

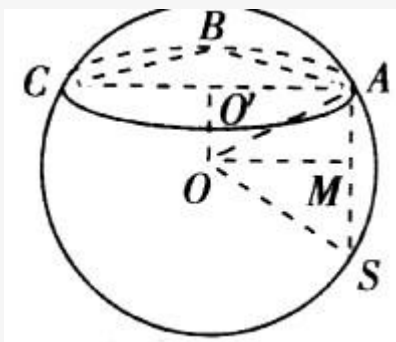
立体几何选填

1. 若三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上， $SA \perp$ 平面 ABC ，
 $SA = 2\sqrt{3}$ ， $AB = 1$ ， $AC = 2$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，则球 O 的表面积为_____.

【答案】 16π

【解析】

$\because AB = 1$ ， $AC = 2$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\therefore BC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \cos 60^\circ = 3$ ， $\therefore BC = \sqrt{3}$ ，
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形.



$\because$ 三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上， $\therefore$ 斜边 AC 的中点是截面小圆的圆心 O' ，即小圆的半径 $r = \frac{1}{2}AC = 1$. $\because OA$ ， OS 是半径， $\therefore \triangle AOS$ 为等腰三角形，过 O 作 $OM \perp SA$ ，则 M 为中点， $\therefore OO' = AM = \frac{1}{2}SA = \sqrt{3}$ ， $\therefore$ 球半径 $R = \sqrt{OO'^2 + r^2} = 2$ ， $\therefore$ 球的表面积为 $4\pi R^2 = 16\pi$.

【标注】 【知识点】圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征；空间几何体的体积

2. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AP = AB = 2$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）.

A. $\frac{27}{2}\pi$

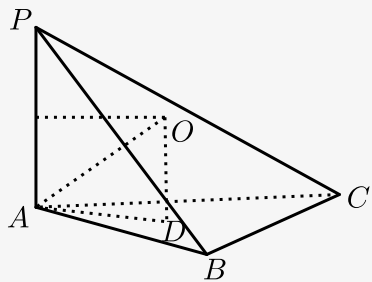
B. $\frac{28}{3}\pi$

C. $\frac{26}{3}\pi$

D. $\frac{25}{2}\pi$

【答案】 B

【解析】 如图所示：三棱锥 $P-ABC$ 中，



$PA \perp$ 平面 ABC ，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AP = AB = 2$ ，

$$\therefore AD = \frac{2}{3} \sqrt{2^2 - 1^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{外接球的半径 } r^2 = 1^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{21}{9},$$

$$\therefore S = 4\pi \times \frac{21}{9} = \frac{28\pi}{3}.$$

故选：B.

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的表面积

3. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上， $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形， SC 为球 O 的直径，且 $SC = 2$ ，则此棱锥的体积为（ ）.

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

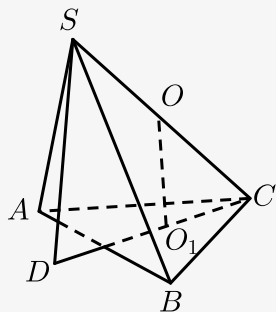
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】 A

【解析】 根据题意作出图形，如图，

设球心为 O ，过 A, B, C 三点的圆的圆心为 O_1 ，则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC ，

延长 CO_1 交球 O 于点 D ，连接 SD ，则 $SD \perp$ 平面 ABC 。



$$\therefore CO_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OO_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \text{三棱锥的高 } SD = 2OO_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$\therefore \triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore V_{S-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

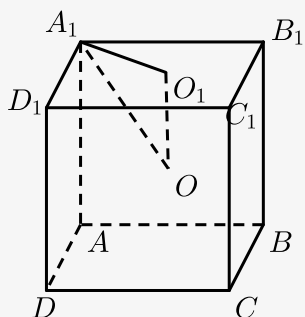
【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题

4. 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱（其底面是正方形，且侧棱垂直于底面）高为4，体积为16，则这个球的表面积是（ ）。

A. 16π B. 20π C. 24π D. 32π

【答案】 C

【解析】 如图所示：



由 $V = Sh$ ，可得 $S = 16 \div 4 = 4$ ，即正四棱柱底面边长为2，

由正四棱柱属于长方体，因此所求球的球心在该长方体的中心即球的直径为

$$\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}.$$

则球的半径为 $\sqrt{6}$ ，所以 $S_{\text{球}} = 4\pi \times (\sqrt{6})^2 = 24\pi$ 。

故选C。

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积；空间几何体的表面积

5. 在封闭的直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球。若 $AB \perp BC$ ， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ， $AA_1 = 3$ ，则 V 的最大值是（ ）。

A. 4π B. $\frac{9\pi}{2}$ C. 6π D. $\frac{32\pi}{3}$

【答案】 B

【解析】 方法一： $\triangle ABC$ 的内切圆的半径 $r = \frac{S}{\frac{1}{2}(6+8+10)} = 2$ ，

三棱柱的高为3，因此球的最大半径为 $R = \frac{3}{2}$ ， $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{9\pi}{2}$ 。

方法二：由题意可得若 V 最大，则球与直三棱柱的部分面相切，若与三个侧面都相切，可求得球的半径为2，球的直径为4，超过直三棱柱的高，

$\therefore$ 这个球放不进去，则球可与上、下底面相切，此时球的半径 $R = \frac{3}{2}$ ，该球的体积最大，

$$V_{\max} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times \frac{27}{8} = \frac{9\pi}{2}.$$

