

极值点偏移

1 设 $k \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \ln x - kx$.

- (1) 若 $k = 2$ ，求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 .
- (2) $f(x)$ 无零点，求实数 k 的取值范围 .
- (3) 若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 ，求证： $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

2 设函数 $f(x) = x^2 - (a-2)x - a \ln x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 若函数有两个零点，求满足条件的最小正整数 a 的值 .
- (3) 若方程 $f(x) = c$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ，求证： $f' \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) > 0$.

3 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - a (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .
- (2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围 .
- (3) 设若函数 $f(x)$ 有两个零点为 m, n ，求证： $mn > e^2$.

4 已知函数 $f(x) = -x^2 + a \ln x, a \in \mathbf{R}$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .
- (2) 当 $a = 4$ 时，记函数 $g(x) = f(x) + kx$ ，设 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是方程 $g(x) = 0$ 的两个根， x_0 是 x_1, x_2 的等差中项， $g'(x)$ 为函数 $g(x)$ 的导函数，求证： $g'(x_0) < 0$.

5 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, g(x) = ax + b$.

- (1) 若函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围 .
- (2) 若直线 $g(x) = ax + b$ 是函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ 图象的切线，求 $a + b$ 的最小值 .
- (3) 当 $b = 0$ 时，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，求证： $x_1 x_2 > 2e^2$. (取 e 为 2.8，取 $\ln 2$ 为 0.7，取 $\sqrt{2}$ 为 1.4)