

分奇偶

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

【答案】 (1) $a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \\ n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) ①当 n 为偶数时, $a_{n+2} = 3a_n$.

$$\text{即 } q^2 = 3.$$

$$q = 3^{\frac{1}{2}}.$$

$$a_n = a_2 \cdot q^{n-2} = 3^{\frac{n}{2}}.$$

②当 n 为奇数时, $a_{n+2} = a_n + 2$.

$$\text{即 } 2d = 2.$$

$$d = 1.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = n.$$

$$\text{综上: } a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \\ n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, 则 $b_n = \frac{2n-1}{3^n}$,

$$\text{则 } S_n = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{5}{27} + \cdots + \frac{2n-1}{3^n} \quad \text{①},$$

$$\text{则有 } \frac{1}{3}S_n = \frac{1}{9} + \frac{3}{27} + \frac{5}{81} + \cdots + \frac{2n-1}{3^{n+1}} \quad \text{②},$$

$$\text{①}-\text{②} \text{ 可得: } \frac{2}{3}S_n = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) - \frac{2n-1}{3^{n+1}},$$

$$\text{变形可得: } S_n = 1 - \frac{n+1}{3^n},$$

$$\text{若证明 } S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}, \text{ 则需要证明 } 1 - \frac{n+1}{3^n} \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1},$$

$$\text{即证明 } 3^n \geq 2^n + 1 \quad (n \geq 1),$$

$$\text{即证明 } 3^n - 2^n \geq 1, \text{ 显然成立,}$$

$$\text{故有 } S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}.$$

【标注】 【知识点】 数列与不等式其他问题；错位相减法求和

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列， $b_1 = -1$ ， $b_n > 0 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ ， $b_2 S_n + a_n = 2$ 且

$$3a_2 = 2a_3 + a_1.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{1}{a_n}$ ， $T_n = \frac{b_1}{c_1 + 1} + \frac{b_2}{c_2 + 1} + \cdots + \frac{b_n}{c_n + 1}$ ，证明： $T_n < \frac{5}{2}$.

【答案】 (1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ， $b_n = 2n - 3, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，则 $d > 1$ ， $b_2 = -1 + d$ ， $b_n = -1 + d(n-1)$ ，

$$\text{当 } n=1 \text{ 时， } a_1 = \frac{2}{b_2 + 1} = \frac{2}{d},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时， } b_2 S_n + a_n = 2, \quad ①$$

$$b_2 S_{n-1} + a_{n-1} = 2, \quad ②$$

$$\text{由 } ① - ② \text{ 得到 } a_n = \frac{1}{d} a_{n-1}, \text{ 因为 } a_1 = \frac{2}{d}, \text{ 所以 } a_2 = \frac{2}{d^2}, a_3 = \frac{2}{d^3},$$

$$\text{由已知得 } \frac{6}{d^2} = \frac{4}{d^3} + \frac{2}{d}, \text{ 解得 } d=2 \text{ 或 } d=1 \text{ (舍去)},$$

$$\text{所以 } \{b_n\}, \{a_n\} \text{ 的通项公式分别为 } b_n = 2n - 3, a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$(2) \text{ 由题意得 } c_n = 2^{n-1}, T_n = \frac{-1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{3}{2^2+1} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}+1},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时， } \frac{2n-3}{2^{n-1}+1} < \frac{2n-3}{2^{n-1}},$$

$$\therefore T_n < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}},$$

$$\text{设 } x_{n-2} = \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}}, \quad ①$$

$$\frac{1}{2} x_{n-2} = \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-3}{2^n}, \quad ②$$

$$\text{由 } ① - ② \text{ 得到 } \frac{1}{2} x_{n-2} = \frac{3}{4} + 2 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-3}{2^n},$$

$$\therefore \frac{1}{2} x_{n-2} = \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-3}{2^n},$$

$$\text{整理为 } x_{n-2} = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} - \frac{2n-3}{2^{n-1}},$$

$$\therefore T_n < x_{n-2} = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} - \frac{2n-3}{2^{n-1}} < \frac{5}{2}.$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时， } T_n = -\frac{1}{2} < \frac{5}{2}, \text{ 也满足.}$$

【标注】 【知识点】放缩法证明数列不等式

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设 $b_n = a_n a_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .
- (3) 设 $c_n = a_{2n-1} a_{2n} + (-1)^n$, 证明: $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} < \frac{5}{4}$.

【答案】(1) $a_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

(2) $S_{2n} = (n-1) \cdot 2^{n+3} + 8 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

$\therefore$ 当 n 为奇数时, $a_{n+2} - a_n = 2$, 此时数列 $\{a_{2k-1}\} (k \in \mathbf{N}^*)$ 是以1为首项, 2为公差的等差数列, $a_n = a_{2k-1} = 1 + 2(k-1) = 2k-1 = n$;

当 n 为偶数时, $a_{n+2} = 2a_n$, 此时数列 $\{a_{2k}\} (k \in \mathbf{N}^*)$ 是首项为2, 公比为2的等比数列,

$$a_n = a_{2k} = 2^k = 2^{\frac{n}{2}},$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

(2) $\because b_n = a_n a_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\therefore b_{2n-1} + b_{2n} = a_{2n-1} a_{2n} + a_{2n} a_{2n+1} = (2n+1 + 2n-1)2^n = 4n \cdot 2^n,$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和

$$S_{2n} = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \cdots + (b_{2n-1} + b_{2n}) = 4(2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n),$$

$$\text{令 } A_n = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n,$$

$$\text{则 } 2A_n = 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1},$$

$$\therefore -A_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$$

$$= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1}$$

$$= (1 - n) \cdot 2^{n+1} - 2,$$

$$\therefore A_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2,$$

$$\therefore S_{2n} = (n-1) \cdot 2^{n+3} + 8 (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\begin{aligned}
 (3) \because c_n &= a_{2n-1}a_{2n} + (-1)^n = (2n-1) \cdot 2^n + (-1)^n, \\
 \therefore \frac{1}{c_n} &= \frac{1}{c_{2k-1}} = \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n - 1} < \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} (n \geq 5), \\
 \frac{1}{c_n} &= \frac{1}{c_{2k}} = \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n + 1} < \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} (n \geq 4), \\
 \therefore \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} \\
 &< 1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{39} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots \\
 &< 1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{39} + \frac{1}{7} < \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】放缩法证明数列不等式

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(S_n + n + 1)(n \in \mathbf{N}^*)$, 令 $b_n = a_n + 1$.

