

套卷

一、2021和平三模

二、选择题

(本大题共9小题,每小题5分,共45分)

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[-2, 2]$ C. $(1, 2]$ D. $[-2, 1)$

【答案】 A

【解析】 集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 2\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\}$,

则 $A \cup B = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

故选A.

【标注】 【知识点】并集

2. “直线 l 与平面 α 内的无数条直线垂直”是“直线 l 与平面 α 垂直”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

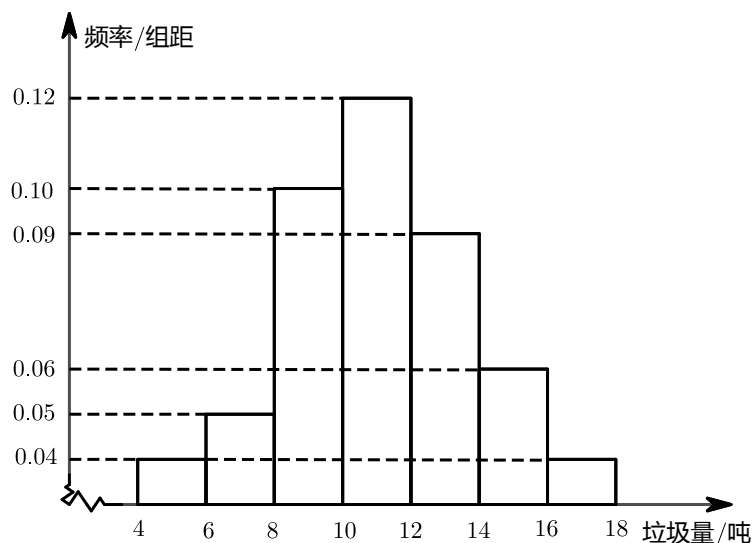
【解析】 直线 l 与平面 α 内的无数条直线垂直时, 这条直线也可以在 α 内, 不一定和平面 α 垂直; 但是直线与平面 α 垂直时, 这条直线垂直于平面 α 内所有直线, 故“直线与平面 α 内的无数条直线垂直”是“直线与平面 α 垂直”的必要不充分条件,

故选B.

【标注】 【知识点】已知线面位置关系判定结论的问题; 点、直线、平面之间的位置关系; 充要条件与立体几何结合

3.

某市通过统计50个大型社区产生的日均垃圾量，绘制了如下图所示的频率分布直方图，数据的分组依次为： $[4, 6)$ ， $[6, 8)$ ， $[8, 10)$ ， $[10, 12)$ ， $[12, 14)$ ， $[14, 16)$ ， $[16, 18]$ ．为了鼓励率先实施垃圾分类回收，将日均垃圾量不少于14吨的社区划定为试点社区，则这样的试点社区个数是（ ）．



- A. 4 B. 10 C. 19 D. 40

【答案】 B

【解析】 设日均垃圾量不少于14吨的社区的概率为 P ．

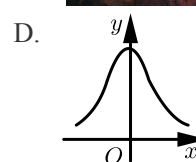
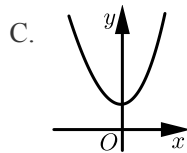
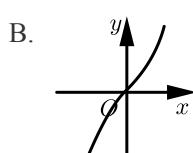
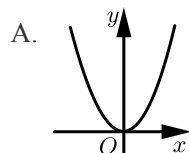
$$P = (0.06 + 0.04) \times 2 = 0.2 ,$$

$$\therefore \text{个数为 } 50 \times P = 50 \times 0.2 = 10 \text{ (个)} .$$

故选B．

【标注】 【知识点】 频率分布直方图

4. 意大利画家列奥纳多·达·芬奇的画作《抱银鼠的女子》（如右图所示）中，女士颈部的黑色珍珠项链与她怀中的白貂形成对比，光线和阴影衬托出人物的优雅和柔美．达·芬奇提出：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”．后人研究得出，悬链线并不是抛物线，而是与解析式为 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的“双曲余弦函数”相关下列选项为“双曲余弦函数”图象的是（ ）．



【答案】 C

【解析】 记 $y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为偶函数，即图象关于 y 轴对称，故排除 B；

$$f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1, \text{ 故图象过点 } (0, 1), \text{ 排除 A；}$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{-e^{-x} + e^x}{2}, f'(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} > 0 \text{ 恒成立,}$$

故 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\therefore f'(x) \geq f'(0) = 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，故排除 D；

综上：选 C。

【标注】 【知识点】函数图象的识别问题

5. 设 $a = 3^{\frac{1}{3}}$ ， $b = \left(\frac{1}{5}\right)^3$ ， $c = \log_3 \frac{1}{5}$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()。

A. $b < a < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

【答案】 D

【解析】 由指数函数和对数函数的性质可知， $a = 3^{\frac{1}{3}} > 1$ ， $b = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \in (0, 1)$ ， $c = \log_3 \frac{1}{5} < 0$ ，

则 $c < b < a$ 。

故选 D。

【标注】 【知识点】指对幂比较大小

6. 在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O ，球 O 分别与圆柱 O_1O_2 的上、下底面及母线均有且只有一个公共点．若 $O_1O_2 = 2$ ，则圆柱 O_1O_2 的表面积为（ ）．
- A. 4π B. 5π C. 6π D. 7π

【答案】 C

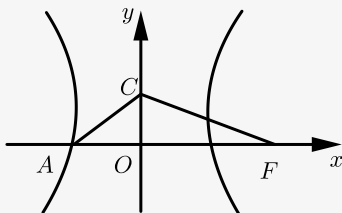
【解析】 由题意，可得 $h = 2r = 2$ ，解得 $r = 1$ ，
所以圆柱 O_1O_2 的表面积为 $S = \pi r^2 \times 2 + 2\pi r \times h = 6\pi r^2 = 6\pi$ ．
故选C．

【标注】 【知识点】 空间几何体的表面积

7. 已知点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点，若双曲线实轴的一个端点、虚轴的一个端点与点 F 恰好是直角三角形的三个顶点，则双曲线的离心率为（ ）．
- A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C. $1+\sqrt{2}$ D. $1+\sqrt{5}$

【答案】 B

【解析】



由题意得，

$$OA = a, OC = b, OF = c,$$

$\triangle ACF$ 为直角三角形，

$$\therefore AC^2 + CF^2 = AF^2,$$

$$\text{又} \because AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + b^2,$$

$$CF^2 = OC^2 + OF^2 = a^2 + c^2,$$

$$\therefore (a+c)^2 = a^2 + b^2 + a^2 + c^2,$$

$$\text{化简得：} 2ac = 2b^2,$$

$$b^2 = ac,$$

$$\text{又} \because c^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^2 - a^2 = ac,$$

同除以 a^2 ，

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \frac{c}{a},$$

$$e^2 - e - 1 = 0,$$

$$e = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

又 $\because$ 双曲线 $e > 1 (c > a)$,

$$\therefore e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

故选B.

【标注】 【知识点】求双曲线的离心率

8. 已知函数 $f(x) = (a \sin x + \cos x) \cos x - \frac{1}{2}$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{6}$, 则下列结论中正确的是 () .
- A. $(-\frac{7\pi}{12}, 0)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心
- B. $f(x)$ 是最小正周期为 π 的奇函数
- C. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增
- D. 先将函数 $y = 2 \sin 2x$ 图象上各点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 然后把所得函数图象再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 而可得到函数 $f(x)$ 的图象

【答案】 A

【解析】 A 选项: $f(-\frac{7\pi}{12}) = \sin(-\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \sin(-\pi) = 0$,

则 $(-\frac{7\pi}{12}, 0)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心,

故A正确;

B 选项: $f(x) = (a \sin x + \cos x) \cos x - \frac{1}{2}$

$$= a \sin x \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} a \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2} \sin(2x + \varphi),$$

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取到最值,

$$\text{即 } a \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2},$$

解得 $a = \sqrt{3}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = \sin(2x + \frac{\pi}{6}),$$

$$\text{又 } f(0) = \sin(\frac{\pi}{6}) \neq 0,$$

故 $f(x)$ 不是奇函数,

故B错误;

C 选项: 当 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 时, $-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$,

又 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ 上先增后减,

则 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上先增后减，

故C错误；

D 选项：将函数 $y = 2\sin 2x$ 图象上各点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，

然后把所得函数图象再向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，

得 $y = \frac{1}{2} \times 2\sin 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

故D错误。

故选 A。

【标注】 【知识点】已知正弦型函数判定结论正误；二倍角公式化简求值综合运用

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ ， $\vec{AE} = 2\vec{EB}$ ， $|\vec{AB}| = \lambda |\vec{AC}|$ ，若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9\vec{AO} \cdot \vec{EC}$ ，则实数 $\lambda =$ () .
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】 D

【解析】 由 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ ，知 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，

所以 $\vec{AO} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AC})$ ，又 $\vec{AE} = 2\vec{EB}$ ，

所以 $\vec{EC} = \vec{AC} - \vec{AE} = \vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AB}$ ，

则 $9\vec{AO} \cdot \vec{EC} = 3(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \left(\vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AB}\right)$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AC} - 2\vec{AB}^2 + 3\vec{AC}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ，

所以 $2\vec{AB}^2 = 3\vec{AC}^2$ ，

所以 $\lambda = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

故选D。

【标注】 【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）

三、 填空题

（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

1. i 是虚数单位，复数 $z = (2 + i)(1 - 2i)$ ，则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ _____。

【答案】 $4 + 3i$

【解析】 复数 $z = (2 + i)(1 - 2i) = 2 - 4i + i - 2i^2 = 4 - 3i$ ，则 z 的共轭复数 $\bar{z} = 4 + 3i$ 。

【标注】 【知识点】 复数的乘法和除法

2. 在 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项是 _____。

【答案】 -160

【解析】 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 其展开式通项为：

$$T_{r+1} = C_6^r \cdot (2x)^{6-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= C_6^r \cdot 2^{6-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{6-2r},$$

$$\text{令 } 6 - 2r = 0, r = 3,$$

$$\therefore \text{常数项为: } C_6^3 \cdot 2^3 \cdot (-1)^3 = 20 \cdot 8 \cdot (-1) = -160.$$

故答案为： -160 。

【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项

3. 设 $a \in \mathbf{R}$ ，已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 + 2ax - 2\sqrt{3}y = 0$ 相切，则 $a =$ _____。

【答案】 -1

【解析】 $y^2 = 4x = 2px \Rightarrow p = 2$,

$\therefore$ 准线： $x = -1$,

$$C: x^2 + 2ax + y^2 - 2\sqrt{3}y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 3 + a^2$$

$$\Rightarrow (x + a)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3 + a^2,$$

圆心 $(-a, \sqrt{3})$ ，半径 $r^2 = 3 + a^2$ ，

当 $-a > -1$ ，即 $a < 1$ 时：圆心到准线距离的平方： $d^2 = (-a + 1)^2$ ，

$$\therefore (-a + 1)^2 = 3 + a^2 \Rightarrow -2a = 2 \Rightarrow a = -1,$$

当 $-a < -1$ 即 $a > 1$ 时，圆心到准线的距离的平方 $d^2 = (-1 + a)^2$ ，

$$\therefore (-1 + a)^2 = 3 + a^2 \Rightarrow a = -1,$$

$\therefore a > 1$ ，

$\therefore a = -1$ 不合题意。

综上： $a = -1$ 。

【标注】 【知识点】 已知直线和圆的位置关系求参数

4. 某校象棋社团开展竞赛活动，比赛中双方有一人获胜或者双方和棋则比赛结束．根据以往比赛结果，在一局比赛中，甲战胜乙的概率是 $\frac{1}{2}$ ，两人和棋的概率是 $\frac{1}{6}$ ，则乙战胜甲的概率是_____．甲乙两人比赛2局，每局胜方记3分，负方记0分，和棋双方各记1分，则甲得分不少于2分的概率是_____．

【答案】 $\frac{1}{3}$ ； $\frac{7}{9}$

【解析】 1．在比赛中，甲胜乙的概率为 $\frac{1}{2}$ 和棋的概率为 $\frac{1}{6}$ ，
故乙胜甲的概率为 $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ．

