

南开高二期末（二）

1. 已知直线 l 经过点 $A(2, 1)$ 和 $B(1, m^2)(m \in \mathbf{R})$ ，则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是() .

- A. $[0, \pi)$ B. $[0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $[0, \frac{\pi}{4}]$ D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

【答案】 B

【解析】 因为直线 l 的斜率是 $k = \tan \alpha = \frac{m^2 - 1}{1 - 2} = 1 - m^2 \leq 1$ ，所以直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. 故选B .

【标注】 【知识点】 倾斜角计算

【素养】 数学运算

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 > 0$ ， $a_3 + a_{10} > 0$ ， $a_6 a_7 < 0$ ，则满足 $S_n > 0$ 的最大自然数 n 的值为()

- A. 6 B. 7 C. 12 D. 13

【答案】 C

【解析】 $\because a_1 > 0$ ， $a_6 a_7 < 0$ ， $\therefore a_6 > 0$ ， $a_7 < 0$ ，等差数列的公差小于零，又 $a_3 + a_{10} = a_1 + a_{12} > 0$ ， $a_1 + a_{13} = 2a_7 < 0$ ， $\therefore S_{12} > 0$ ， $S_{13} < 0$ ， $\therefore$ 满足 $S_n > 0$ 的最大自然数 n 的值为12. 故选C

【标注】 【知识点】 等差数列求和问题

3. 已知两条直线 $l_1: (m+3)x + 4y + 3m - 5 = 0$ ， $l_2: 2x + (m+5)y - 8 = 0$ ， $l_1 // l_2$ ，则直线 l_1 的一个方向向量是()

- A. $(1, -\frac{1}{2})$ B. $(-1, -1)$ C. $(1, -1)$ D. $(-1, -\frac{1}{2})$

【答案】 B

【解析】 解： $\because$ 当 $m = -5$ 时， l_1 不平行 l_2 ，

$\therefore m \neq -5$ ，

由 $l_1 // l_2$ ，得 $\frac{m+3}{2} = \frac{4}{m+5} \neq \frac{3m-5}{-8}$ ，

解得 $m = -7$ ，

$\therefore$ 直线 l_1 为 $2x - 2y + 13 = 0$.

∴直线 l_1 的斜率为1 .

∴直线 l_1 的一个方向向量为 $(-1, -1)$.

故选：B .

【标注】【知识点】直线的平行

【知识点】直线的方向向量与平面的法向量

4. 过点 $(-1, 2)$ 且与直线 $2x - 3y + 4 = 0$ 垂直的直线方程为()

- A. $3x + 2y - 1 = 0$ B. $3x + 2y + 7 = 0$ C. $2x - 3y + 5 = 0$ D. $2x - 3y + 8 = 0$

【答案】 A

【解析】 解：∵所求直线方程与直线 $2x - 3y + 4 = 0$ 垂直，∴设方程为 $-3x - 2y + c = 0$

∵直线过点 $(-1, 2)$ ，∴ $-3 \times (-1) - 2 \times 2 + c = 0$

∴ $c = 1$

∴所求直线方程为 $3x + 2y - 1 = 0$.

故选：A .

【标注】【知识点】直线的垂直

【知识点】求直线的方程

5. 已知点 P 是抛物线 $y^2 = 2x$ 上的一个动点，则点 P 到点 $M(0, 2)$ 的距离与点 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值为() .

- A. 3 B. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{9}{2}$

【答案】 B

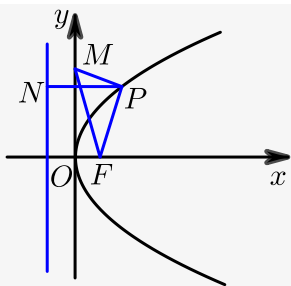
【解析】 如图，过点 P 向准线作垂线，垂足为 N ，则 P 点到准线的距离是 PN ，抛物线的焦点是

$F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，

由抛物线的性质有 $|PN| = |PF|$ ，于是 $|PM| + |PN| = |PM| + |PF| \geq |MF|$ ，

当 P 为 MF 与抛物线的交点时等号成立，

故所求的最小值为 $|MF| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.