故选B。

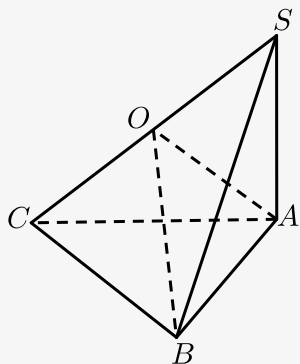
【标注】 【知识点】空间几何体的体积

6. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上， SC 是球 O 的直径，若平面 $SCA \perp$ 平面 SCB ， $SA = AC$ ， $SB = BC$ ，三棱锥 $S-ABC$ 的体积为9，则球 O 的表面积为 _____。

【答案】 36π

【解析】 令 $SO = AO = OB = R$ ，

$\therefore O$ 为 SC 中点， $SA = AC$ ， $SB = BC$ ，



$\therefore AO \perp SC$ ， $BO \perp SC$ ，

$\therefore SC \perp$ 平面 ABO ，

又 $\because$ 平面 $SCA \perp$ 平面 SCB ，平面 $SCA \cap$ 平面 $SCB = SC$ ， $SC \perp AO$ ，

$\therefore AO \perp$ 平面 SCB ，

$$\therefore V = \frac{1}{3} S_{\triangle SBC} \cdot OA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2R \times R \times R = 9，$$

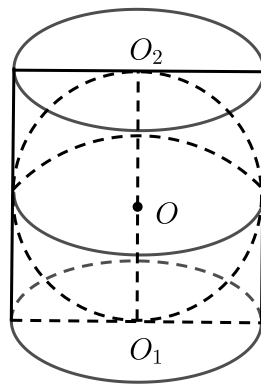
$\therefore R = 3$ ，

$$\therefore S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 9 = 36\pi.$$

【标注】 【知识点】空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题

7.

如图，在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O ，该球与圆柱的上、下底面及母线均相切．记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1 ，球 O 的体积为 V_2 ，则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值是_____．



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 设球 O 的半径为 R ，

$\because$ 球 O 与圆柱 O_1O_2 的上、下底面及母线均相切，

$\therefore$ 圆柱 O_1O_2 的高为 $2R$ ，圆柱 O_1O_2 的底面半径为 R ，

$$\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 \cdot 2R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2}.$$

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积

8. 已知底面边长为1，侧棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱柱的各顶点均在同一个球面上，则该球的体积为()

A. $\frac{32\pi}{3}$

B. 4π

C. 2π

D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】 D

【解析】 设该球的半径为 R ，由题意得 $2R = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ ， $\therefore R = 1$ ，

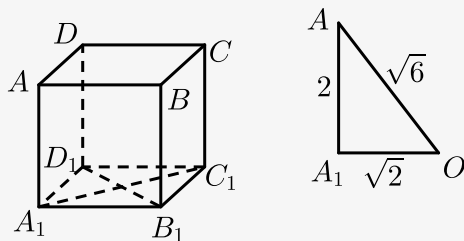
$$\therefore V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}, \text{ 故选：D.}$$

【标注】 【知识点】空间几何体的体积；圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为8，面 $A_1B_1C_1D_1$ 在一个半球的底面上， A 、 B 、 C 、 D 四个顶点都在此半球的球面上，则此半球的体积为_____．

【答案】 $4\sqrt{6}\pi$

【解析】



$V_{\text{正}} = 8$ ，有边长 $a = 2$ 。

$$AA_1 = 2, A_1O = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$AO = \sqrt{AA_1^2 + A_1O^2} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}.$$

$$V_{\frac{1}{2}\text{球}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot AO^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6} \\ = 4\pi\sqrt{6} = 4\sqrt{6}\pi.$$

【标注】 【知识点】 空间几何体的体积

10. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上，若 $AB = AC = 2$ ， $AA_1 = 3$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，则此球的表面积等于 _____。

【答案】 17π

$$\text{【解析】 } 2R = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17},$$

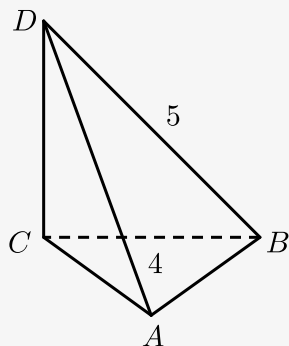
$$S = 4\pi R^2 = 17\pi.$$

【标注】 【知识点】 空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题

11. 在三棱锥 $D - ABC$ 中， $CD \perp$ 底面 ABC ， $AC \perp BC$ ， $AB = BD = 5$ ， $BC = 4$ ，则此三棱锥的外接球的表面积为 _____。