2．甲的得分不少于2分，故只需计算甲两场都输或甲输一场平一场的概率，用1减去此概率即为甲的得分不少于2个的概率 $1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{7}{9}$ ．

【标注】 【知识点】 相互独立事件的概率乘法公式

5. 若正实数 x, y, z 满足 $x + 3y + 2z = 1$ ，则 $\frac{x+2y}{2y+4z} + \frac{4}{x+2y}$ 的最小值是_____．

【答案】 $4 + 2\sqrt{2}$

【解析】 $\because x + 3y + 2z = 1$ ，则 $x + 2y = 1 - (y + 2z)$ ，

$$\begin{aligned} \text{故 } & \frac{x+2y}{2y+4z} + \frac{4}{x+2y} \\ &= \frac{1-(y+2z)}{2y+4z} + \frac{4}{x+2y} \\ &= \frac{1}{2y+4z} - \frac{1}{2} + \frac{4}{x+2y} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{y+2z} + \frac{4}{x+2y} - \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{y+2z} + \frac{4}{x+2y} \right) (y+2z+x+2y) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}(x+2y)}{y+2z} + \frac{4(y+2z)}{x+2y} + 4 - \frac{1}{2} \\ &= 4 + \frac{\frac{1}{2}(x+2y)}{y+2z} + \frac{4(y+2z)}{x+2y} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(x+2y)}{y+2z} \cdot \frac{4(y+2z)}{x+2y}} + 4 \\ &= 4 + 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

当仅当 $(y+2z)^2 = (x+2y)^2$ 时取等号．

故答案为： $4 + 2\sqrt{2}$ ．

【标注】 【知识点】 已知等式关系求最值

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0 \\ |x^2 + 4x + 3|, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $g(x) = ax$ ($a \in \mathbf{R}$) 使得方程 $f(x) = g(x)$ 恰有3个不同的实根, 则实数 a 的取值范围为 _____.

【答案】 $\left\{ a \mid 0 \leq a < \frac{1}{e} \text{ 或 } a = 2\sqrt{3} - 4 \right\}$

【解析】 由已知 $f(x)$ 的图象如图1,

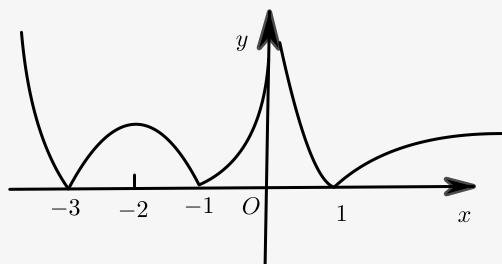


图1

(1) 当 $a > 0$ 时, 要使得方程 $f(x) = g(x)$ 恰有3个不同根,

则需存在 $x > 1$, 使得 $\ln x > ax$, 即 $a < \frac{\ln x}{x}$,

又 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的图象如图2, 故 $0 < a < \frac{1}{e}$;

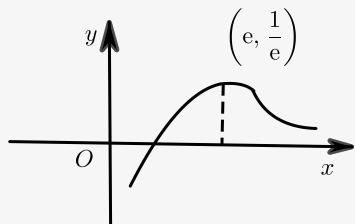


图2

(2) 当 $a < 0$ 时, 由图1知 $y = ax$ 需与函数 $f(x) = |x^2 + 4x + 3| = -x^2 - 4x - 3$ 相切,

设切点为 (x_0, y_0) , 则 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,

即 $y - (-x_0^2 - 4x_0 - 3) = (-2x_0 - 4)(x - x_0)$ 过点 $(0, 0)$,

故 $x_0^2 + 4x_0 + 3 = 2x_0^2 + 4x_0$, 解得 $x_0^2 = 3$,

因为 $x_0 < 0$, 故 $x_0 = -\sqrt{3}$, 所以 $a = f'(x_0) = 2\sqrt{3} - 4$,

(3) 当 $a = 0$ 时, 显然符合题意,

综上, 实数 a 的取值范围为 $\left\{ a \mid 0 \leq a < \frac{1}{e} \text{ 或 } a = 2\sqrt{3} - 4 \right\}$.

【标注】 【知识点】 已知零点情况求参数的取值范围

四、解答题

(本大题共5小题 , 共75分)

1. 已知 $\triangle ABC$ 中 , 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b \sin A = 2c \sin B$, 且 $b = 3$, $\cos B = \frac{1}{4}$.

(1) 求 a 的长 .

(2) 求 $\tan C$ 的值 .

(3) 求 $\tan(2B - C)$ 的值 .

【答案】 (1) $a = 3$.

$$(2) \tan C = \frac{\sqrt{15}}{7} .$$

$$(3) \tan(2B - C) = -\frac{7\sqrt{15}}{17} .$$

【解析】 (1) $\because b \sin A = 2c \sin B$, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

$$\therefore \sin B \sin A = 2 \sin C \sin B ,$$

又 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中 $\sin B \neq 0$,

$$\therefore \sin A = 2 \sin C ,$$

$$\therefore a = 2c ,$$

$$\text{又} \because \cos B = \frac{1}{4} , b = 3 ,$$

$$\text{由余弦定理得} : b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B ,$$

$$\therefore 9 = 4c^2 + c^2 - 4c^2 \times \frac{1}{4} ,$$

$$\therefore c^2 = \frac{9}{4} ,$$

$$\text{又} \because c > 0 ,$$

$$\therefore c = \frac{3}{2} , a = 2c = 2 \times \frac{3}{2} = 3 ,$$

$$\therefore a = 3 .$$

(2) 由 (1) 可得 , $a = 3$, $b = 3$, $c = \frac{3}{2}$,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{18 - \frac{9}{4}}{2 \times 3 \times 3} = \frac{63}{2 \times 9 \times 4} = \frac{7}{8} ,$$

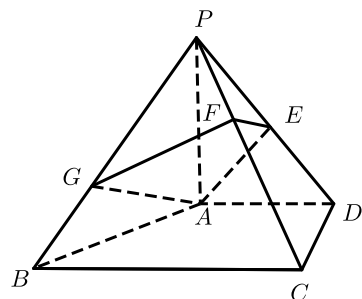
在 $\triangle ABC$ 中 , $\sin C > 0$,

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8} ,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sqrt{15}}{7} . \\
(3) &\therefore \cos B = \frac{1}{4} , \\
&\therefore \sin B = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} , \\
&\therefore \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \sqrt{15} , \\
&\tan 2B = \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B} = \frac{2\sqrt{15}}{1 - 15} = \frac{-2\sqrt{15}}{14} = -\frac{\sqrt{15}}{7} , \\
&\tan(2B - C) = \frac{\tan 2B - \tan C}{1 + \tan 2B \cdot \tan C} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{7} - \frac{\sqrt{15}}{7}}{1 - \frac{\sqrt{15}}{7} \times \frac{\sqrt{15}}{7}} = \frac{-\frac{2}{7}\sqrt{15}}{\frac{34}{49}} , \\
&= -\frac{14\sqrt{15}}{34} \\
&= -\frac{7\sqrt{15}}{17} .
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】利用正切和差角公式直接求值；已知正弦余弦正切或其关系求值；正余弦定理综合求解边角

2. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \perp CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $PA = AD = CD = 2$ ， $BC = 3$ ，过点 A 做四棱锥 $P-ABCD$ 的截面 $AEFG$ ，分别交 PD ， PC ， PB 于点 E ， F ， G ，已知 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$ ， E 为 PD 的中点。



- (1) 求证： $AG \parallel$ 平面 PCD .
(2) 求 AF 与平面 PAB 所成角的正弦值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

【解析】(1) 在 PC 上取点 H ，且满足 $PH:PC = 2:3$ ，

连接 GH, HD ，则 $GH \parallel BC$ ，且 $GH = \frac{2}{3}BC = 2$ ，

因为 $AD \parallel BC$ ，所以 $AD \parallel GH$ ，且 $AD = GH$ ，

所以 $ADHG$ 是平行四边形，

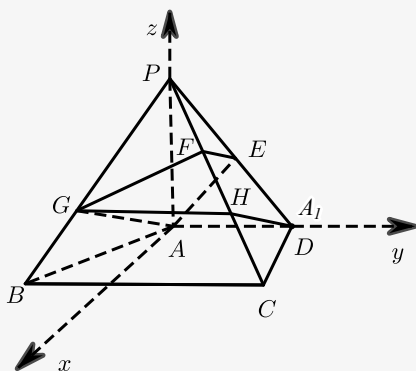
所以 $AG \parallel HD$ ，

又因为 $HD \subset \text{平面} PCD$ ， $AG \not\subset \text{平面} PCD$ ，

所以 $AG \parallel \text{平面} PCD$ 。

(2) 过点 A 做与 DC 平行的射线 l ，易证两两垂直，

所以，以 l 为 x 轴，以 AD 为 y 轴， AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ，



则有 $P(0, 0, 2)$ ， $C(2, 2, 0)$ ， $G\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ， $E(0, 1, 1)$ ，

设平面 $AEFG$ 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

则 $\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ ，令 $z = 1$ ，解得 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ ，

所以 $\vec{n} = (-1, -1, 1)$ 是平面 $AEFG$ 的一个法向量，

因为点 F 在 PC 上，

所以 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AC} + (1 - \lambda) \overrightarrow{AP} = (2\lambda, 2\lambda, 2 - 2\lambda)$ ，

因为 $AF \subset \text{平面} AEF$ ，

所以 $\overrightarrow{AF} \cdot \vec{n} = -2\lambda - 2\lambda + 2 - 2\lambda = 0$ ，

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ ，

所以 $\overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ ，

或如下证法：因为 $AG \parallel \text{平面} PCD$ 且 $\text{平面} AGFE \cap \text{平面} PCD = EF$ ，

所以 $AG \parallel EF$ ，

所以 $EF \parallel HD$ ，

因为 E 为 PD 中点，

所以 F 为 PH 中点，

所以 $PF = \frac{1}{3}PC$ ，

$$\text{所以 } F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), \overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} z_1 = 0 \\ 2x_1 - y_1 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x_1 = 1, \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{所以 } \vec{n}_1 = (1, 2, 0) \text{ 是平面 } PAB \text{ 的一个法向量}, \cos \langle \overrightarrow{AF}, \vec{n}_1 \rangle = \frac{\sqrt{30}}{10},$$

所以 AF 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

【标注】 【知识点】向量法解决线面角问题

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且经过点 $D(0, 1)$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 已知点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(-4, 0)$, 过点 B 的动直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点 (M 在 N 左侧), 试讨论 $\angle BAM$ 与 $\angle OAN$ 的大小关系, 并说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $\angle BAM = \angle OAN$.

【解析】 (1) $b = 1, e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore a^2 = 4,$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) l 的斜率为 0 时, $\angle BAM = \angle OAN = 0^\circ$;

l 斜率不为 0 时, 设 l :

$$x = my - 4, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2).$$

$$\begin{cases} x = my - 4 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 4)y^2 - 8my + 12 = 0,$$

$$\Delta = 64m^2 - 4 \times 12(m^2 + 4) > 0,$$

$$y_1 + y_2 = \frac{8m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{12}{m^2 + 4},$$

$$K_{AM} + K_{AN} = \frac{y_2}{x_2 + 1} + \frac{y_1}{x_1 + 1} = \frac{2my_1 \cdot y_2 - 3(y_1 + y_2)}{(my_2 - 3)(my_1 - 3)} = 0,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle OAN .$$

综上, $\angle BAM = \angle OAN$.

【标注】 **【知识点】** 角度问题

4. 已知 $\{a_n\}$ 是各项都为整数的等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列, $a_1 = b_1 = 1$, $5a_2 = 2 + 2a_3$, $a_2 = b_2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $\prod_{k=1}^n a_k$ 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项乘积, 即 $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

① 求 $\prod_{k=1}^n a_k$.

② 若数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $\prod_{k=1}^n b_k = \frac{c_n}{n}$, 求证: $\frac{c_{n+1}}{n+1} - S_n = 1$.