【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系；最值问题

6. 已知A、B分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点，P为双曲线上一点，且 $\triangle ABP$ 为等腰三角形，若双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$ ，则 $\angle ABP$ 的度数为() .
- A. 30° B. 60° C. 120° D. 30° 或 120°

【答案】D

【解析】双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$ ，则 $a = b$ ，双曲线方程为 $x^2 - y^2 = a^2$ ，

$$\text{若 } |AB| = |BP| = 2a, \text{ 设 } P(m, n), \text{ 则 } \begin{cases} m^2 - n^2 = a^2 \\ (m - a)^2 + n^2 = 4a^2 \end{cases}$$

$$\therefore m = 2a,$$

$$\therefore \angle PBx = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = 120^\circ,$$

$$\text{若 } |AB| = |AP| = 2a, \text{ 设 } P(m, n), \text{ 则 } \begin{cases} m^2 - n^2 = a^2 \\ (m + a)^2 + n^2 = 4a^2 \end{cases}$$

$$\therefore m = -2a,$$

$$\therefore \angle PAB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = 30^\circ,$$

故选D.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】已知双曲线的离心率求其他参数

7. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = BC = CC_1 = 2$ ，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为()
- A. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

【答案】C

【解析】解：以B为原点，在平面ABC中过点B作BC的垂线为x轴，

BC 所在直线为 y 轴, BB_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $A(\sqrt{3}, 1, 0)$, $B_1(0, 0, 2)$, $B(0, 0, 0)$, $C_1(0, 2, 2)$,

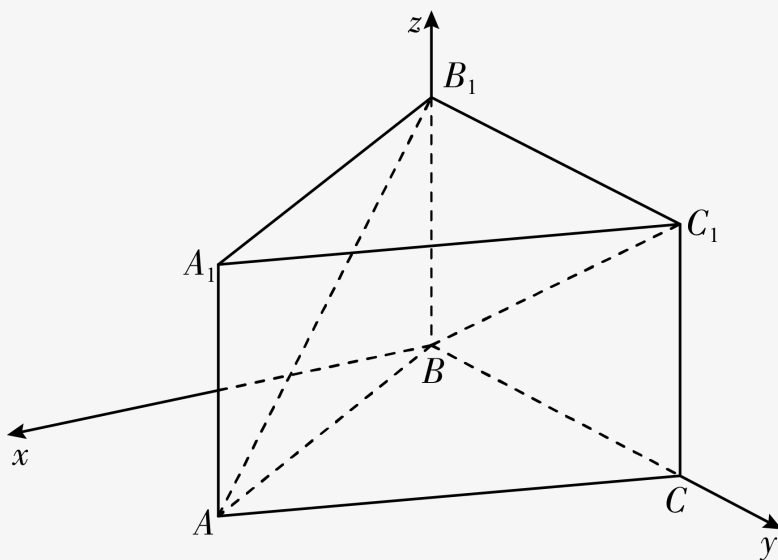
$\overrightarrow{AB_1} = (-\sqrt{3}, -1, 2)$, $\overrightarrow{BC_1} = (0, 2, 2)$,

设异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角为 θ ,

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{2}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}} = \frac{1}{4}.$$

$\therefore$ 异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{1}{4}$.

故选: C.



【标注】【知识点】空间向量的模长与夹角

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 16$, $a_{n+1} - a_n = 2n$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为().

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

【答案】 B

【解析】 $a_2 - a_1 = 2$,

$$a_3 - a_2 = 4,$$

...

$$a_{n+1} - a_n = 2n,$$

这 n 个式子相加, 就有

$$a_{n+1} = 16 + n(n+1),$$

$$\text{即 } a_n = n(n-1) + 16 = n^2 - n + 16,$$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = n + \frac{16}{n} - 1,$$

用均值不等式，知道它在 $n=4$ 的时候取最小值7.

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

【素养】数学运算

9. 已知 F 是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点，过点 F 作 E 的一条渐近线的垂线，垂足为 P ，线段 PF 与 E 相交于点 Q ，记点 Q 到 E 的两条渐近线的距离之积为 d^2 ，若 $|FP| = 2d$ ，则该双曲线的离心率是() .