【答案】 34π

【解析】 如图， $\because CD \perp$ 底面 ABC ，



$$\therefore CD \perp CB, CD \perp CA,$$

$$\text{又 } AC \perp CB, AB = BD = 5, BC = 4,$$

$$\therefore DC = 3, AC = 3,$$

由三线垂直可知，三棱锥可看作长方体一角，

其外接球直径为长方体体对角线长，

$$\text{即 } 2R = \sqrt{9 + 9 + 16} = \sqrt{34},$$

$$\therefore s = 4\pi \times \frac{34}{4} = 34\pi,$$

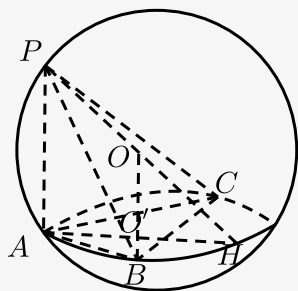
故答案为： 34π 。

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的表面积；组合体求体积、表面积问题

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 是边长为 2 的等边三角形， $PA \perp$ 平面 ABC ，且 $PA = 2$ ，则该三棱锥外接球的表面积为 _____。

【答案】 $\frac{28\pi}{3}$

【解析】 如图，



$PA \perp$ 平面 ABC ，连结 PO ，延长至圆上交于 H ，

过 O 作 $OO' \parallel PA$ 交平面 ABC 于 O' ，

则 $\triangle PAH$ 为 $\text{Rt}\triangle$ ，

$\therefore O$ 为斜边 PH 的中点，

$\therefore OO'$ 为 $\triangle PAH$ 的中位线， O' 为小圆圆心，则 O' 为 AH 的中点，则 $\frac{OO'}{PA} = \frac{O'H}{AH} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore O'H = AO' = \frac{2}{3} \sqrt{2^2 - 1^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, OO' = \frac{1}{2} PA = 1,$$

$$\text{则球的半径 } R = OH = \sqrt{OO'^2 + O'H^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3},$$

$$\text{球的表面积为 } 4\pi R^2 = \frac{28\pi}{3}.$$

【标注】 【知识点】空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题

13. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的6个顶点都在球 O 的球面上, $AB = 3$, $AC = 4$, $AB \perp AC$, $AA_1 = 12$, 则球 O 的表面积为 _____ .

【答案】 169π

【解析】 因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的6个顶点都在球 O 的球面上,

若 $AB = 3$, $AC = 4$, $AB \perp AC$, $AA_1 = 12$,

所以三棱柱的底面是直角三角形, 侧棱与底面垂直, 侧面 B_1BCC_1 , 经过球的球心, 球的直径是其对角线的长,

因为 $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, $BC_1 = 13$.

所以球的半径为 $r = \frac{13}{2}$.

$\therefore S = 4\pi r^2 = 169\pi$.

故答案为: 169π .

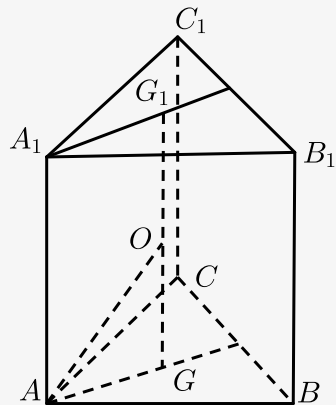
【标注】 【知识点】组合体求体积、表面积问题; 空间几何体的表面积; 空间几何体的内切球、外接球问题

14. 已知正三棱柱的所有顶点都在球 O 的球面上, 且该正三棱柱的底面边长为2, 高为 $\sqrt{3}$, 则球 O 的表面积为 _____ .

【答案】 $\frac{25\pi}{3}$

【解析】 由题意可知, 正三棱柱的底面中心的连线的中点就是外接球的球心,

底面中心到顶点的距离为 $r = \frac{2}{3} \times \sqrt{3}$.



正三棱柱的高为 $h = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 外接球的半径为 $R = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{12}}$,

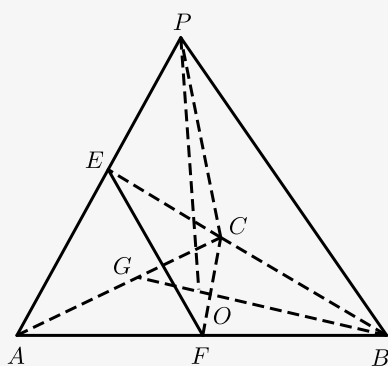
$$\therefore \text{外接球的表面积为: } S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{25}{12} = \frac{25\pi}{3}.$$

【标注】【知识点】空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF = 90^\circ$, 则球 O 的体积为 _____.

【答案】 $\sqrt{6}\pi$

【解析】如图, 由 $PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, 可知三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥,



则顶点 P 在底面的射影 O 为底面三角形的中心, 连接 BO 并延长, 交 AC 于点 G ,

则 $AC \perp BG$, 又 $PO \perp AC$, $PO \cap BG = O$,

可得 $AC \perp$ 平面 PBG , 则 $PB \perp AC$,

$\because E, F$ 分别是 PA, AB 的中点,

$\therefore EF \parallel PB$,

又 $\angle CEF = 90^\circ$, 即 $EF \perp CE$,

$\therefore PB \perp CE$, 得 $PB \perp$ 平面 PAC ,

$\therefore$ 正三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直,

把正三棱锥补形为正方体, 则正方体的外接球即为三棱锥的外接球,

其直径 $2R = \sqrt{PA^2 + PB^2 + PC^2} = \sqrt{6}$, 则球 O 的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \sqrt{6}\pi$.

故答案为: $\sqrt{6}\pi$.

