

南开高二期末（三）

- 已知点 $(1, -2)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 在直线 $l: ax - y - 1 = 0 (a \neq 0)$ 的两侧，则直线 l 的倾斜角的取值范围是（ ）.

A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ C. $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ D. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$
- 直线 $2x - 3y + 1 = 0$ 的一个方向向量是（ ）.

A. $(2, -3)$ B. $(2, 3)$ C. $(-3, 2)$ D. $(3, 2)$
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ， F_1 为其左焦点，直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$ ，若过 F_1 和 $(0, -b)$ 的直线与 l 平行，则双曲线的离心率为（ ）.

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 5
- 等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 a_2, a_4 是方程 $2x^2 - 11x + 8 = 0$ 的两根，则 a_3 的值为（ ）.

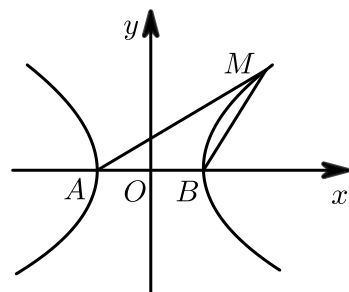
A. 2 B. ± 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\pm\sqrt{2}$
- 设椭圆的两个焦点分别是 F_1, F_2 ，过 F_2 作椭圆长轴的垂线，交椭圆于点 P ，若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形，则椭圆的离心率为（ ）.

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2} - 1$
- 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交抛物线于 A, B 两点， $|AF| > |BF|$ ，过 A 作 $AA' \perp l$ 于 A' ，连接 $A'F$ 交 y 轴于 M ，若 $|AM| = 4\sqrt{3}$ ，则 $p =$ （ ）.

A. 2 B. 3 C. 4 D. 8
- 已知椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，且长轴长为12，离心率为 $\frac{1}{3}$ ，则椭圆的方程为（ ）.

A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ C. $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$ D. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$
- 若方程 $\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{8-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 m 的取值范围是（ ）.

A. $(2, 8)$ B. $(2, 5)$ C. $(5, 8)$ D. $(2, 5) \cup (5, 8)$
- 如图，已知 A, B 为双曲线 E 的左、右顶点，点 M 在 E 上， $\triangle ABM$ 为等腰三角形，且顶角为 120° ，则 E 的离心率为（ ）.



A. $\sqrt{5}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

10. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 交于 C, D 两点, 若有三条直线满足 $|AC| = |BD|$, 则 r 的取值范围为 () .

A. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

B. $(2, +\infty)$

C. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

D. $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

11. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 点 $K(-1, 0)$, 过 K 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线交抛物线于 M, N 两点, 若 $3\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KN}$, 则 $p =$ _____ .

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 左支上点 B 与右焦点 F 关于渐近线对称, O 为坐标原点, 则 $|OB| =$ _____ .

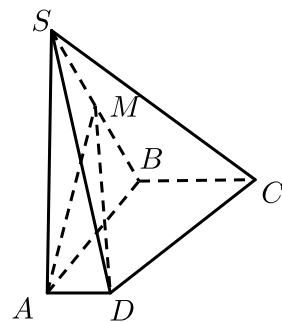
13. 抛物线 $y = 4x^2$ 的准线方程为 _____ .

14. 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 P, F_1, F_2 是一个直角三角形的三个顶点, 则点 P 到 x 轴的距离为 _____ .

15. 已知抛物线方程为 $y^2 = 2px$, 其中 $p > 0$, 焦点为 F , 准线为 l , 过抛物线上一点 M 作 l 的垂线, 垂足为 E , 若 $|EF| = |MF|$, 点 M 的横坐标是 3, 则 $p =$ _____ .

16. 过点 $P(3, 0)$ 的直线 l 与椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 M, N 两点, 椭圆 E 与 x 轴正半轴交于点 A , 则三角形 AMN 的面积的最大值为 _____ .

17. 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, 侧棱 $SA \perp$ 底面 $ABCD$, AB 垂直于 AD 和 BC , $SA = AB = BC = 2$, $AD = 1$, M 是棱 SB 的中点.



(1) 求证: $AM \parallel$ 平面 SCD .

(2) 求二面角 $S-CD-M$ 的正弦值 .

(3) 在线段 DC 上是否存在一点 N , 使得 MN 与平面 SAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{35}}{7}$, 若存在, 请求出 $\frac{DN}{DC}$ 的值, 若不存在, 请说明理由 .

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ，上顶点为 B ，右焦点为 F ，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\triangle ABF$ 的面积为 $\sqrt{2} + 1$ 。

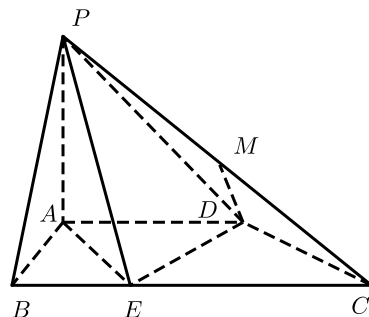
(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若 M, N 为 y 轴上的两个动点，且 $MF \perp NF$ ，直线 AM 和 AN 分别与椭圆 C 交于 D, E 两点。

① 求 $\triangle MFN$ 的面积的最小值。

② 证明： E, O, D 三点共线。

19. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PA = 2$ ，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，且 $AB \perp AD$ ， $BC \parallel AD$ ， $AD = AB = 2$ ， $BC = 4$ ， M 为 PC 中点， E 在线段 BC 上，且 $BE = 1$ 。



(1) 求证： $DM \parallel$ 平面 PAB 。

(2) 求平面 PDE 与平面 BDE 夹角的余弦值。

(3) 求点 E 到平面 PDC 的距离。

20. 已知数列 $\{a_n\}$ ， S_n 为其前 n 项和，且满足 $2S_n = a_{n+1} - 1$ ， $n \in \mathbf{N}_+$ ， $a_1 = 1$ ， $\{b_n\}$ 为等差数列，满足 $b_1 = a_2 + 12$ ， $a_3 = b_4$ 。

- (1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 设 $c_n = a_n \cdot b_n$, H_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 , 求 H_n .
- (3) 若数列 $\{d_n\}$ 满足 $d_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ |b_n|, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求 $\{d_n\}$ 的前 $2n$ 项的和 T_{2n} .