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】 E 上任意一点 $Q(x, y)$ 到两条渐近线的距离之积 $d_1 d_2 = \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{b^2 + a^2} = \frac{a^2 b^2}{c^2} = d^2$ ， $F(c, 0)$ 到渐近线 $bx - ay = 0$ 的距离为 $\frac{bc}{\sqrt{b^2 + a^2}} = b = 2d$ ，
 $\therefore \frac{ab}{c} = \frac{b}{2}$ ，
 $\therefore e = \frac{c}{a} = 2$ ，
故选：B .

【标注】【知识点】双曲线的离心率

10. 已知直线 $x + y + 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$ 有公共点，则实数 a 的取值范围为()
- A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, +\infty)$ C. $[0, 2)$ D. $(-\infty, 2)$

【答案】A

【解析】解：依题意可知，直线与圆相交或相切 .

圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$ 即为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2-a$.

由 $\frac{|-1+1+2|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2-a}$ ，解得 $a \leq 0$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

故选：A .

【标注】【知识点】直线与圆的位置判断

11. 已知直线 $l: 2x - 3y + 1 = 0$ ，则直线 $m: 3x - 2y - 6 = 0$ 关于直线 l 的对称直线 m' 的方程为 _____ .

【答案】 $9x - 46y + 102 = 0$

【解析】在直线 m 上取一点，如 $M(2,0)$ ，

则 $M(2,0)$ 关于直线 l 的对称点 M' 必在直线 m' 上．

设对称点为 $M'(a,b)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} 2 \times \frac{a+2}{2} - 3 \times \frac{b+0}{2} + 1 = 0 \\ \frac{b-0}{a-2} \times \frac{2}{3} = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得} M' \left(\frac{6}{13}, \frac{30}{13} \right).$$

设直线 m 与直线 l 的交点为 N ，

$$\text{则由} \begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases}, \text{得} N(4, 3).$$

又 $\because$ 直线 m' 经过点 $N(4,3)$ ，

$\therefore$ 由两点式得直线 m' 的方程为 $9x - 46y + 102 = 0$ ．

【标注】【知识点】两直线交点坐标；判定两条直线的位置关系；直线的垂直；点或直线的对称问题；直线的两点式方程；直线方程的五种形式的联系和使用范围的区别

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若满足 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n-3}{n+3}$ ，则 $\frac{a_{11}}{b_{11}} =$ _____ ．

【答案】 $\frac{13}{8}$

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用；等差数列求和问题；等差数列前 n 项和的性质

13. 抛物线 $y = 4x^2$ 上一点 P ，则 P 到直线 $y = 4x - 5$ 的距离的最小值为 _____ ．

【答案】 $\frac{4}{17}\sqrt{17}$

【标注】【知识点】设点法；抛物线坐标的取值范围

14. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数，其前 n 项和为 S_n ，已知 $S_3 = \frac{7}{4}$ ， $S_6 = \frac{63}{4}$ ，则 $a_8 =$ _____ ．

【答案】 32

【解析】解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q \neq 1$ ，

$$\therefore S_3 = \frac{7}{4}, S_6 = \frac{63}{4},$$

$$\therefore \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{7}{4}, \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{63}{4},$$

$$\text{解得} a_1 = \frac{1}{4}, q = 2.$$

$$\text{则 } a_8 = \frac{1}{4} \times 2^7 = 32 .$$

故答案为32 .

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

15. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点. 若椭圆上存在一点 P 使得 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{2}$, 则椭圆的离心率 e 的取值范围为 _____ .