【标注】【知识点】空间几何体的体积；空间几何体的内切球、外接球问题

16. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面, 各顶点都在同一球面上, 若该棱柱的体积为 $\sqrt{3}$, $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle BAC = 60^\circ$, 则此球的表面积等于 _____.

【答案】 8π

【解析】 $\because AB = 2, AC = 1, \angle BAC = 60^\circ,$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = 3,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\therefore V = S_{\triangle ABC} \cdot h,$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3}h, \text{ 解得 } h = 2.$$

取 AB, A_1B_1 的中点 D, D_1 ,

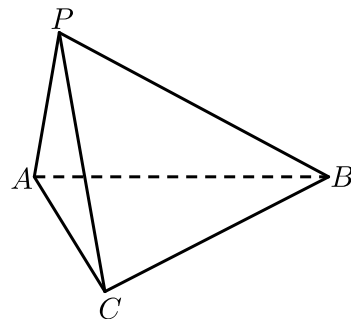
则球心 O 为 DD_1 的中点,

$$\therefore \text{外接球半径 } R = OB = \sqrt{OD^2 + DB^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore S = 4\pi R^2 = 8\pi.$$

【标注】 【知识点】 空间几何体的表面积

17. 在《九章算术》中, 将四个面都是直角三角形的三棱锥称为鳖臑. 如图, 若三棱锥 $P-ABC$ 为鳖臑, 侧棱 $PA \perp$ 底面 ABC , $AC \perp BC$, 且 $PA = 2, AC = 3, BC = 4$, 则该鳖臑的内切球的半径为 _____.



【答案】 $\frac{7 - \sqrt{13}}{6}$

【解析】 求解三棱锥的内切球的半径可以应用等体积法:

先求出四个表面的面积和整个三棱锥的体积, 再设出内切球的半径 r , 建立等式

$$V_{O-PAB} + V_{O-PBC} + V_{O-PCA} + V_{O-ABC} = V_{P-ABC},$$

$$\text{利用棱锥的体积公式可得 } r = \frac{3V_{P-ABC}}{S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCA} + S_{\triangle ABC}}.$$

由鳖臑性质知, $PC \perp CB$, $PC = \sqrt{13}$, $AB = 5$, $BP = \sqrt{29}$,

所以 $V_{\text{三棱锥 } P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PA = 4$, $S_{\triangle PBC} = 2\sqrt{13}$, $S_{\triangle PCA} = 3$, $S_{\triangle PAB} = 5$, 所以

$$\text{内切球的半径 } r = \frac{12}{14 + 2\sqrt{13}} = \frac{7 - \sqrt{13}}{6}.$$

【标注】 【知识点】 空间几何体的体积; 空间几何体的内切球、外接球问题

18. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 若四边形 AA_1C_1C 是边长为4的正方形, 且 $AB = 3$, $BC = 5$, M 是 AA_1 的中点, 则三棱锥 $A_1 - MBC_1$ 的体积为 _____ .

【答案】 4

【解析】 $\because$ 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,

四边形 AA_1C_1C 是边长为4的正方形, 且 $AB = 3$, $BC = 5$,

$\therefore A_1C_1 \perp AA_1$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$, $\therefore AC \perp AB$,

$\therefore A_1C_1 \perp A_1B_1$,

$\therefore AA_1 \cap A_1B_1 = A_1$,

$\therefore A_1C_1 \perp$ 平面 A_1MB ,

$\because M$ 是 AA_1 的中点,

$$\therefore S_{\triangle A_1MB} = \frac{1}{2} S_{\triangle AA_1B} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \right) = 3,$$

$\therefore$ 三棱锥 $A_1 - MBC_1$ 的体积:

$$V_{A_1-MBC_1} = V_{C_1-A_1MB} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle A_1MB} \times A_1C_1 = \frac{1}{3} \times 3 \times 4 = 4, \text{ 故答案为: } 4.$$

【标注】 【知识点】 空间几何体的体积; 等体积法; 组合体求体积、表面积问题

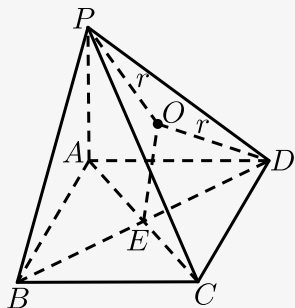
19. 四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 各顶点都在同一球面上, 若该棱锥的体积为4, $AB = 2$, 则此球的表面积等于 _____ .

【答案】 17π

【解析】 $\because PA \perp$ 面 $ABCD$,

$$V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} |PA| \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} |PA| \cdot 4 = 4,$$

$$\therefore |PA| = 3,$$



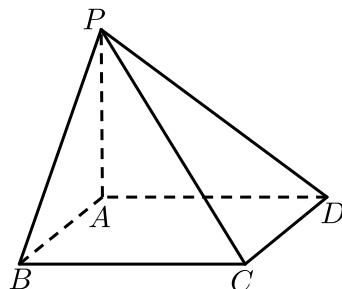
有图知: $|OE| = \frac{3}{2}$, $|ED| = \sqrt{2}$,

$$r = \sqrt{|OE|^2 + |ED|^2} = \frac{\sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore \text{表面积} 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \frac{17}{4} = 17\pi.$$

【标注】【知识点】空间几何体的表面积；组合体求体积、表面积问题

20. 如图， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是矩形， $PA = 4$ ， $AB = 3$ ， $BC = 5$ ，则四棱锥 $P - ABCD$ 的外接球的表面积是 _____ .