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}$, $b_n = n$.

(2) ① $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

② 证明见解析 .

【解析】 (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{则} \because 5a_2 = 2 + 2a_3, a_1 = b_1 = 1 ,$$

$$\text{即} 5 \cdot a_1 \cdot q = 2 + 2 \cdot a_1 q^2, 5q = 2 + 2q^2 ,$$

$$\text{解得} q = 2 \text{ (另一解} q = \frac{1}{2} \text{, 但} \{a_n\} \text{各项都为整数, 不符题意) ,}$$

又 $\because a_2 = b_2$, 设 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 则:

$$1 \times 2 = b_1 + d = 1 + d, \text{ 则} d = 1 ,$$

$$\therefore a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}, b_n = 1 + 1 \times (n-1) = n .$$

(2) ① $\because \prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n, n \in \mathbf{N}^*$,

$$\therefore \prod_{k=1}^n a_k = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^{n-1} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} .$$

② $\because \prod_{k=1}^n b_k = \frac{c_n}{n}$, 则 $c_n = n \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_n = n \cdot n!$,

$$\therefore c_{n+1} = (n+1) \cdot (n+1)! ,$$

$$\therefore \frac{c_{n+1}}{n+1} = (n+1)! ,$$

又：数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，

则： $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$ ，

则 $S_n + 1 = 1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$

$= (1 + 1 \times 1!) + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \cdot n!$

$= 1 \times 2! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \cdot n!$

$= 3 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \cdot n!$

$= 3! + 3 \times 3! + \cdots + n \cdot n!$

$= 4 \times 3! + 4 \times 4! + \cdots + n \cdot n!$

$= 4! + 4 \times 4! + \cdots + n \cdot n!$

$= \cdots$

$= n! + n \cdot n! = (n+1)!$ ，

$\therefore \frac{c_n}{n+1} = (n+1)!$ ， $S_n + 1 = (n+1)!$ ，

$\therefore$ 结论得证 $\frac{c_{n+1}}{n+1} - S_n = 1$ 。

【标注】 【知识点】 等差数列求和问题

5. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}} - x \ln x$ 。

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程。

(2) 证明：

① $f(x) < 2$ 。

② 对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $e^{n-1} < (2n - \ln n)^n$ 。

【答案】 (1) $y = -x + 2$ 。

(2) ① 证明见解析。

② 证明见解析。

【解析】 (1) $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}} - x \ln x$ ， $f'(x) = \frac{e^{x-1} - x \cdot e^{x-1}}{e^{2x-2}} - \ln x - 1 = \frac{1-x}{e^{x-1}} - \ln x - 1$ ， $x = 1$ 时，

$f(1) = 1 - 0 = 1$ ， $f'(1) = 0 - 0 - 1 = -1$ ，

切线方程为 $y - 1 = -1(x - 1)$ ，即 $y = -x + 2$ 。

(2) ① 证 $f(x) < 2$, 即 $\frac{x}{e^{x-1}} - x \ln x < 2$, 即证 $\frac{x}{e^{x-1}} < x \ln x + 2$,

令 $g(x) = \frac{x}{e^{x-1}} (x > 0)$, $h(x) = x \ln x + 2 (x > 0)$ ① 比较 $g(x)_{\max}$ 与 $h(x)_{\min}$,

$g'(x) = \frac{e^{x-1} - xe^{x-1}}{e^{2x-2}} = \frac{1-x}{e^{x-1}}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $1 < x$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(1, 0)$ 单增, 在 $(1, +\infty)$ 单减, $g(x)_{\max} = g(1) = 1$, $h'(x) = 1 + \ln x$, 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$, $h'(x) < 0$, 当 $\frac{1}{e} < x$, $h'(x) > 0$, $h(x)$, $x \in (0, \frac{1}{e})$ 单减, $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 单增, $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{e}) = 2 - \frac{1}{e}$.

$\therefore g(x)_{\max} < h(x)_{\min}$,

$\therefore \frac{x}{e^{x-1}} < x \ln x + 2$ 恒成立, 即 $f(x) < 2$ 得证.

② 由 (2) ① 知 $\frac{x}{e^{x-1}} - x \ln x < 2$, 则 $x > 0$ 时, $f(\frac{1}{2}) < 2$,

即 $\frac{1}{x \cdot e^{\frac{1}{x}-1}} - \frac{1}{x} \ln x < 2$, 即 $-\frac{1}{e^{\frac{1}{x}-1}} + \ln x < 2x$,

即 $e^{\frac{x-1}{x}} < 2x - \ln x$.

② 合理运用前问的结论, 则有 $e^{\frac{n-1}{n}} < 2n - \ln n$, ③ $\frac{1}{e^{\frac{1}{x}-1}} = \frac{1}{e^{\frac{1-x}{x}}} = e^{-\frac{1-x}{x}} = e^{\frac{x-1}{x}}$,

$[e^{\frac{n-1}{n}}]^n < [2n - \ln n]^n$, 即 $e^{n-1} < [2n - \ln n]^n$, 得证.

【标注】 【知识点】 通过构造函数证明不等式

五、南开二模

六、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 已知集合 $A = \{-3, -1, 0, 2, 3, 4\}$, $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\emptyset$

B. $\{-3, -1, 0, 4\}$

C. $\{2, 3\}$

D. $\{0, 2, 3\}$

【答案】 C

【解析】 $\because \complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$,

$\therefore B = \{x | 0 < x \leq 3\}$,

又 $A = \{-3, -1, 0, 2, 3, 4\}$,

则 $A \cap B = \{2, 3\}$.

故选 C.

【标注】 【知识点】 补集

2. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $\frac{2}{x-1} < 0$ ”是“ $x^2 < 1$ ”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 由 $\frac{2}{x-1} < 0$ 得 $x-1 < 0$, 即 $x < 1$,

由 $x^2 < 1$ 得 $-1 < x < 1$,

因为 $(-1, 1) \subsetneq (-\infty, 1)$,

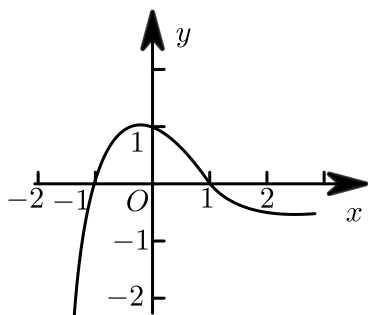
所以“ $\frac{2}{x-1} < 0$ ”是“ $x^2 < 1$ ”的必要不充分条件.

故选B.

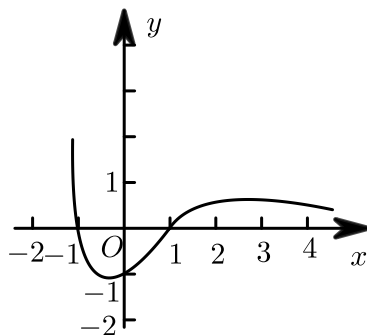
【标注】 【知识点】充要条件与不等式结合

3. 函数 $f(x) = \frac{1-x^2}{e^x}$ 的图象大致为().

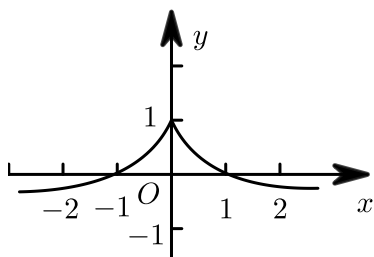
A.



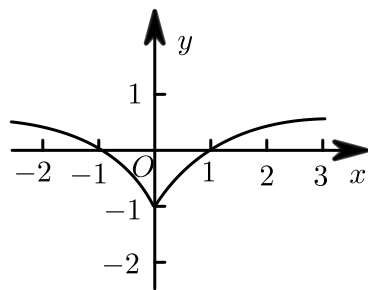
B.



C.



D.



【答案】 A

【解析】 根据题意, $f(x) = \frac{1-x^2}{e^x}$,

有 $f(-x) = \frac{1-x^2}{e^{-x}}$, 为非奇非偶函数, 可以排除C、D,

又由 $f(0) = \frac{1-0}{e^0} = 1$, 排除B.

故选: A.

【标注】 【知识点】 根据奇偶性确定图象

4. 已知直线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 交于 A, B 两点, 且线段 AB 的中点坐标为 $D(2, \sqrt{2})$, 则 $|AB| = ($
) .
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】 A

【解析】 圆 C 的方程 $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 可化为 $(x - 3)^2 + y^2 = 4$,

$\therefore$ 圆 C 的圆心 C 坐标为 $(3, 0)$, 半径为2,

$\therefore$ 设线段 AB 的中点的坐标为 $D(2, \sqrt{2})$,

$\therefore |CD| = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$,

$\therefore |AB| = 2 \times \sqrt{4 - 3} = 2$.

故选A.

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 若 $a = f(\log_2 e)$, $b = f(\ln 2)$,
 $c = \left(\log_{\frac{1}{2}} 3\right)$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .
A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

【答案】 D

【解析】 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\because \log_2 e > 1, 0 < \ln 2 < 1$,

$\left|\log_{\frac{1}{2}} 3\right| = \log_2 3 > \log_2 e > 1$,

$\therefore f\left(\log_{\frac{1}{2}} 3\right) > f(\log_2 e) > f(\ln 2)$,

$\therefore c > a > b$.

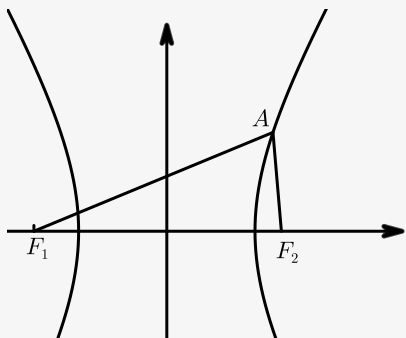
故选D.

【标注】 【知识点】 函数单调性与奇偶性综合问题

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的离心率为2, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 在双曲线 C 上, 若
 $\triangle AF_1 F_2$ 的周长为10, 则 $\triangle AF_1 F_2$ 的面积为 () .
A. $\sqrt{15}$ B. $2\sqrt{15}$ C. 15 D. 30

【答案】 A

【解析】



$\triangle AF_1F_2$ 的周长为 10 ,

故 $|AF_1| + |AF_2| + |F_1F_2| = 10$,

离心率 $e = 2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+3}}{a}$,

$\therefore a^2 + 3 = 4a^2$,

$\therefore a = 1$, $c = 2$,

$|F_1F_2| = 2c = 4$,

故 $|AF_1| + |AF_2| = 6$,

设 A 在双曲线右支上 , 而由双曲线定义可知 ,

$|AF_1| - |AF_2| = 2a = 2$,

$\therefore \begin{cases} |AF_1| = 4 \\ |AF_2| = 2 \end{cases}$,

故 $S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{15} = \sqrt{15}$.

故选 A .

【标注】 【知识点】 双曲线的焦点三角形问题 (小题)

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$, 则下列四个结论中 :

① $f(x)$ 的周期为 π ;

② $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴 ;

③ $\left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right]$ 是 $f(x)$ 的一个单调递增区间 ;

④ $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上的最大值为 2 .

所有正确结论的序号是 () .