【答案】 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

【解析】 $\because$ 点 P 是椭圆上的点 F_1, F_2 是椭圆的两个焦点,

$$\text{由椭圆的定义 } |PF_1| + |PF_2| = 2a ,$$

$$\text{又 } PF_1 \perp PF_2 ,$$

$$\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1 F_2|^2 ,$$

$$\therefore (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = |F_1 F_2|^2 ,$$

$$\therefore |PF_1| \cdot |PF_2| = 2a^2 - 2c^2 ,$$

$$\text{又 } |PF_1| \cdot |PF_2| \leq \left(\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2} \right)^2 = a^2 ,$$

$$\therefore 2a^2 - 2c^2 \leq a^2 ,$$

$$a^2 \leq 2c^2 ,$$

$$\therefore e^2 = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \geq \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore e \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 又 } 0 < e < 1 ,$$

$$\therefore \text{椭圆的离心率 } e \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) .$$

$$\text{综上所述, 故答案为: } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) .$$

【标注】【知识点】求椭圆的离心率

16. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其中 $a_2 = f(3)$, a_3 为 $f(x)$ 的最小值.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 已知 $\{b_n\}$ 是正项等比数列, $b_1 = a_3$, $b_3 = a_1$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式, 并求 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】(1) $a_n = 13 - 4n$.

$$(2) b_n = 3^{n-1}, S_n = \frac{3^n - 4n^2 + 22n - 1}{2}.$$

【解析】(1) 因为 $f(x) = x^2 - 2x + 2$,

$$\text{所以: } a_2 = f(3) = 5,$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的最小值为 } 1, \text{ 所以: } a_3 = 1.$$

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列,

$$\text{所以公差 } d = a_3 - a_2 = -4,$$

$$\text{所以 } \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n = 5 - 4(n-2) = 13 - 4n.$$

(2) 因为 $b_3 = a_1 = 9$, $b_1 = a_3 = 1$, 且公比 $q > 0$,

$$\text{所以公比 } q = 3.$$

$$\text{数列的通项公式 } b_n = 3^{n-1},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_n &= \frac{n(9 - 4n + 13)}{2} + \frac{1 - 3^n}{1 - 3} \\ &= \frac{3^n - 4n^2 + 22n - 1}{2}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；等差数列与等比数列综合

17. 已知圆 C 的圆心为点 $C(2, 0)$, 且与 y 轴相切, 直线 $l: y = k(x + 2)$.

(1) 求圆 C 的方程.

(2) 是否存在直线 l , 使得直线 l 与圆 C 交于 M, N 两点, 且弦 MN 的中点 P 到原点 O 与圆心 C 的距离相等? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

(3) 若直线 l 上总存在点 Q , 使得过 Q 点的圆 C 的两条切线互相垂直, 求 k 的取值范围. (只需写出结论)

【答案】(1) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

$$(2) y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2). \text{ 证明见解析.}$$

$$(3) [-1, 1].$$

【解析】(1) $\because$ 圆 C 与 y 轴相切,

$\therefore$ 圆 C 的半径 $r = 2$,

故圆 C 的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

(2) 设 P 点坐标为 (x_0, y_0) ,

则 P 到原点 O 的距离 $|OP| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$,

点 P 到圆心 C 的距离 $|CP| = \sqrt{(x_0-2)^2 + y_0^2}$,

$\therefore x_0^2 + y_0^2 = (x_0-2)^2 + y_0^2$ 整理得 $4x_0 = 4$ 即 $x_0 = 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x+2) \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