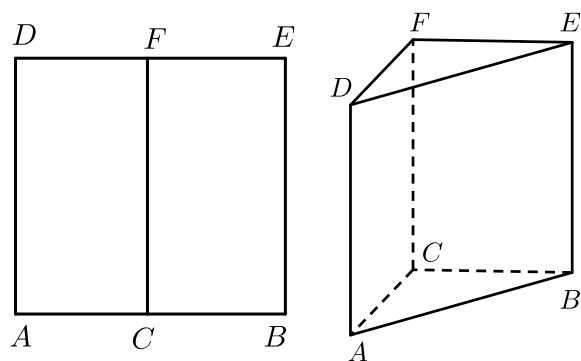
【答案】 50π

【解析】 $2r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$,

$$\therefore S = 4\pi r^2 = 50\pi.$$

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的表面积

21. 如图，边长为4的正方形 $ABED$ 的对边 AB ， ED 的中点分别为 C ， F ，将此正方形沿着 CF 折起，使 $\angle ACB = 90^\circ$ ，连接 AB ， DE 得到一个直棱柱，则此三棱柱外接球的表面积等于 _____ .



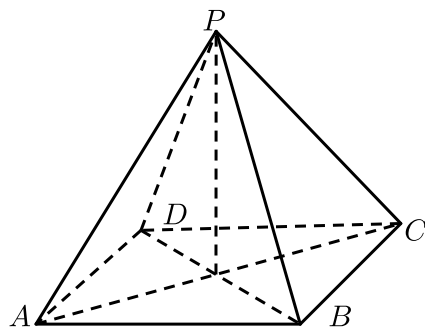
【答案】 3.24π

【解析】略.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】空间几何体的体积

22. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为2的正方形，且 $PA=PB=PC=PD$ ，已知四棱锥的表面积是12，则它的体积为_____。



【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】 由题意知，四棱锥为正四棱锥，

设 $PB=a$ ，高为 h ，

$$S_{\text{表}} = 4S_{\triangle PBC} + S_{\text{平行四边形}ABCD} = 12,$$

$$S_{\triangle PBC} = \sqrt{a^2 - 1} = 2.$$

$$\therefore a = \sqrt{5},$$

$$\therefore h = \sqrt{3},$$

$$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

【标注】 【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积

23. 设三棱锥的三条侧棱两两互相垂直，且长度分别为2， $2\sqrt{3}$ ，4，则其外接球的表面积为_____。

【答案】 32π

【解析】 此三棱锥的外接球即棱长为2， $2\sqrt{3}$ ，4的长方体的外接球，

而长方体的体对角线即为球直径，

$$\text{直径} 2R = \sqrt{4 + 12 + 16} = 4\sqrt{2}, R = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{外接球表面积} : S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 8 = 32\pi.$$

故答案为： 32π 。

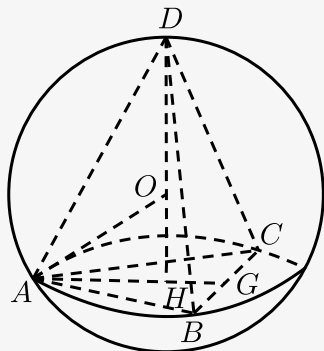
【标注】 【知识点】空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

24.

已知半径为2的球的球面上有 A, B, C, D 不同的四点， $\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形，且 $DO \perp$ 平面 ABC （ O 为球心， D 与 O 在平面 ABC 的同一侧），则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为_____。

【答案】 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

【解析】 如图，



由题意可知，三棱锥 $D-ABC$ 为正三棱锥，底面 ABC 是边长为3的正三角形，
设三角形 ABC 的外心为 H ，

$$\text{则 } AH = \frac{2}{3} \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3},$$

$$\text{设 } OH = x, \text{ 则 } x^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2, \text{ 即 } x = 1.$$

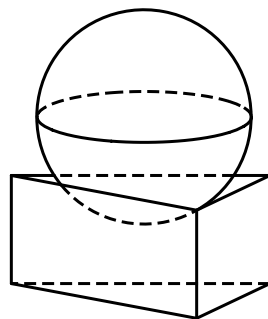
$\therefore$ 三棱锥 $D-ABC$ 的高为3，

$$\text{则三棱锥 } D-ABC \text{ 的体积为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 60^\circ \times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

故答案为： $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 。

【标注】 【知识点】 空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积

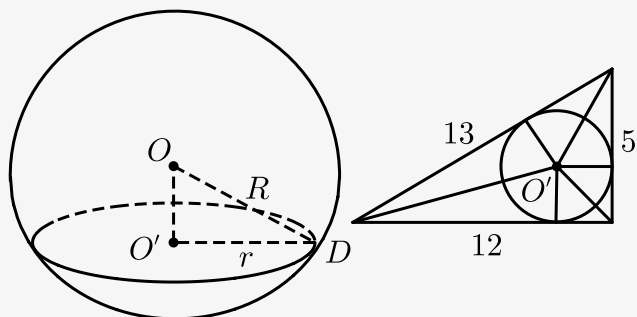
25. 如图所示，直三棱柱的高为4，底面边长分别是5，12，13，当球与上底面三条棱都相切时球心到下底面的距离为8，则球的体积为_____。