A. ①②

B. ①③

C. ①②④

D. ①③④

【答案】 B

【解析】 $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x \right)$$

$$= 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\textcircled{1} T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故 } \textcircled{1} \text{ 正确};$$

$$\textcircled{2} \text{ 对称轴 } 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi,$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 故 } \textcircled{2} \text{ 错误};$$

$$\textcircled{3} \text{ 单调递增区间: } \pi + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi + 2k\pi,$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,$$

$$\frac{5}{12}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{11}{12}\pi + k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, } -\frac{7}{12}\pi \leq x \leq -\frac{1}{12}\pi, \text{ 故 } \textcircled{3} \text{ 正确};$$

$$\textcircled{4} x \in \left[0, \frac{7\pi}{12} \right]$$

$$2x \in \left[0, \frac{7\pi}{6} \right]$$

$$2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{4}{3}\pi \right]$$

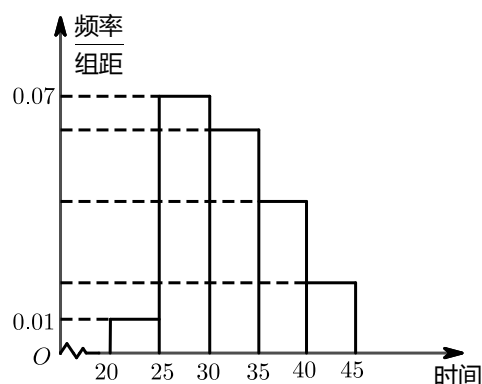
$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \in \left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \in [-2, \sqrt{3}], \text{ 故 } \textcircled{4} \text{ 错误}.$$

故选B.

【标注】 【知识点】已知正弦型函数判定结论正误

8. 某健身俱乐部统计学员经训练后的平板支撑的时间增加值都在20s到45s之间，其频率分布直方图如图所示．现已知时间增加值在[30, 35)，[35, 40)，[40, 45]的健身人数呈递减的等差数列，则学员时间增加值是[30, 35)或[40, 45]的频率之和为（ ）．



A. 0.5

B. 0.3

C. 0.6

D. 0.4

【答案】 D

【解析】 由题中频率分布直方图可知，时间增加值在[20, 25)或[25, 30)的频率之和为 $(0.01 + 0.07) \times 5 = 0.4$ ，

设时间增加值在 $[30, 35)$, $[35, 40)$, $[40, 45)$ 的学员出现的频率为 x, y, z ,

$$\text{则} \begin{cases} x + z = 2y \\ x + y + z = 1 - 0.4 \end{cases}$$

解得 $y = 0.2$, 即时间增加值在 $[30, 35)$, $[40, 45)$ 的频率之和为0.4.

故选: D.

【标注】 【知识点】 频率分布直方图

9. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \perp AB$, $CD \parallel AB$, $AB = 2AD = 2DC = 2$, E 为 BC 边上一点, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$, F 为直线 AE 上一点, 则 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FB}$ 的最大值为().

A. $\frac{6}{13}$

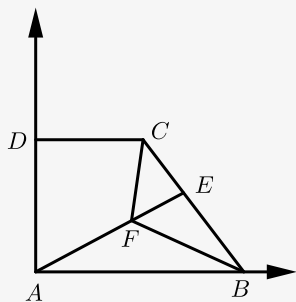
B. $-\frac{6}{13}$

C. $\frac{9}{20}$

D. $-\frac{9}{20}$

【答案】 C

【解析】 如图建立坐标系,



$$\because AB = 2AD = 2DC = 2,$$

$$\therefore A(0, 0), B(2, 0), D(0, 1), C(1, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = (-1, 1),$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC},$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\therefore E\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{ 直线 } AE: y = \frac{1}{2}x,$$

$$\text{设 } F(x_0, y_0), \text{ 则 } \overrightarrow{CF} = (x_0 - 1, y_0 - 1), \overrightarrow{FB} = (2 - x_0, -y_0),$$

$$\therefore \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FB} = -x_0^2 + 3x_0 - 2 - \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{1}{2}x_0$$

$$= -\frac{5}{4}x_0^2 + \frac{7}{2}x_0 - 2,$$

$$\text{令 } g(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - 2, g'(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2},$$

$$\therefore \text{令 } g'(x) = 0, x = \frac{7}{5},$$

$$\therefore g'(x) > 0, x < \frac{7}{5}, g(x) \text{ 单调递增},$$

$$g'(x) < 0, x > \frac{7}{5}, g(x) \text{ 单调递减},$$

$\therefore$ 当 $x = \frac{7}{5}$ 时 $g(x)$ 取最大值,

$$\therefore g(x)_{\max} = \frac{9}{20}.$$

故选C.

【标注】【知识点】直接求函数的最值(不含参)

七、填空题

(本大题共6小题,每小题5分,共30分)

1. 若复数 $z = 2i + \frac{2}{1+i}$, 其中 i 是虚数单位, 则复数 z 的模为 _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 复数 $z = 2i + \frac{2}{1+i} = 2i + \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 2i + 1 - i = 1 + i$,
则 $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

【标注】【知识点】复数的四则运算综合

2. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中, 含 x^3 项的系数等于 _____.

【答案】 15

【解析】 本题考查二项式定理的通项的应用, 属容易题.

$$T_{r+1} = C_6^r \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{6-r} \cdot (-1)^r \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^r = (-1)^r C_6^r \frac{x^{6-r}}{y^{\frac{6-r}{2}}} \cdot \frac{y^r}{x^{\frac{r}{2}}} = (-1)^r C_6^r \frac{x^{6-\frac{3}{2}r}}{y^{-\frac{3}{2}r+3}},$$

由已知得, $\frac{3}{2}r - 3 = 0$, $r = 2$,

$\therefore$ 含 x^3 项的系数为 $C_6^2(-1)^2 = 15$.

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项

3. 某长方体的长、宽、高分别为4, 4, 2, 则该长方体的体积与其外接球的体积之比为 _____.

【答案】 $8:9\pi$

【解析】 因为长方体的长、宽、高分别为4、4、2,

所以其体积 $V_{\text{长方形}} = 4 \times 4 \times 2 = 32$,

其外接球直径为 $2R = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$, 故 $R = 3$,

所以其外接球体积 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$,

因此, 长方体的体积与其外接球的体积之比为 $\frac{32}{36\pi} = \frac{8}{9\pi}$.

故答案为: $8:9\pi$.

【标注】 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题

4. 甲、乙两人参加一次历史知识竞赛, 已知在备选的10道试题中, 甲、乙分别都能答对其中的8道题. 规定每人都从备选题中随机抽出3道题进行回答, 至少答对2道题才算合格. 则甲不合格的概率是 ____; 甲、乙两人中恰有一人合格的概率是 ____.

【答案】 $\frac{1}{15}$; $\frac{224}{225}$

【解析】 甲的不合格率:

设甲考试不合格为事件 A ,

$$P(A) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{8 \times 1}{120} = \frac{1}{15} .$$

设乙考试不合格为事件 B ,

$$\therefore P(B) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15} ;$$

又 $\because A, B$ 事件相互独立,

$$\therefore \text{甲乙两人考试均不合格的概率为 } P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{15} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{225} ,$$

$$\therefore \text{甲乙两人至少一人合格的概率为 } P = 1 - P(AB) = \frac{224}{225} .$$

【标注】 【知识点】对立事件的概率和为1; 相互独立事件的概率乘法公式

5. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + 2b = 1$, 则 $a^2 + 4b^2 + \frac{1}{4ab}$ 的最小值是 ____ .

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 $\because$ 已知正实数 a, b 满足 $a + 2b = 1$,

$\therefore 1 = a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}$, 当且仅当 $a = 2b$ 时, 取等号,

$$\text{解得 } ab \leq \frac{1}{8} , \text{ 即 } ab \in \left(0, \frac{1}{8}\right] ,$$

$$\text{由 } (a + 2b)^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab = 1 ,$$

$$\text{则 } a^2 + 4b^2 + \frac{1}{4ab} = 1 - 4ab + \frac{1}{4ab} ,$$

$$\text{令 } t = ab , t \in \left(0, \frac{1}{8}\right) ,$$

$$\text{设 } f(t) = 1 - 4t + \frac{1}{4t} \left(t \in \left(0, \frac{1}{8}\right) , -4t \text{ 减函数 } \frac{1}{4t} \text{ 减函数 } \right) ,$$

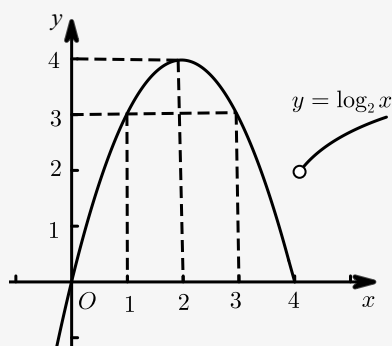
故 $f(t) = 1 - 4t + \frac{1}{4t}$ 在 $(0, \frac{1}{8}]$ 上是减函数，
 当 $t = \frac{1}{8}$ 时， $f(t)_{\min} = 1 - 4 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4 \times \frac{1}{8}} = \frac{5}{2}$ 。

【标注】 【知识点】 利用单调性求函数最值

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 4 \\ \log_2 x, & x > 4 \end{cases}$ ，若函数 $y = f(x)$ 在区间 $(a, a+1)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 _____；若函数 $g(x) = f[f(x)] - m$ 恰有 5 个零点，则 m 的取值范围为 _____。

【答案】 $a \leq 1$ 或 $a \geq 4$ ； $(0, 2]$

【解析】 作 $f(x)$ 的图象如下：



欲使 $f(x)$ 在 $(a, a+1)$ 上单调递增，

则有 $a+1 \leq 2$ 或 $a \geq 4$ ，即 $a \leq 1$ 或 $a \geq 4$ 。

由题意知， $g(x) = f[f(x)] - m$ 有 5 个零点，

令 $f(x) = t$ ，则有 $f(t) = m$ 。

①若 $m < 0$ ，则 $f(t) = m$ 有 1 个根，且 $t < 0$ ，

同理， $f(x) = t$ 有 1 个根，不合题意。

②若 $0 \leq m \leq 2$ ，则 $f(t) = m$ 有 2 个根，且 $0 \leq t \leq 2 - \sqrt{2}$ 或 $2 + \sqrt{2} \leq t \leq 4$ ，

当 $t \in [0, 2 - \sqrt{2}]$ 时， $f(x) = t$ 有 2 个根；

当 $t \in [2 + \sqrt{2}, 4]$ 时， $f(x) = t$ 有 3 个根；

当 $t = 4$ 时， $f(x) = t$ 有 2 个根，

故 $t = 4$ 不满足，即 $m = 0$ 不满足， $m \in (0, 2]$ 。

③若 $2 < m < 4$ ，则 $f(t) = m$ 有 3 个根，且 $2 - \sqrt{2} < t < 2$ 或 $2 < t < 2 + \sqrt{2}$ 或 $4 < t < 16$ ，

当 $t \in (2 - \sqrt{2}, 2)$ 时， $f(x) = t$ 有 2 个根，

当 $t \in (2, 2 + \sqrt{2})$ 时， $f(x) = t$ 有 3 个根，

当 $t \in (4, 16)$ 时， $f(x) = t$ 有 1 个根，

则共有 6 个根，不合题意。

④当 $m = 4$ 时， $f(t) = m$ 有 2 个根，且 $t = 2$ 或 16 ，

当 $t = 2$ 时, $f(x) = t$ 有2个根,

当 $t = 16$ 时, $f(x) = t$ 有1个根, 不合题意.

⑤若 $m > 4$, $f(t) = m$ 有1个根, 且 $t > 16$,

当 $t > 16$ 时, $f(x) = t$ 有1个根, 不合题意.

综上所述, $m \in (0, 2]$.

【标注】【知识点】已知零点情况求参数的取值范围; 函数综合

八、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $a = 3, b = \sqrt{2}, c \sin A = a \cos C$.

(1) 求角 C 的大小.

(2) 求边 c 的长.

(3) 求 $\cos(C - 2A)$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{\pi}{4}$.

(2) $\sqrt{5}$.

(3) $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

【解析】 (1) $\because c \sin A = a \cos C$,

$$\therefore \sin C \sin A = \sin A \cos C,$$

$$\because A \in (0, \pi), C \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \sin C = \cos C,$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 由余弦定理, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

将 $a = 3, b = \sqrt{2}, C = \frac{\pi}{4}$ 代入, 解得 $c = \sqrt{5}$.