得: $(k^2+1)x^2 + (4k^2-4)x + 4k^2 = 0$,

由韦达定理知 $x_1 + x_2 = \frac{4-4k^2}{k^2+1} = 2$,

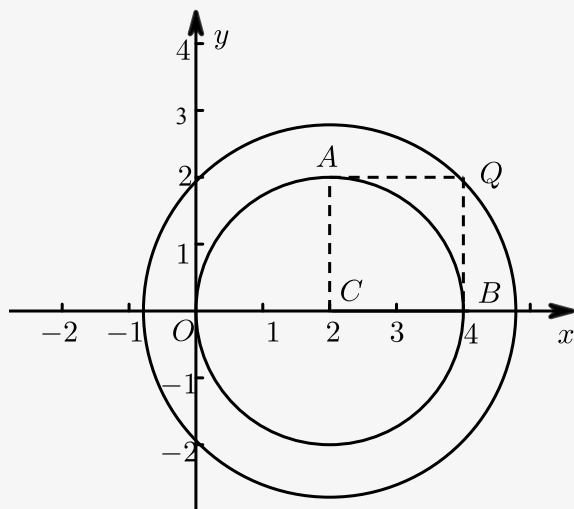
$$\therefore k^2 = \frac{1}{3},$$

$$\text{故 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

(3) $-1 \leq k \leq 1$,

如图所示, 不妨设切点为 A, B ,



$\because QA \perp QB$,

$\therefore$ 四边形 $ACBQ$ 为正方形,

即 $|QC| = \sqrt{2}|BC| = 2\sqrt{2}$,

所以点 Q 在以 $C(2, 0)$ 为圆心, 以 $2\sqrt{2}$ 为半径的圆上, 又因为点 Q 在直线 l 上, 所以直线

与圆有交点即可联立 $\begin{cases} y = k(x+2) \\ (x-2)^2 + y^2 = 8 \end{cases}$ 得 $(k^2+1)x^2 + 4(k^2-1)x + 4(k^2-1) = 0$,

即 $\Delta = 16(k^2-1)^2 - 4(k^2+1) \cdot 4(k^2-1) \geq 0$.

$\therefore -1 \leq k \leq 1$.

【标注】【知识点】直线的垂直; 两点间距离公式; 圆的切线的相关问题; 圆的标准方程问题

18. 在等差数列中 $\{a_n\}$ ，已知公差 $d=2$ ， a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足： $a_n = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \frac{b_3}{3^3+1} + \cdots + \frac{b_n}{3^n+1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式．

(3) 令 $c_n = \frac{a_n b_n}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ．

【答案】 (1) $2n$ ．

(2) $b_n = 2(3^n + 1)$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ．

(3) $\frac{3 + (2n-1) \cdot 3^{n+1}}{4} + \frac{1}{2}n(n+1)$ ．

【解析】 (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=2$ ， a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项，

可得 $a_2^2 = a_1 a_4$ ，即 $(a_1 + 2)^2 = a_1(a_1 + 6)$ ，

解得 $a_1 = 2$ ，

则 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 2(n-1) = 2n$ ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足： $a_n = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \frac{b_3}{3^3+1} + \cdots + \frac{b_n}{3^n+1}$ ，

可得 $a_1 = \frac{b_1}{4}$ ，即 $b_1 = 8$ ；

$n \geq 2$ 时， $a_{n-1} = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}+1}$ ，

与 $a_n = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \frac{b_3}{3^3+1} + \cdots + \frac{b_n}{3^n+1}$ ，

相减可得 $2 = \frac{b_n}{3^n+1}$ ，即有 $b_n = 2(3^n + 1)$ ，

上式对 $n=1$ 也成立，

可得 $b_n = 2(3^n + 1)$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ．

(3) $c_n = \frac{a_n b_n}{4} = n(3^n + 1)$ ，

则前 n 项和 $T_n = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^n) + (1 + 2 + \cdots + n)$ ，

设 $S_n = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^n$ ， $3S_n = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^{n+1}$ ，

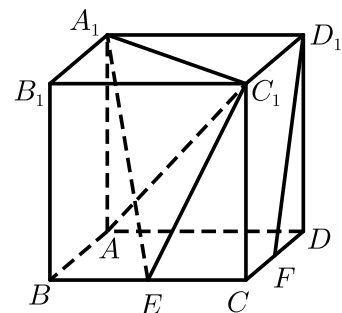
相减可得 $-2S_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1} = \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n \cdot 3^{n+1}$ ，

化简可得 $S_n = \frac{3 + (2n-1) \cdot 3^{n+1}}{4}$ ，

则 $T_n = \frac{3 + (2n-1) \cdot 3^{n+1}}{4} + \frac{1}{2}n(n+1)$ ．

【标注】【知识点】错位相减法求和；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；等差数列与等比数列综合

19. 如图，在棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 BC 的中点， F 为棱 CD 的中点．



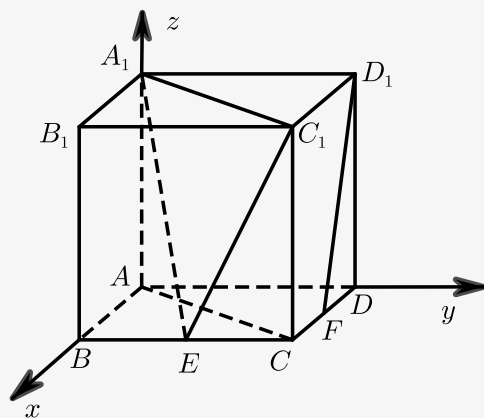
- (1) 求证： $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 .
 (2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值 .
 (3) 求二面角 $A - A_1C_1 - E$ 的正弦值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

(3) $\frac{1}{3}$.