【答案】 $\frac{160\sqrt{5}\pi}{3}$

【解析】由题意得，直三棱柱上底面截球的截面为一个圆形，且此圆形即为直三棱柱上底面的三角形的内切圆，设内切圆的半径为 r ，

相关图形如下：



根据题意，可知： $OO' = 8 - 4 = 4$ ，

$\because$ 底面边长分别是5，12，13，则 $5^2 + 12^2 = 13^2$ ，

$\therefore$ 底面是一个直角三角形，

根据面积相等，很明显 $\frac{1}{2} \times (5 + 12 + 13) \times r = \frac{1}{2} \times 5 \times 12$ ，

解得 $r = 2$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle OO'D$ 中， $R = \sqrt{OO'^2 + r^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi \cdot (2\sqrt{5})^3 = \frac{160\sqrt{5}\pi}{3}$ ，

故答案为： $\frac{160\sqrt{5}\pi}{3}$ 。

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积

26. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp BC$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ， $PA = 5$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为_____。

【答案】 50π

【解析】 $\because$ 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ，

$AB \perp BC$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ， $PA = 5$ ，

$\therefore$ 以 AB ， BC ， PA 为长宽高构建长方体，

则长方体的外接球就是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径 $R = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为：

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\pi.$$

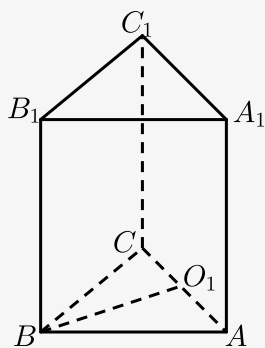
故答案为： 50π 。

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的表面积；组合体求体积、表面积问题

27. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 外接球的表面积为 52π ， $AB = 1$ ，若 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心 O_1 在 AC 上，半径 $r_1 = 1$ ，则直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 _____。

【答案】 6

【解析】 如图，



$\because \triangle ABC$ 的外接圆的圆心 O_1 在 AC 上，

$\therefore O_1$ 为 AC 的中点，且 $\triangle ABC$ 是以 $\angle ACB$ 为直角的直角三角形，

由半径 $r_1 = 1$ ，可得 $AC = 2$ ， $AB = 1$ ，

$\therefore BC = \sqrt{3}$ ，

把直三棱柱补形为长方体，设 $BB_1 = x$ ，

则其外接球的半径 $R = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + x^2}$ ，

由题意，直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 52π ，

则 $4\pi R^2 = 52\pi$ ，即 $R = \sqrt{13}$ ，

$\therefore R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + x^2} = \sqrt{13}$ ，

解得 $x = 4\sqrt{3}$ ，

则直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $V = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 6$ ，

$\therefore$ 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 6。

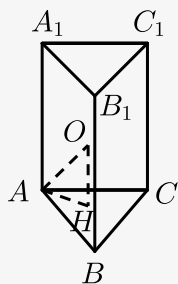
【标注】 【知识点】空间几何体的体积；空间几何体的内切球、外接球问题

28. 已知底面为正三角形的直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ， $AB = AA_1 = 2$ ，则三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 _____。

【答案】 $\frac{28\pi}{3}$

【解析】设球心为 O ,

过 O 作 $OH \perp$ 底面 ABC 于点 H , 连接 HA, OA ,



$\because O$ 为外接球球心, $OH \perp$ 底面 ABC ,

$$\therefore OH = \frac{1}{2} AA_1 = 1, AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{又} \because OA = \sqrt{OH^2 + AH^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

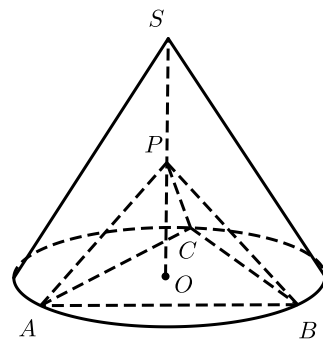
$$= \frac{\sqrt{21}}{3},$$

$$\therefore \text{外接球面积为 } 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{28\pi}{3}.$$

故答案为: $\frac{28\pi}{3}$.

【标注】 【知识点】 空间几何体的表面积; 空间几何体的内切球、外接球问题; 棱柱、棱锥、棱台的结构特征

29. 如图, 在圆锥 SO 中, $SO = \sqrt{2}$, 圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$, $\triangle ABC$ 是圆锥底面圆 O 的内接正三角形, P 为 SO 上一点, 且 $\angle APC = 90^\circ$, 则圆锥 SO 的体积为 _____, 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi; \frac{9\pi}{2}$

【解析】 设底面圆的半径为 r , 侧面积为 $\sqrt{3}\pi$, 即 $\sqrt{3}\pi = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot SA$,

$$\text{而 } SA^2 = r^2 + OS^2,$$

$$\text{可得 } r = 1,$$

$$\text{那么圆锥 } SO \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot OS = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi;$$

由底面圆 O 的内接正三角形,

$$\text{可得正三角形的边长为 } \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle APC = 90^\circ,$$

$$\text{可知 } \triangle APC \text{ 是等腰直角三角形, 可得 } AP = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore PO = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{由于球心 } O' \text{ 在 } OS \text{ 上, 可得 } R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - R \right)^2 + r^2,$$

$$\text{可得球 } R = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{那么球的表面积 } S = 4\pi R^2 = \frac{9\pi}{2}.$$