(3) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$$\therefore b < c ,$$

$$\therefore B < C ,$$

$$\therefore B + C < 2C = \frac{\pi}{2} ,$$

$$\therefore A > \frac{\pi}{2} ,$$

$$\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = 1 ,$$

$$\therefore \cos A = -\frac{\sqrt{10}}{10} ,$$

$$\cos(C - 2A) = \cos C \cos 2A + \sin C \sin 2A$$

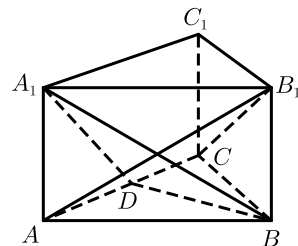
$$= \cos C(\cos^2 A - \sin^2 A) + \sin C \cdot 2 \sin A \cos A$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{1}{10} - \frac{9}{10} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 \times \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{10} \right)$$

$$= -\frac{7\sqrt{2}}{10} .$$

【标注】 【知识点】SSA类三角形（利用正弦定理）；SAS类三角形（利用余弦定理）

2. 如图所示，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面 ABC ，且底面是边长为2的正三角形，侧棱长为1， D 是 AC 的中点。



- (1) 求证： $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD .
 (2) 求直线 AB_1 与平面 A_1BD 所成角的正弦值 .
 (3) 求二面角 $A - BD - A_1$ 的大小 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(3) $\frac{\pi}{4}$.

【解析】(1) 设 AB_1 交 A_1B 于点 P ，连接 PD ，

$\because D$ 是 AC 的中点，

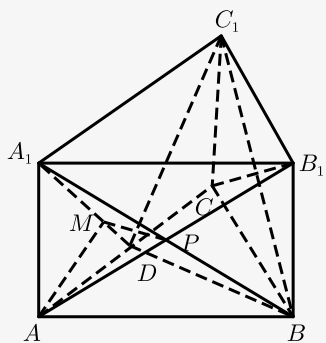
$\therefore PD \parallel B_1C$ ，

$\because B_1C \not\subset$ 平面 A_1BD ，

$PD \subset$ 平面 A_1BD ，

$\therefore B_1C \parallel$ 平面 A_1BD 。

(2) 作 $AM \perp A_1D$ ， M 为垂足，



$\because A_1A \perp$ 底面 ABC ， $BD \subset$ 平面 ABC ，

$\therefore BD \perp A_1A$ ，

又底面是边长为 2 的正三角形， D 为 AC 中点，

$\therefore BD \perp AC$ ，

$\because A_1A \cap AC = A$ ，

$\therefore BD \perp$ 平面 A_1ACC_1 ，

$\therefore BD \perp A_1D$ ，

$\because$ 在矩形 A_1ACC_1 中， $A_1A = 1$ ， $AC = 2$ 。

$\therefore A_1D \perp C_1D$ ，

$\therefore A_1D \perp$ 平面 C_1DB ，

$\therefore$ 平面 $A_1BD \perp$ 平面 C_1BD 。

$\because$ 平面 $A_1ACC_1 \cap$ 平面 $A_1BD = A_1D$ ，

$\therefore AM \perp$ 平面 A_1BD ，连接 MP ，

则 $\angle APM$ 就是直线 AB_1 与平面 A_1BD 所成的角，

$\because A_1A = 1$ ， $AD = 1$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AA_1D$ 中， $AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\because AP = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，

$\therefore \sin \angle APM = \frac{AM}{AP} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ，

$\therefore$ 直线 AB_1 与平面 A_1BD 所成的角正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

(3) $\because$ 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ，

$\therefore AA_1 \perp \text{底面} ABC$,
 又 $\because BD \perp AC$,
 $\therefore A_1D \perp BD$,
 $\therefore \angle A_1DA$ 就是二面角 ,
 $A_1 - BD - A$ 的平面角 ,
 $\because AA_1 = 1$, $AD = \frac{1}{2}AC = 1$,
 $\therefore \tan \angle A_1DA = \frac{AA_1}{AD} = 1$,
 $\therefore \angle A_1DA = \frac{\pi}{4}$.
 即二面角 $A_1 - BD - A$ 的大小是 $\frac{\pi}{4}$.

【标注】 【知识点】几何法求空间角

3. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 已知 $b_1 = 1$, $b_3 = b_2 + 2$, $b_4 = a_3 + a_5$, $b_5 = a_4 + 2a_6$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设数列 $\{(-1)^{a_n}\}$ 的前 n 项和 T_n , 记 $c_n = \frac{3 + T_{2n-1}}{2} b_{2n-1} + \frac{3 + T_{2n}}{2} b_{2n}$, 求 c_n .
- (3) 求 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{c_{n+1-i}}$.

【答案】 (1) $a_n = n$, $b_n = 2^{n-1}$.

(2) $c_n = 2^{2n}$.

(3) $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{n+1-i}} = \frac{n}{3} - \frac{1}{9} + \frac{4^{-n}}{9}$.

【解析】 (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

由 $b_1 = 1$, $b_3 = b_2 + 2$ 得 $q^2 - q - 2 = 0$,

$\therefore q = 2$ 或 $q = -1$ (舍),

$\therefore b_n = 2^{n-1}$,

$\because \{a_n\}$ 是等差数列, 且 $b_4 = a_3 + a_5$, $b_5 = a_4 + 2a_6$, (注意等差数列性质的应用)

$\therefore 2a_4 = 8$, $a_4 = 4$, $2a_6 = 2^4 - a_4 = 12$,

$$\therefore a_6 = 6,$$

$$\therefore d = \frac{1}{2}(a_6 - a_4) = 1, a_1 = 1,$$

$$\therefore a_n = n,$$

$$\text{综上, } a_n = n, b_n = 2^{n-1}.$$

$$\text{故答案为: } a_n = n, b_n = 2^{n-1}.$$

(2) 由(1)中 $a_n = n$,

$$\therefore (-1)^{a_n} = (-1)^n,$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} -1, n \\ 0, n \end{cases},$$

$$\therefore c_n = \frac{3-1}{2} \cdot 2^{2n-2} + \frac{3+0}{2} \cdot 2^{2n-1} = 4 \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n},$$

$$\text{故 } c_n = 2^{2n}.$$

$$\text{故答案为: } c_n = 2^{2n}.$$

(3) 设 $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{c_{n+1-i}}$, 将(1)(2)所求代入得, 本题考查错位相减法求和.

$$S_n = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{2}{2^{2(n-1)}} + \cdots + \frac{n}{2^{2-1}}$$

$$= \frac{1}{4^n} + \frac{2}{4^{n-1}} + \frac{3}{4^{n-2}} + \cdots + \frac{n}{4}, \quad \textcircled{1},$$

$$\therefore 4S_n = \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{2}{4^{n-2}} + \frac{3}{4^{n-3}} + \cdots + \frac{n-1}{4} + n, \quad \textcircled{2},$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } -3S_n = \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{4} - n = \frac{4^{-n}(1-4^n)}{1-4} - n,$$

$$\therefore -3S_n = \frac{4^{-n}-1}{-3} - n, S_n = \frac{n}{3} + \frac{4^{-n}-1}{9} = \frac{n}{3} - \frac{1}{9} + \frac{4^{-n}}{9},$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{c_{n+1-i}} = \frac{n}{3} - \frac{1}{9} + \frac{4^{-n}}{9},$$

$$\text{故答案为: } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{c_{n+1-i}} = \frac{n}{3} - \frac{1}{9} + \frac{4^{-n}}{9}.$$

【标注】 【知识点】 错位相减法求和

4. 已知抛物线 $G_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 与离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个交点为 $P(1, t)$, 点 P 到抛物线 C_1 的焦点的距离为 2.

(1) 求 C_1 与 C_2 的方程.

(2) 设 O 为坐标原点, 在第一象限内, 椭圆 C_2 上是否存在点 A , 使过 O 作 OA 的垂线交抛物线 C_1 于点 B , 直线 AB 交 y 轴于点 E , 且 $\angle OAE = \angle EOB$? 若存在, 求出点 A 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) C_1 方程为 $y^2 = 4x$, C_2 方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$.

(2) 不存在, 理由见解析.

【解析】(1) $C_1: y^2 = 2px$,

C_1 焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$,

$\therefore P(1, t)$ 到 C_1 焦点距离为 2,

$$\therefore \left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 + t^2 = 2^2 \quad ①,$$

又 $P(1, t)$ 在 C_1 上,

$$\therefore t^2 = 2p \quad ②,$$

联立①、②得 $p = 2, t = 2$,

$\therefore C_1$ 方程为 $y^2 = 4x$,

$$P(1, 2), C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}c, b = \sqrt{a^2 - c^2} = c,$$

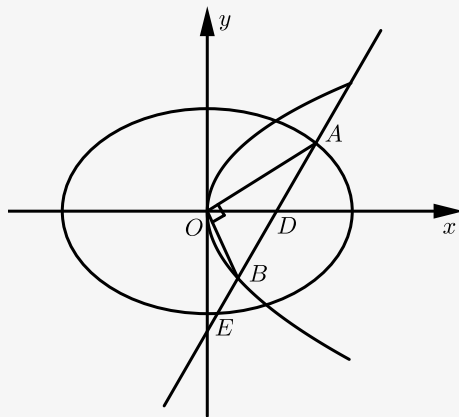
$$\therefore \frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1, P \text{ 在 } C_2 \text{ 上},$$

$$\therefore P(1, 2) \text{ 代入得 } \frac{1}{2c^2} + \frac{4}{c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{9}{2},$$

$$\therefore a^2 = 9, b^2 = \frac{9}{2},$$

$$\therefore C_2 \text{ 方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1.$$

(2)



$\therefore$ 在第一象限内,

$\therefore OA$ 斜率存在且不为 0,

设 $OA: y = kx (x \neq 0)$, 由于 $OA \perp BO$,

$$\therefore OB: y = -\frac{1}{k}x, \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 \\ y = kx \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2k^2x^2 = 9 \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{9}{1 + 2k^2}},$$

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{k^2} = 4x \Rightarrow x = 4k^2 \text{ 或 } 0 \text{ (舍去)},$$

在第一象限内, 若存在点A满足 $\angle OAE = \angle EOB$,

则 $k > 0$,

此时 $A\left(\sqrt{\frac{9}{1+2k^2}}, k\sqrt{\frac{9}{1+2k^2}}\right)$, $B(4k^2, -4k)$,

设AB与x轴交于点D,

$\therefore \angle OAE = \angle EOB$, $\angle AOB = \angle DOE = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAD = \angle AOD$, $\angle DOB = \angle OBD$,

$\therefore AD = OD = BD$,

即D为线段AB中点,

$\therefore y_A = -y_B$,

即 $k\sqrt{\frac{9}{1+2k^2}} = 4k \Rightarrow k^2 = -\frac{7}{32}$ (舍),

$\therefore$ 不存在适合题意的点A.

【标注】 【知识点】角度问题; 椭圆的标准方程

5. 已知函数 $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = m(2x+1)$ ($m \neq 0$) (e 为自然对数的底数), $h(x) = f(x) - g(x)$.

(1) 若 $m = e$, 求函数 $h(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $h(x) \geq 1 - m$ 恒成立, 求实数 m 的值.

(3) 若直线 $y = g(x)$ 是曲线 $f(x) = e^{2x}$ 的一条切线, 求证: 对任意实数 $a > b$, 都有

$$\frac{h(a) - h(b)}{a - b} \geq 2e^{2b} - 2.$$

【答案】 (1) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 为 $h(x)$ 的单调递增区间, $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 为 $h(x)$ 的单调递减区间.

(2) 1.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) 当 $m = e$ 时, $h(x) = e^{2x} - e(2x+1)$,

$$\therefore h'(x) = 2e^{2x} - 2e = 2e(e^{2x-1} - 1),$$

当 $h'(x) > 0$ 时, 解得 $x > \frac{1}{2}$,

此时 $h(x)$ 为单调递增函数, $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 为 $h(x)$ 的单调递增区间,

当 $h'(x) < 0$ 时, 解得 $x < \frac{1}{2}$,

此时 $h(x)$ 为单调递减函数, $(-\infty, \frac{1}{2})$ 为 $h(x)$ 的单调递减区间.