【解析】 (1) 以 A 为原点，分别以 AB ， AD ， AA_1 所在直线为 x ， y ， z 轴，建立如图空间直角坐标系，



则 $A_1(0, 0, 2)$ ， $E(2, 1, 0)$ ， $C_1(2, 2, 2)$ ，

则 $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{EC_1} = (0, 1, 2)$ ，

设平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases},$$

故取 $\vec{n} = (2, -2, 1)$,

而 $F(1, 2, 0)$, $D_1(0, 2, 2)$, $\overrightarrow{FD_1} = (-1, 0, 2)$,

$\therefore \vec{n} \cdot \overrightarrow{FD_1} = 0$, 又 $D_1F \notin \text{平面} A_1EC_1$,

故 $D_1F // \text{平面} A_1EC_1$.

(2) 由(1)知平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (2, -2, 1)$, $\overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 2)$,

设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AC_1} \rangle \right| = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} \right|}{\left| \vec{n} \right| \cdot \left| \overrightarrow{AC_1} \right|} = \frac{2}{3 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

(3) 由(1)知 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$,

设平面 AA_1C_1 的法向量 $\vec{m} = (a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases},$$

故取 $\vec{m} = (1, -1, 0)$, $\therefore$ 平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (2, -2, 1)$,

$$\therefore \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{\left| \vec{m} \cdot \vec{n} \right|}{\left| \vec{m} \right| \cdot \left| \vec{n} \right|} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

由图可知, 二面角 $A - A_1C_1 - E$ 为锐角,

故其正弦值为 $\frac{1}{3}$.

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题；向量法解决线面角问题

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点为 A , 上顶点为 B , 且直线 AB 与抛物线 $y^2 = 4x$ 在第一象限的交点 D 到该抛物线的准线的距离为 2, 椭圆 C 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 若直线 $y = x + m$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 直线 $y = -x + m$ 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 求当四边形 $MPNQ$ 的面积取最大值时 m 的值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$.

(2) $m = 0$.

【解析】 (1) 设点 D 的坐标为 (x_0, y_0) , 由抛物线的几何性质可知 $x_0 + 1 = 2$,

故 $x_0 = 1, y_0 = 2$,

$\therefore D(1, 2)$,

又点 $D(1, 2)$ 在直线 $AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ 上,

故 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ ①,

设椭圆的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,

由离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{4}$,

即 $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$,

$\therefore a = 2b$ ②,

由①②可得 $a = 5, b = \frac{5}{2}$,

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$.

(2) 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ 可得 $5x^2 + 8mx + 4m^2 - 25 = 0$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

则 $\Delta = (8m)^2 - 4 \times 5(4m^2 - 25) > 0$,

故 $0 \leq m^2 < \frac{125}{4}$,

又 $x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 25}{5}$,

则 $|MN| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \sqrt{125 - 4m^2}$,

同理可得 $|PQ| = \frac{2\sqrt{2}}{5} \sqrt{125 - 4m^2}$,

由题意知 $MN \perp PQ$,

故四边形 $MPNQ$ 的面积为:

$S = \frac{1}{2} |MN| \cdot |PQ| = \frac{1}{2} \times \frac{8}{25} (125 - 4m^2) = \frac{4(125 - 4m^2)}{25}$,

又 $0 \leq m^2 < \frac{125}{4}$,

$\therefore$ 当 $m = 0$ 时, 面积 S 取得最大值20.

【标注】【知识点】椭圆与抛物线结合; 面积问题; 最值问题