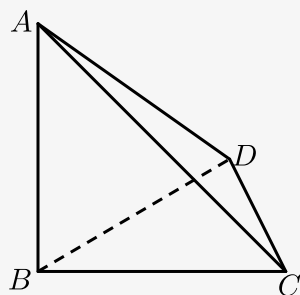
$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}\pi}{3}; \frac{9\pi}{2}.$$

【标注】 【知识点】空间几何体的表面积；空间几何体的内切球、外接球问题；圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

30. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 面 BCD , $\angle BDC = 90^\circ$, $AB = BD = 2$, $CD = 1$, 则三棱锥的外接球体积为 _____.

【答案】 $\frac{9}{2}\pi$

【解析】 如图,



$$\therefore AB \perp \text{面 } BCD,$$

$$\therefore AB \perp DC,$$

$$\text{又 } \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore BD \perp DC, \text{ 而 } AB \cap BD = B,$$

$$\therefore DC \perp \text{平面 } ABD, \text{ 则 } DC \perp AD,$$

$\therefore AC$ 为三棱锥 $A - BCD$ 的外接球的直径，

$\therefore AB = BD = 2, CD = 1,$

$\therefore AC = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3,$

$\therefore$ 三棱锥的外接球的半径为 $\frac{3}{2},$

$\therefore$ 三棱锥的外接球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi.$

故答案为： $\frac{9}{2}\pi.$

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积

31. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的表面积为 $4\sqrt{3}$ ，则正方体外接球的体积为（ ）.

A. $4\sqrt{3}\pi$

B. $\sqrt{6}\pi$

C. $32\sqrt{3}\pi$

D. $8\sqrt{6}\pi$

【答案】 B

【解析】 设正方体的棱长为 a ，则 $BD = \sqrt{2}a$ ，

由于三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的表面积为 $4\sqrt{3}$ ，

则 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 = 4\sqrt{3}$ ，

解得 $a = \sqrt{2}$ ，

又 $2R = \sqrt{3}a = \sqrt{6}$ ，

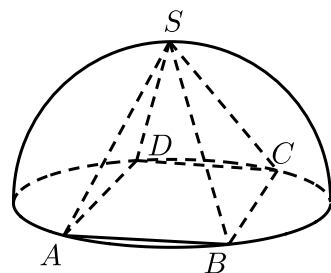
即 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

所以正方体的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times \frac{3\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6}\pi.$

故选B.

【标注】【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积

32. 如图，半球内有一内接正四棱锥 $S - ABCD$ ，该四棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，则该半球的体积为 _____ .



【答案】 $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

【解析】 因为四棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，设球半径为 R ，

$$\text{则 } \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} \times R \times \frac{1}{2} \times 2R \times 2R,$$

$$\therefore R = \sqrt{2},$$

$$\text{因此半球的体积为 } V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi.$$

【标注】 【知识点】空间几何体的体积；空间几何体的内切球、外接球问题

33. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的所有顶点都在球 O 的表面上，若球 O 的体积为 36π ，则正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 () .

A. $2\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{3}$

C. $12\sqrt{3}$

D. $24\sqrt{3}$

【答案】 D

【解析】 正方体外接球半径为正方体体对角线一半，

设正方体棱长为 a ，

$$\therefore V_{\text{球}} = 36\pi = \frac{4}{3}\pi k^3,$$

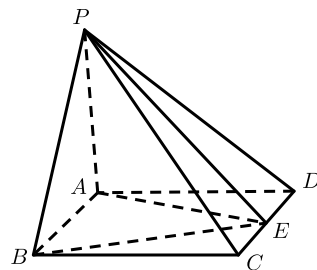
$$R = 3,$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{3}a}{2}, a = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore V_{\text{正方体}} = a^3 = 24\sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；空间几何体的体积

34. 如图，四棱锥 $P - ABCD$ ， $PA \perp$ 底 $ABCD$ 是矩形， $AB = 2$ ， $AD = 3$ ，点 E 为棱 CD 上一点，若三棱锥 $E - PAB$ 的体积为 4，则 PA 的长为 _____ .



【答案】 4

【解析】由题可知， $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times PA \times AB = PA$ ，

点 E 到平面 PAB 的距离为3，

$$\therefore \frac{1}{3} \times PA \times 3 = 4, \text{ 即 } PA = 4.$$

故答案为：4.

【标注】【知识点】等体积法；空间几何体的体积

35. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直，且 $AB = \sqrt{5}$ ， $BC = \sqrt{7}$ ， $AC = 2$ ，则此三棱锥的外接球的体积为（ ）.