(2) 由 $h(x) \geq 1 - m$ 得 $e^{2x} - m(2x + 1) \geq 1 - m$, 即 $e^{2x} - 2mx - 1 \geq 0$ 恒成立,

令 $\varphi(x) = e^{2x} - 2mx - 1$, 则 $\varphi'(x) = 2e^{2x} - 2m$,

当 $2m \leq 0$, 即 $m \leq 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$ 恒成立,

$\therefore \varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又 $\varphi(0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) < 0$ 不符合题意;

当 $2m > 0$, 即 $m > 0$ 时, 令 $\varphi'(x) = 0$ 得 $x = \ln \sqrt{m}$,

当 $x \in (-\infty, \ln \sqrt{m})$ 时,

$\varphi'(x) < 0$, 当 $x \in (\ln \sqrt{m}, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$,

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(-\infty, \ln \sqrt{m})$ 单调递减, 在 $(\ln \sqrt{m}, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(\ln \sqrt{m})$,

又 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) \geq 0$ 恒成立,

$\therefore \ln \sqrt{m} = 0$,

解得: $m = 1$.

(3) 直线 $y = g(x)$ 是曲线 $f(x) = e^{2x}$ 的一条切线,

设切点为 (x_0, y_0) ,

$\therefore f'(x) = 2e^{2x}$,

$\therefore \begin{cases} 2e^{2x_0} = 2m \\ e^{2x_0} = m(2x_0 + 1) \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x_0 = 0 \\ m = 1 \end{cases}$,

可得 $h(x) = e^{2x} - 2x - 1$,

欲证: $\frac{h(a) - h(b)}{a - b} \geq 2e^{2b} - 2$,

即证: $\frac{e^{2a} - 2a - 1 - (e^{2b} - 2b - 1)}{a - b} \geq 2e^{2b} - 2$,

即证: $\frac{e^{2a} - e^{2b}}{a - b} \geq 2e^{2b}$, $a > b$,

即证: $e^{2(a-b)} - 1 \geq 2(a - b)$,

令 $t = a - b > 0$,

即证: $e^{2t} - 1 \geq 2t$, $t > 0$,

令 $\varphi(x) = e^{2x} - 1 - 2x$, $t > 0$,

$\varphi'(t) = 2e^{2t} - 2 > 0$,

$\therefore \varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 为单调递增函数,

$\therefore \varphi(t) > \varphi(0) = 0$,

即: $e^{2t} - 1 - 2t > 0$,

得证： $e^{2t} - 1 > 2t$ ，

即证得： $\frac{h(a) - h(b)}{a - b} \geq 2e^{2b} - 2$ 。

【标注】【知识点】双变量问题；利用导数解决不等式恒成立问题

九、和平二模

十、选择题

(本大题共9小题，每小题5分，共45分)

1. 已知集合 $U = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $A = \{-1, 0, 1\}$ ， $B = \{x \in U \mid |x - 1| < 2\}$ ，则 $A \cap B = (\quad)$ 。

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

【答案】A

【解析】 $\because U = \{0, 1, 2, 3\}$ ，

$\therefore B = \{x \in U \mid -1 \leq x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$ ，

且 $A = \{-1, 0, 1\}$ ，

$\therefore A \cap B = \{0, 1\}$ 。

故选：A。

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算

2. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $1 - x^2 < 0$ ”是“ $x^3 > 1$ ”的 ()。

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】由 $1 - x^2 < 0$ 可得 $x < -1$ 或 $x > 1$ ，

由 $x^3 > 1$ 可得 $x > 1$ ，

所以 $x < -1$ 或 $x > 1$ 不能推出 $x > 1$ ，

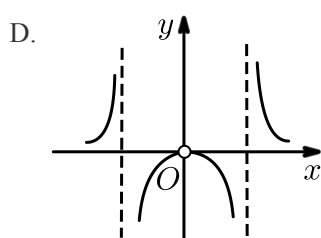
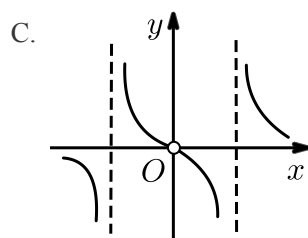
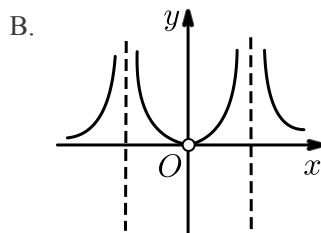
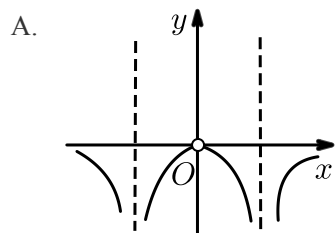
$x > 1$ 可以推出 $x < -1$ 或 $x > 1$ ，

故“ $1 - x^2 < 0$ ”是“ $x^3 > 1$ ”的必要不充分条件。

故选B .

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

3. 函数 $y = \frac{1}{\log_2 |x|}$ 的部分图象大致为 () .



【答案】 D

【解析】 $\because \frac{1}{\log_2 |-x|} = \frac{1}{\log_2 |x|}$,

$\therefore f(x)$ 是偶函数 , 排除 C ,

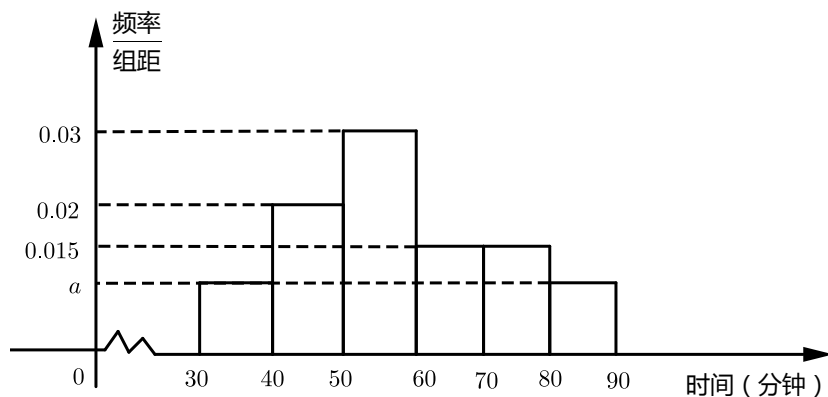
当 $x = 2$ 时 , $y = \frac{1}{\log_2 2} = 1$, 排除 A ,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时 , $y = \frac{1}{\log_2 \frac{1}{2}} = -1$, 排除 B .

故选 D .

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题 ; 根据奇偶性确定图象

4. 某校通过问卷调查了解500名学生周末参加体育锻炼的时间 , 频率分布直方图如下图所示 , 数据的分组依次为 : $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90]$, 则在调查的学生中周末参加体育锻炼的时间不少于60分钟的人数是 () .



A. 125

B. 175

C. 200

D. 300

【答案】 C**【解析】** 根据频率分布直方图知，设调查的学生中周末参加体育锻炼的时间在 $[30, 40)$ 内的频率为 x ，则 $0.15 + 0.15 + x = 1 - x - 0.2 - 0.3$ ，解得 $x = 0.1$ ，

所以不少于60分钟的频率为：

 $0.15 + 0.15 + 0.1 = 0.4$ ，对应的人数是 $500 \times 0.4 = 200$ （人）。

故选C。

【标注】 【知识点】 频数与频率5. 设 $a = 2^{\log_2 3}$ ， $b = \log_{0.3} 0.4$ ， $c = 3 \ln 2$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）。A. $b < a < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $a < b < c$ **【答案】** C**【解析】** $a = 2^{\log_2 3} = 3$ （对数公式 $a^{\log_a x} = x$ ）， $b = \log_{0.3} 0.4 > \log_{0.3} 1 = 0$ ，又 $\log_{0.3} 0.4 < \log_{0.3} 0.3 = 1$ ， $\therefore 0 < b < 1$ ， $c = 3 \ln 2 > \ln e = 1$ ，又 $3 \ln 2 < 3 \ln e = 3$ ， $\therefore 1 < c < 3$ ，综上所述 $a > c > b$ 。

故选C。

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小6. 已知圆柱 OO_1 的两底面圆周上的所有点都在球 C 的表面，且圆柱 OO_1 的底面半径为1，高为 $2\sqrt{3}$ ，则球 C 的表面积为（ ）。A. 2π B. 8π C. 12π D. 16π

【答案】D

【解析】设球的半径为 R ，则 $2R = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ ，

所以， $R = 2$ ，

因此，球 O 的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$ 。

故选D。

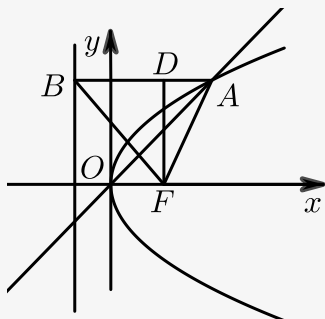
【标注】【知识点】空间几何体的表面积

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于点 A ，点 B 是抛物线的准线上一点，抛物线的焦点 F 为双曲线的一个焦点，且 $\triangle ABF$ 为等边三角形，则双曲线的方程为（ ）。

A. $\frac{7x^2}{3} - \frac{7y^2}{4} = 1$ B. $\frac{7x^2}{4} - \frac{7y^2}{3} = 1$ C. $\frac{3x^2}{7} - \frac{4y^2}{7} = 1$ D. $\frac{7x^2}{12} - \frac{7y^2}{16} = 1$

【答案】A

【解析】如图，



由抛物线 $y^2 = 4x$ ，得 $F(1, 0)$ ，则双曲线的半焦距 $c = 1$ ，

由抛物线定义可知， $|AF| = |AB|$ 时， AB 与 x 轴平行，

$\therefore \triangle ABF$ 为等边三角形，

$\therefore A$ 点的横坐标为3，代入 $y^2 = 4x$ ，可得 $A(3, 2\sqrt{3})$ ，

则双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ ，即 $\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，

联立
$$\begin{cases} c = 1 \\ \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}, \text{解得 } a^2 = \frac{3}{7}, b^2 = \frac{4}{7},$$

$\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{7x^2}{3} - \frac{7y^2}{4} = 1$ 。

故选：A。

【标注】【知识点】双曲线的焦点三角形问题（小题）；双曲线的标准方程

8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示，其中 $\omega > 0$ ， $|\varphi| < \pi$ 。给出下列结论：

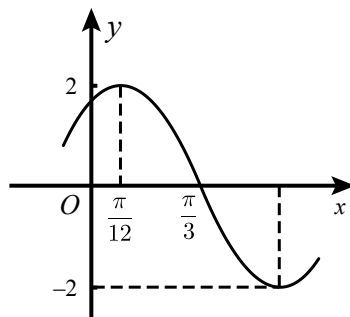
① ω 的值为2；

② φ 的值为 $-\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$ ；

③直线 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴；

④函数 $f(x)$ 的解析式可表示为 $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。

其中所有正确结论的序号是（ ）。



A. ①②

B. ①④

C. ①②③

D. ①②④

【答案】 B

【解析】 ① $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$, $\omega = 2$, 故①正确；

②将 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 代入 $f(x) = 2 \cdot \sin(2x + \varphi)$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$),

$\therefore |\varphi| < \pi$,

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$,

故②错误；

③相邻2条对称轴间的距离为 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$,

$x_{\text{对}} = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

$k = 1$ 时, $x = \frac{7\pi}{12}$,

$k = -1$ 时, $x = -\frac{5\pi}{12}$,

故③错误；

④ $f(x) = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

$= 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

$= 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

故④正确；

综上所述①④正确。

故选B。

【标注】 【知识点】已知正弦型函数图象求参数值

已知函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2) = f(x)$ ，且当 $-1 \leq x < 1$ 时， $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \notin \mathbf{Z} \\ e^x, & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ ， $g(x) = \begin{cases} |\log_a x|, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 恰有5个互异的实数解，则实数 a 的取值范围是()。

