

双变量极值点问题

1 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln(x+2)$, $a \in \mathbf{R}$, 存在两个极值点 x_1, x_2 , 求 $f(x_1) + f(x_2)$ 的取值范围.

2 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx + \ln x$ ($m \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $|x_1 - x_2| \leq \frac{15}{4}$, 求 $|f(x_1) - f(x_2)|$ 的最大值.

3 已知 $f(x) = 2x^2 - 4ax + \ln x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, $f(x)$ 有两个不相等的极值点为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 求 $2f(x_1) - f(x_2)$ 的最小值.

4 已知函数 $f(x) = x^2 - mx + 2 \ln x + 4$.

(1) 当 $m = 5$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 设直线 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 若 l 的斜率存在最小值 2, 求 m 的值, 并求取得最小斜率时切线 l 的方程.

(3) 已知 $f(x)$ 分别在 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) 处取得极值, 求证: $f(x_1) + f(x_2) < 2$.

5 已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} - x + 2 \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 > x_2$), 且 $f(x_1) - f(x_2) > m(x_1 - x_2)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

6 已知函数 $f(x) = \frac{mx^2 + 1}{e^x}$, 其中 $m \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $m = 2$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $m > 1$, 并且 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 求证: $\frac{4}{e} < f(x_1) + f(x_2) < \frac{4m}{e}$.