A. $\frac{8}{3}\pi$

B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

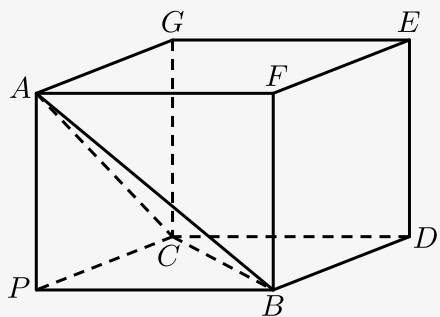
C. $\frac{16}{3}\pi$

D. $\frac{32}{3}\pi$

【答案】B

【解析】三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直，

$\therefore PA, PB, PC$ 为过同一顶点的三条棱，作长方体如图，则长方体的外接球同时也是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球.



$$\because AB = \sqrt{5}, BC = \sqrt{7}, AC = 2,$$

$$\therefore PA = 1, PC = \sqrt{3}, PB = 2,$$

$$\text{长方体的体对角线长为 } PE = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{外接球的直径为 } 2\sqrt{2}, \text{ 半径 } R = \sqrt{2},$$

$$\text{三棱锥 } P-ABC \text{ 外接球的体积 } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi.$$

故选B.

【标注】【知识点】点、直线、平面之间的位置关系；空间几何体的内切球、外接球问题

36. 已知圆锥的高为3，底面半径长为4，若某球的表面积与此圆锥侧面积相等，则该球的体积为 _____.

【答案】 $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$

【解析】 $\because$ 圆锥的底面半径 $r = 4$ ，高 $h = 3$ ，

$\therefore$ 圆锥的母线 $l = 5$ ，

$\therefore$ 圆锥侧面积 $S = \pi rl = 20\pi$ ，

设球的半径为 r ，则 $4\pi r^2 = 20\pi$ ，

$\therefore r = \sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 该球的体积为 $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{5})^3 = \frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$ 。

故答案为： $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$ 。

【标注】 【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积

37. 已知四面体 $ABCD$ 的每个顶点在一个球面上， AB ， AC ， AD 两两垂直，且 $AB = 1$ ， $AC = 2$ ， $AD = 3$ ，则四面体 $ABCD$ 的体积为 _____，这个球的表面积为 _____。

【答案】 $1; 14\pi$

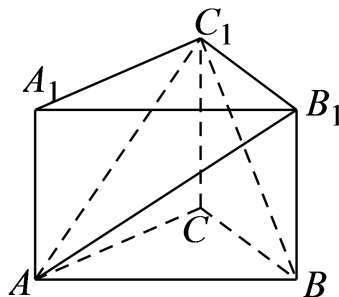
【解析】 因为 AB ， AC ， AD 两两垂直，且 $AB = 1$ ， $AC = 2$ ，

$AD = 3$ ，所以四面体 $ABCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 3 = 1$ 。球 O 的表面积为

$$4\pi \times \left(\frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}}{2} \right)^2 = 14\pi。$$

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题；组合体求体积、表面积问题

38. 如图所示，已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为1，且 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ，则三棱锥 $B_1 - ABC_1$ 的体积为 _____。



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】 $\because$ 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为1，且 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ，

$$\therefore S_{\triangle BB_1C_1} = \frac{1}{2} \times BB_1 \times B_1C_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{点} A \text{到平面} BB_1C_1 \text{的距离} h = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 三棱锥 $B_1 - ABC_1$ 的体积：

$$V = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BB_1C_1} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{12}$ 。

【标注】 【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积；线面垂直的证明问题

39. 在三棱锥 $P - ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $\triangle ABC$ 是等腰三角形，其中 $AB = BC = 2$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $PA = 4$ ，则三棱锥 $P - ABC$ 的外接球的表面积为 _____。

【答案】 32π

【解析】 $AB = BC = 2$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ，

则 $AC = 2\sqrt{3}$ ，设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 r ，

$$2r = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = 4, \text{ 即 } r = 2,$$

设外接球半径为 R ，

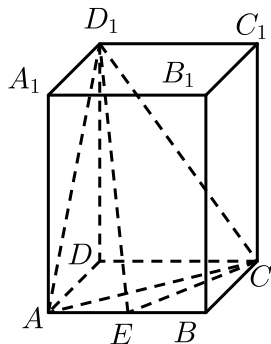
$$\text{则 } R^2 = \left(\frac{PA}{2}\right)^2 + r^2 = 8,$$

$$\text{故 } R = 2\sqrt{2}, S = 4\pi R^2 = 32\pi.$$

故答案为： 32π 。

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题

40. 如图，长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是面积为2的正方形，该长方体的外接球体积为 $\frac{32}{3}\pi$ ，点 E 为棱 AB 的中点，则三棱锥 $D_1 - ACE$ 的体积是 _____。



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 设外接球半径为 R ,

则 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi$, 则 $R = 2$,

底面正方形边长为 $\sqrt{2}$,

则长方体高为 $\sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2} \times 2 = 2\sqrt{3}$,

则 $V_{\text{三棱锥}D_1-ACE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ACE} \cdot \text{高}$
 $= \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{3}.$

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题

41. 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱（侧棱垂直于底面且底面为正方形的四棱柱）的高为2，这个球的表面积为 6π ，则这个正四棱柱的体积为（ ）.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 设球的半径为 r ，则 $4\pi r^2 = 6\pi$,

$\therefore r = \frac{\sqrt{6}}{2},$

$\therefore$ 球的直径为 $2r = \sqrt{6}.$

设正四棱柱的底面边长为 a ，则 $\sqrt{a^2 + a^2 + 4} = \sqrt{6},$

$\therefore a = 1,$

$\therefore$ 正四棱柱的体积 $V = a^2 \cdot 2 = 2.$

故选B.

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题