A. (7, 9]

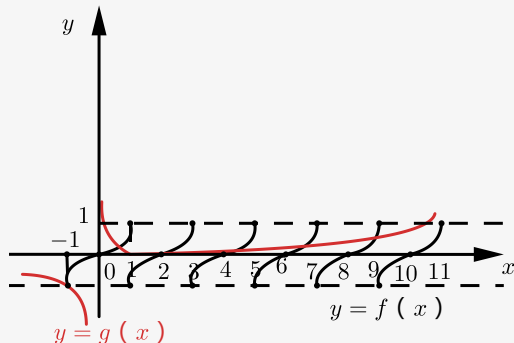
C. $\left[\frac{1}{11}, \frac{1}{9}\right) \cup (9, 11]$

B. $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{7}\right) \cup (7, 9]$

D. $\left[\frac{1}{11}, \frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{9}\right) \cup (9, 10) \cup (10, 11]$

【答案】 D

【解析】



$\because y = f(x)$ 对任意 x 满足 $f(x+2) = f(x)$ ，

$\therefore f(x)$ 的周期 $T = 2$ ，

$\therefore$ 在同一坐标系下画出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像，

由 $f(x) = g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上恰有5个互异根， $\Leftrightarrow y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上有5个交点，

当 $x = 1$ 时， $f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq g(-1) = -1$ ，

而当 $x \notin \mathbf{Z}$ 时， $x^3 = \frac{1}{x}$ ，无解，

$\therefore y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 y 轴左侧无交点，

$\therefore y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 y 轴右侧有5个交点，

根据把 $f(x)$ 周期性与 $g(x)$ 图象结合，

二者在 $(0, 1)$ ， $(1, 2)$ ， $(2, 3)$ ， $(3, 4)$ ， $(4, 5)$ ， $(5, 6)$ ， $(6, 7)$ ， $(7, 8)$ ， $(8, 9)$ 这些区间中共有5个交点，

故 $y = f(x)$ 图像会在 $(9, 10)$ 或 $(10, 11]$ 内与 $y = 1$ 相交，

$\therefore \begin{cases} |\log_a 9| < 1 \\ |\log_a 10| > 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |\log_a 9| < 1 \\ |\log_a 11| \geq 1 \end{cases}$ ，

$\therefore a \geq 1$ 或 $0 < a < \frac{1}{9}$ ， $1 < a < 10$ 或 $\frac{1}{10} < a < 1$ ，

$a > 9$ 或 $0 < a < \frac{1}{9}$ ， $1 < a \leq 11$ 或 $\frac{1}{11} \leq a < 1$ ，

综上 a 的取值范围 $\left[\frac{1}{11}, \frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{9}\right) \cup (9, 10) \cup (10, 11]$ 。

故选D。

【标注】 【知识点】 利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

十一、 填空题

(本大题共6小题，每小题5分，共30分)

1. i 是虚数单位，则 $\left|\frac{3-i}{1+i}\right|$ 的值为 _____ .

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 $\therefore \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$,

$$\therefore \left|\frac{3-i}{1+i}\right| = |1-2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} ,$$

故答案为： $\sqrt{5}$.

【标注】 【知识点】 复数的模

2. 在 $\left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中， x^3 的系数是 _____ .

【答案】 2160

【解析】 $T_{r+1} = C_6^r (2x)^{6-r} \left(-3x^{-\frac{1}{2}}\right)^r = C_6^r (-3)^r (2)^{6-r} x^{6-\frac{3}{2}r}$

$$\text{当 } 6 - \frac{3}{2}r = 3 \Rightarrow r = 2 ,$$

$$\therefore T_3 = C_6^2 \cdot (-3)^2 (2)^4 x^3 = 2160x^3 ,$$

$\therefore x^3$ 的系数是2160 ,

$$\begin{aligned} T_3 &= C_6^2 \cdot (-3)^2 (2)^4 x^3 \\ &= \left(\frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 9 \times 16\right) x^3 \\ &= (15 \times 9 \times 6) x^3 \\ &= 2160 \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数

3. 设 $m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq 0$ ，若直线 $l: 2x - y + m = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 相切，则 $m =$ _____ .

【答案】 -10

【解析】 由题干可知： $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$,

$$\text{标准方程为 } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 ,$$

故圆心为 $(2, -1)$ ，半径 $r = \sqrt{5}$,

$\therefore$ 直线 $l: 2x - y + m = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 相切，
 则圆心 $(2, -1)$ 到直线 $l: 2x - y + m = 0$ 的距离为圆的半径，即

$$\frac{|4 + 1 + m|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5},$$
 $\therefore |5 + m| = 5, m \neq 0,$
 $\therefore 5 + m = -5,$
 $\therefore m = -10.$

【标注】 【知识点】已知直线和圆的位置关系求参数

4. 某校从5名学生中选派3人参加劳动技能大赛. 已知这5名学生中有高一年级学生2名，高二年级学生2名，高三年级学生1名，则所选3人分别来自不同年级的概率为 ____ . 记所选3人中高一年级学生的人数为 X ，则随机变量 X 的数学期望 $E(X) =$ ____ .

【答案】 $\frac{2}{5}; \frac{6}{5}$

【解析】 某校从5名学生中选派3人参加劳动技能大赛.

这5名学生中有高一年级学生2名，高二年级学生2名，高三年级学生1名，

基本事件总数 $n = C_5^3 = 10$ ，

所选3人分别来自不同年级包含的基本事件个数 $m = C_2^1 C_2^1 C_1^1 = 4$ ，

$\therefore$ 所选3人分别来自不同年级的概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ，

记所选3人中高一年级学生的人数为 X ，

则 X 可能取值为 0, 1, 2，

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{6}{10},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$\therefore$ 随机变量的数学期望

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}.$$

故答案为： $\frac{2}{5}, \frac{6}{5}$.

【标注】 【知识点】超几何分布；离散型随机变量的数学期望

5. 已知正实数 x, y 满足 $x + y = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} + 6$ ，则 $x + y$ 的最小值是 ____ .

【答案】 8

【解析】由 $x+y = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} + 6$ ，可得 $x+y-6 = \frac{1}{x} + \frac{9}{y}$ 。

两边同时乘以 $x+y$ ，可得 $(x+y-6) \cdot (x+y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right) \cdot (x+y)$ ，

因为 $\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right) \cdot (x+y) = 10 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y} \geq 10 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{9x}{y}} = 16$ ，

当且仅当 $y=3x$ ，即 $x=2$ ， $y=6$ 时，等号成立，

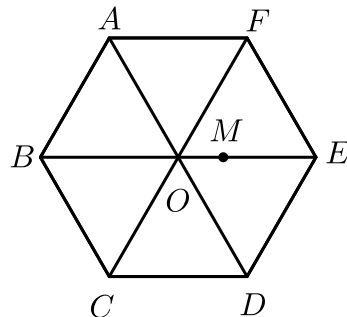
则 $(x+y-6) \cdot (x+y) \geq 16$ ，即 $(x+y)^2 - 6(x+y) - 16 \geq 0$ ，

解得 $x+y \leq -2$ （舍去）或 $x+y \geq 8$ 。

故答案为：8。

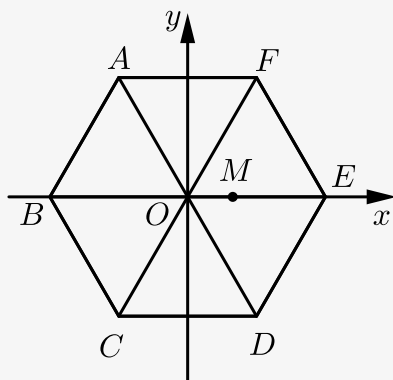
【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值

6. 如图所示，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2，线段 AD ， BE ， CF 交于点 O ，则 $|\vec{OA} + \vec{CE}| = \underline{\hspace{2cm}}$ ；若点 M 是线段 BE 上一点，且 $\vec{AD} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{DM} + \frac{1}{3}\vec{FM}\right) = -2$ ，则 $|\vec{OM}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 4； $\frac{2}{5}$

【解析】 以 O 为坐标原点，建立平面直角坐标系如图，



则 $A(-1, \sqrt{3})$ ， $C(-1, -\sqrt{3})$ ， $E(2, 0)$ ， $F(1, \sqrt{3})$ ， $D(1, -\sqrt{3})$ ，

$\therefore \vec{OA} = A(-1, \sqrt{3})$ ， $\vec{CE} = (3, \sqrt{3})$ 。

$\therefore \vec{OA} + \vec{CE} = (2, 2\sqrt{3})$ ，

则 $|\vec{OA} + \vec{CE}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ ， $\vec{AD} = (2, -2\sqrt{3})$ 。

设 $M(a, 0) (-2 \leq a \leq 2)$,

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{DM} = \left(\frac{a-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \frac{1}{3}\overrightarrow{FM} = \left(\frac{a-1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AD} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FM} \right) = -2,$$

$$\text{得 } (2, -2\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{5(a-1)}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{5}{3}(a-1) - 1 = 0,$$

$$\text{即 } a = \frac{2}{5},$$

$$\therefore M\left(\frac{2}{5}, 0\right), \text{ 则 } |\overrightarrow{OM}| = \frac{2}{5}.$$

故答案为: $4; \frac{2}{5}$.

【标注】 【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算;平面向量数量积的坐标运算

十二、解答题

(本大题共5小题,共75分)

1. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\tan B = 1$, $a = \sqrt{2}$, $b = 3$.

(1) 求 $\sin A$.

(2) 求 $\cos(2A - B)$.

(3) 求 c 的长.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$.

(2) $\frac{7\sqrt{2}+8}{18}$.

(3) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

【解析】 (1) $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = 1 \Rightarrow \sin B = \cos B$,

又 $\because B \in (0, \pi)$, 则 $B = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore$ 由正弦定理知: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{1}{3}$.

(2) $a = \sqrt{2} < b = 3$, 则 $A < B$, 且 $\sin A = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{7}{9}, \sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\therefore \cos(2A - B) = \cos 2A \cdot \cos B + \sin 2A \cdot \sin B$$

$$= \frac{7}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{7\sqrt{2} + 8}{18}.$$

$$(3) \cos C = -\cos(A + B) = -\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4 - \sqrt{2}}{6},$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$= 2 + 9 - 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times \left(-\frac{4 - \sqrt{2}}{6}\right)$$

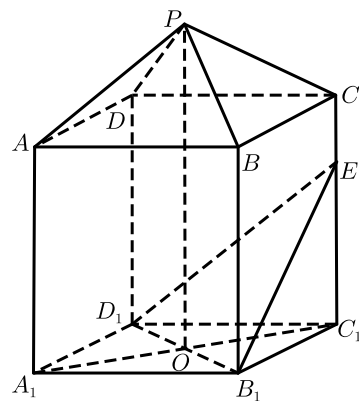
$$= 9 + 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore c = \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}.$$

【标注】【知识点】SAS类三角形（利用余弦定理）；利用正弦定理求解边角；二倍角的余弦

2. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 和四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

组合而成的几何体中，侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， A_1C_1 与 B_1D_1 交于点 O ， $PO \parallel AA_1$ ，点 E 是棱 CC_1 上一点， $AA_1 = 3$ ， $CE = 1$ 。



(1) 证明： $PA \perp B_1D_1$ 。

(2) 求二面角 $B_1 - D_1E - C_1$ 的正弦值。

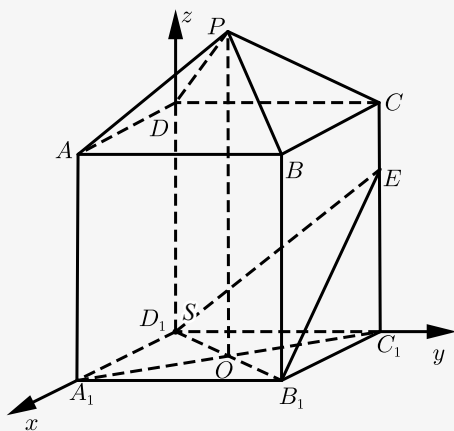
(3) 若直线 $PA \parallel$ 平面 B_1D_1E ，求直线 PA 和 B_1E 所成角的余弦值。

