\{b_n\}$，$a_4=b_1=2$，$a_5=3(a_4-a_3)$，$b_4=4(b_3-b_2)$．

（1）求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

（2）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，试比较$a_{n+1}\cdot a_n$与$2S_{n+1}$的大小．

（3）$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$c_n=\begin{cases}-\frac{(3a_n+2)(a_n-2)}{b_n}, n\text{ 为偶数}\\ \frac{a_{n+2}}{b_n}, n\text{ 为奇数}\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和．

【答案】（1）$a_n=n-2$，$b_n=2^n$．

（2）$a_{n+1}\cdot a_n<2S_{n+1}$．

（3）$\frac{10}{9}-\frac{6n+5}{18\times 4^{n-1}}+\frac{n^2}{4^{n-1}}$．

【解析】（1）$\begin{cases}a_1+3d=2\\ a_1+4d=3d\end{cases}$，则$\begin{cases}a_1=-1\\ d=1\end{cases}$，故$a_n=n-2$，

又$b_1q^3=4b_1(q^2-q)$，则$q^2-4q+4=0$，

$\therefore q=2$，故$b_n=2^n$．

（2）由（1）解：$a_{n+1}\cdot a_n=(n-2)(n-1)=n^2-3n+2$，

又$2S_{n+1}=(n+1)(n-2)=n^2-n-2$，

$a_{n+1}\cdot a_n-2S_{n+1}=-2n+4$，

当$n \leqslant 2$时，$a_{n+1} \cdot a_n \geqslant 2S_{n+1}$，

当$n \geqslant 3$时，$a_{n+1} \cdot a_n < 2S_{n+1}$．

（3）当n为奇数时，$c_n = \dfrac{n}{2^n}$，

当n为偶数时，$c_n = -\dfrac{(3n-4)(n-4)}{2^n} = \dfrac{-3n^2+16n-16}{2^n} = \dfrac{n^2}{2^n} - \dfrac{(n-2)^2}{2^{n-2}}$，

对于任意正整数n，有

$\sum\limits_{k=1}^{n} c_{2k-1} = c_1 + c_3 + \cdots + c_{2k-1} = \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$，①，

$\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n} c_{2k-1} = \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n-3}{2^{2n-1}} + \dfrac{2n-1}{2^{2n+1}}$，②，

①−②得$\dfrac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{n} c_{2k-1}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^3} + \cdots + \dfrac{2}{2^{2n-1}} - \dfrac{2n-1}{2^{2n+1}} = \dfrac{1-\dfrac{1}{4^n}}{1-\dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{2n-1}{2^{2n+1}}$

$= \dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3 \cdot 4^n} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{2n-1}{2 \cdot 4^n} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{8+6n-3}{6 \cdot 4^n}$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{n} c_{2k-1} = \dfrac{10}{9} - \dfrac{6n+5}{18 \times 4^{n-1}}$以及

$\sum\limits_{i=1}^{n} c_{2i} = c_2 + c_4 + \cdots + c_{2i} = \dfrac{2^2}{2^2} - \dfrac{0^2}{2^0} + \dfrac{4^2}{2^4} - \dfrac{2^2}{2^2} + \cdots + \dfrac{(2n)^2}{2^{2n}} - \dfrac{(2n-2)^2}{2^{2n-2}}$

$= \dfrac{4n^2}{4^n} = \dfrac{n^2}{4^{n-1}}$，

因此，$\sum\limits_{k=1}^{2n} c_k = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} c_{2k} = \dfrac{10}{9} - \dfrac{6n+5}{18 \times 4^{n-1}} + \dfrac{n^2}{4^{n-1}}$，

$\sum\limits_{k=1}^{2n} c_k = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} c_{2k} = \dfrac{4^n}{2n+1} - \dfrac{6n+5}{9 \times 4^n} - \dfrac{4}{9}$，

所以，数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为$\dfrac{10}{9} - \dfrac{6n+5}{18 \times 4^{n-1}} + \dfrac{n^2}{4^{n-1}}$．

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；等差数列求和问题；利用方程组求等差数列；错位相减法求和；分组法求和