【答案】 (1) 证明见解析。

$$(2) \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$(3) \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【解析】(1) 如图建立空间直角坐标系，



$$P(1, 1, z), A(2, 0, 3), B_1(2, 2, 0), D_1(0, 0, 0), E(0, 2, 2),$$

$$\overrightarrow{PA} = (1, -1, 3-z), \overrightarrow{B_1D_1} = (-2, -2, 0),$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{B_1D_1} = 0 \Rightarrow PA \perp B_1D_1.$$

(2) 设面 B_1D_1E 的法向量 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\overrightarrow{B_1D_1} = (-2, -2, 0), \overrightarrow{D_1E} = (0, 2, 2), \begin{cases} \overrightarrow{B_1D_1} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{D_1E} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2y_1 = 0 \\ 2y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x_1 = 1, \text{ 则 } y_1 = -1, z_1 = 1,$$

$$\text{则 } \vec{n}_1 = (1, -1, 1),$$

$$\text{设面 } D_1C_1E \text{ 的法向量 } \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2), \overrightarrow{D_1C_1} = (0, 2, 0), \overrightarrow{D_1E} = (0, 2, 2),$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_1C_1} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \overrightarrow{D_1E} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2y_2 = 0 \\ 2y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } y_2 = 0, \text{ 则 } z_2 = 0, \text{ 令 } x_2 = 1, \vec{n}_2 = (1, 0, 0),$$

设二面角 $B_1 - D_1E - C_1$ 大小为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

由图知 θ 为锐角,

$$\text{故 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(3) $\overrightarrow{PA} = (1, -1, 3-z)$, 面 B_1D_1E 法向量 $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$, $PA \parallel \text{面 } B_1D_1E \Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}_1 = 0$,

$$1 + 1 + 3 - z = 0 \Rightarrow z = 5, P(1, 1, 5), \overrightarrow{PA} = (1, -1, -2), \overrightarrow{B_1E} = (-2, 0, 2),$$

设 PA 与 B_1E 所成角 θ_1 ,

$$\text{则} \cos \theta_1 = \left| \cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{B_1E} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{B_1E}|}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{B_1E}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【标注】 【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的垂直问题；向量法解决异面直线所成角问题

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ，点 $A(-a, 0)$ 与点 $B(0, b)$ 是椭圆的顶点， $|BF| = \frac{2}{3}|AF|$ 。

(1) 求椭圆 C 的离心率 e 。

(2) 设以离心率 e 为斜率的直线 l 经过点 A ，与椭圆 C 相交于点 P (点 P 不在坐标轴上)。

① 证明：点 F 在以线段 AP 为直径的圆上。

② 若 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 8$ ，求椭圆 C 的方程。

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$ 。

(2) ① 证明见解析。

$$\text{② } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

【解析】 (1) F 坐标为 $(c, 0)$ ，

$$\because a^2 = b^2 + c^2, |AF| = c + a, |BF| = \sqrt{b^2 + c^2} = a, |BF| = \frac{2}{3}|AF|,$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}(c + a),$$

$$\therefore a = 2c,$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

故该椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(2) ① 设 $l: y = \frac{1}{2}(x + a)$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = \frac{1}{2}(x + a) \end{cases} \text{得 } (4b^2 + a^2)x^2 + 2a^3x + a^4 - 4a^2b^2 = 0,$$

$$\text{由 (1) 得 } a = 2c, b = \sqrt{3}c,$$

$$\therefore \text{整理得 } x^2 + cx - 2c^2 = 0,$$

$$x_A x_P = -2c^2 = -a \cdot x_P = -2c \cdot x_P ,$$

$$\therefore x_P = c , y_P = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{3}{2}c ,$$

$$\therefore x_P = x_F = c ,$$

$$\therefore PF \perp x \text{轴} , \angle AFB = 90^\circ ,$$

$\therefore$ 点 F 在以 AP 为直径的圆上 .

$$\textcircled{2} \quad \because A(-2c, 0) , P\left(c, \frac{3}{2}c\right) , B(0, \sqrt{3}c) , F(c, 0) ,$$

$$\overrightarrow{AP} = \left(3c, \frac{3}{2}c\right) , \overrightarrow{BF} = (c, -\sqrt{3}c) , \overrightarrow{AB} = (2c, \sqrt{3}c) , \overrightarrow{BP} = \left(c, \frac{3}{2}c - \sqrt{3}c\right) ,$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 3c^2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}c^2 + 2c^2 + 2c^2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}c^2 - 3c^2$$

$$= 2c^2 = 8 ,$$

$$\therefore c = 2 , \text{ 则 } a = 2c = 4 , b = \sqrt{3}c = 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 .$$

【标注】 【知识点】 向量问题

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列 , $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{1}{a_1}$, $2S_2$, $8a_3$ 成等差数列 , $3a_2 = a_1 + 2a_3$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 满足 $T_n = n^2 + n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 :

$$(2) \quad \text{若 } c_n = \begin{cases} a_n b_n, n \text{ 是奇数} \\ \frac{(3n+8)a_n}{b_n b_{n+2}}, n \text{ 是偶数} \end{cases} , \text{ 求 } \sum_{i=1}^{2n} c_i .$$

【答案】 (1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$; $b_n = 2n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

$$(2) \quad \frac{169}{72} - \left(\frac{8}{3}n + \frac{20}{9}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2} .$$

【解析】 (1) $\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列 ,

$\therefore$ 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($a_1 > 0$, $0 < q < 1$ 或 $a_1 < 0$, $q > 1$) ,

$\therefore \frac{1}{a_1}$, $2S_2$, $8a_3$ 成等差数列 ,

$$\therefore 2 \times 2S_2 = \frac{1}{a_1} + 8a_3 ,$$

$$\Rightarrow 4(a_1 + a_2) = \frac{1}{a_1} + 8a_3 \Rightarrow 4(a_1 + a_1 q) = \frac{1}{a_1} + 8a_1 q^2$$

$$\Rightarrow 8a_1^2q^2 - 4a_1^2q - 4a_1^2 + 1 = 0 \textcircled{1},$$

$$3a_2 = a_1 + 2a_3 \Rightarrow 2q^2 - 3q + 1 = 0 \textcircled{2},$$

$$\text{联立}\textcircled{1}\textcircled{2}\text{得} a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2} \text{或} a_1 = -\frac{1}{2}, q = \frac{1}{2} \text{ (舍) 或 } q = 1 \text{ (舍)},$$

$$\therefore a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\text{即 } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\textcircled{1} n=1 \text{ 时, } b_1 = T_1 = 2.$$

$$\textcircled{2} n \geq 2 \text{ 时,}$$

$$\therefore T_n = n^2 + n, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore T_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1), n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore b_n = T_n - T_{n-1} = 2n, n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 满足 } b_1,$$

$$\therefore b_n = 2n, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, b_n = 2n,$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \text{ 为奇数} \\ \frac{(3n+8)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4n(n+2)} = \frac{(3n+8)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n(4n+8)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{n+2}, n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

当 n 为偶数时,

$$\text{记 } N = c_2 + c_4 + \cdots + c_{2n}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} \right] + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6} \right] + \cdots + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{2n} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2} \right] \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{8} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2}. \end{aligned}$$

当 n 为奇数时,

$$\text{记 } M = c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + (4n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \textcircled{1},$$

$$\text{则 } \frac{1}{4}M = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + (4n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \textcircled{2},$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{3}{4}M = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$- (4n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1},$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - (4n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 1$$

$$= 4 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \right] - (4n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 1$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{4} - 1} - (4n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{3} - \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n - (4n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \\
\therefore M &= \frac{20}{9} - \frac{32}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{4}{3} (4n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}, \\
&= \frac{20}{9} - \left(\frac{8}{3}n + \frac{20}{9}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\
\therefore \sum_{i=1}^{2n} c_i &= c_1 + c_2 + \cdots + c_{2n} = M + N \\
&= \frac{169}{72} - \left(\frac{8}{3}n + \frac{20}{9}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2n+2}.
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】错位相减法求和

5. 已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = x^n + 1$, $h(x) = f(x) - a \cdot g(x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 当 $n=1$ 时, 讨论函数 $h(x)$ 的单调性.

(2) 当 $n=2$ 时,

① 若 $x \in [0, +\infty)$ 时, $h(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

② 直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 相切于点 $A(x_1, f(x_1))$, 与曲线 $y = g(x)$ 相切于点 $B(x_2, f(x_2))$, 证明:

$$x_1 + x_2 < \frac{1}{2}.$$

【答案】 (1) 当 $a \leq 0$ 时, $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

当 $a > 0$ 时, $h(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减.

(2) ① $a \in (-\infty, 1]$.

② 证明见解析.

【解析】 (1) 当 $n=1$, $h(x) = f(x) - a \cdot g(x) = e^x - a(x+1)$,

$$\therefore h'(x) = e^x - a,$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) = e^x - a > 0$ 恒成立,

$\therefore h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

② 当 $a > 0$ 时, 令 $h'(x) > 0$, 得 $x < \ln a$,

$\therefore h(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增.

令 $h'(x) < 0$, 得 $x < \ln a$,

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减.

(2) ① 当 $x=2$, $h(x) = e^x - a(x^2 + 1)$.

$$h(x) = e^x - a(x^2 + 1), x \in [0, +\infty),$$

$$\text{则 } h'(x) = e^x - 2ax,$$

①由(1)知 $a \leq 0$ 时, $h(x)_{\min} = h(0) = 1 - a \geq 0$, 此时 a 成立,

②当 $a > 0$ 时, $h(x) = e^x - a(x^2 + 1) \geq 0$,

$$\therefore a \leq \frac{e^x}{x^2 + 1},$$

$$\text{令 } t(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1},$$

$$\therefore t'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \text{ 恒成立},$$

$\therefore t(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增,

$$\therefore t(x)_{\min} = t(0) = 1,$$

$$\therefore a \leq 1,$$

综上 $a \in (-\infty, 1]$.

② $\because f(x) = e^x, g(x) = x^2 + 1$,

设直线 l 为 $y = kx + b$,

$$\therefore f(x_1) = e^{x_1}, g(x_2) = x_2^2 + 1,$$

$$\therefore k = \frac{g(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + b \\ y = x^2 + 1 \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - kx + 1 - b = 0,$$

$$\therefore \Delta = (-k)^2 - 4(1 - b) = 0,$$

$$\therefore k^2 = 4 - 4b,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2x_2 = k, x_1 \cdot x_2 = 1 - b,$$

$$\text{则 } x_2 = \frac{k}{2} = \sqrt{1 - b},$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + b \\ y = e^x \end{cases}, \text{ 得 } e^x = kx + b,$$

$$\therefore e^x = kx + b = kx + \frac{4 - k^2}{4} = kx + 1 - \frac{1}{4}k^2,$$

$$\text{又 } \because y' = e^x, \text{ 则 } e^{x_1} = k, \text{ 则 } x_1 = \ln k,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \ln k + \frac{k}{2}, k > 0,$$

当 $k=1$ 时, $f'(x_1) = 1$, 则 $x_1 = 0$, 切点为 $(0, 1)$,

$$g'(x_2) = 1, \text{ 则 } x_2 = \frac{1}{2}, \text{ 切点为 } \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right),$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \ln k + \frac{k}{2} = \ln 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ 不成立},$$

$$\therefore f'(x) = e^x, g'(x) = 2x, \text{ 则 } e^{x_1} = 2x_2,$$

由 $y_1 = e^x$ 与 $y_2 = 2x$ 得, 只有当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时有交点,

$\therefore$ 若 $k > 1$, 即 $y_1(x=0) = 1, y_2(x=0) = 0$,

$$e^{x_1} = 2x_2 > 1 \text{ 时}, y_1\left(x = \frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} > 1, y_2\left(x = \frac{1}{2}\right) = 1 \text{ 不成立},$$

$\therefore 0 < k < 1$ 时, 即 $x_1 + x_2 = \ln k + \frac{k}{2} < \frac{1}{2}$.

【标注】 **【知识点】** 利用韦达定理解决双变量问题