(1) 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 记数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

(3) 求证: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{11}{16}$.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) T_n = \frac{2n-1}{4} \times 3^{n+1} + \frac{3}{4}.$$

(3) 证明见解析.

【解析】(1) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(S_n + n + 1)(n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\therefore a_2 = 2 \times (2 + 1 + 1) = 8,$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_n = 2(S_{n-1} + n), \text{ 相减可得: } a_{n+1} = 3a_n + 2,$$

$$\text{变形为: } a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1), n = 1 \text{ 时也成立,}$$

$$\text{令 } b_n = a_n + 1, \text{ 则 } b_{n+1} = 3b_n,$$

$$\therefore \{b_n\} \text{ 是等比数列, 首项为 } 3, \text{ 公比为 } 3.$$

(2) 由(1)可得: $b_n = 3^n$,

$$\therefore \text{数列 } \{nb_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n,$$

$$3T_n = 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + (n-1) \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1},$$

$$\therefore -2T_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1}$$

$$= \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - n \cdot 3^{n+1}$$

$$= \frac{1-2n}{2} \times 3^{n+1} - \frac{3}{2},$$

$$\text{解得 } T_n = \frac{2n-1}{4} \times 3^{n+1} + \frac{3}{4}.$$

(3) $\because b_n = 3^n = a_n + 1$, 解得 $a_n = 3^n - 1$,

$$\text{由 } \frac{1}{a_k} = \frac{1}{3^k - 1} > \frac{1}{3^k},$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} > \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}, \text{ 因此左边不等式成立,}$$

$$\text{又由 } \frac{1}{a_k} = \frac{1}{3^k - 1} = \frac{3^{k+1}}{(3^k - 1)(3^{k+1} - 1)} < \frac{3^{k+1}}{(3^k - 1)(3^{k+1} - 1)} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^k - 1} - \frac{1}{3^{k+1} - 1} \right),$$

可得

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{1}{3^2 - 1} - \frac{1}{3^3 - 1} \right) + \left(\frac{1}{3^3 - 1} - \frac{1}{3^4 - 1} \right) \dots + \left(\frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3^{n+1} - 1} \right) < \frac{11}{16}, \text{ 因此右边不等式成立.}$$

$$\text{综上所述: } \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{11}{16}.$$

【标注】 【知识点】 错位相减法求和；裂项相消法求和

5. $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列。已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ， $a_4 = b_3 + b_5$ ， $a_5 = b_4 + 2b_6$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1) \cdot (a_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n 的值。

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, & n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), & n = 2^k \end{cases}$ ，其中 $k \in \mathbf{N}^*$ ，求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$)。

通过解本题体会数列求和方法，列求和方法的本质是什么？（也就是说怎样转化成数列通项的模型求和）

(4) 是否存在数列 $\{c_n\}$ ，满足等式 $\sum_{i=1}^n b_i c_{n+1-i} = 2^{n+1} - n - 2$ 成立，若存在，求出数列 $\{c_n\}$ 的通项公式；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}$ ； $b_n = n$ 。

$$(2) \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1}.$$

(3) $\sum_{i=1}^{2n} d_i = \frac{(3n-1) \times 4^{n+1} + 9n^2 + 4}{9}$; 数列求和方法的本质是数列各项转化为特定形式, 再通过特定方式将其和化简合并成最简形式.

(4) 存在; $c_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

【解析】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$, 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_1 = 1, \text{ 由 } a_3 = a_2 + 2, \text{ 得 } q^2 = q + 2,$$

$$\because q > 0, \text{ 解得 } q = 2,$$

$$\text{则 } a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\text{由 } a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6,$$

$$\text{得 } \begin{cases} 2b_1 + 6d = 8 \\ 3b_1 + 13d = 16 \end{cases}, \text{ 解得 } b_1 = d = 1,$$

$$\text{则 } b_n = b_1 + (n-1)d = n.$$

$$(2) c_n = \frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)} = \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)} = \frac{(2^n+1)-(2^{n-1}+1)}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)} = \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1},$$

$$\therefore T_n = \left(\frac{1}{2^0+1} - \frac{1}{2^1+1} \right) + \left(\frac{1}{2^1+1} - \frac{1}{2^2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n+1}.$$

$$(3) \because d_n = \begin{cases} n, n \neq 2k \\ n \cdot 2^{n-1}, n = 2k \end{cases}$$

设数列 $\{b_n\}$ 前 $2n$ 项中奇数项和偶数项的和分别为 A_n 、 B_n ,

$$\text{则 } A_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2,$$

$$B_n = 2 \times 2^1 + 4 \times 2^3 + 6 \times 2^5 + \cdots + 2n \times 2^{2n-1},$$

$$4B_n = 2 \times 2^3 + 4 \times 2^5 + \cdots + (2n-2) \times 2^{2n-1} + 2n \times 2^{2n+1},$$

$$\text{上式-下式得 } -3B_n = 2^2 + 2 \times 2^3 + 2 \times 2^5 + \cdots + 2 \times 2^{2n-1} - n \times 2^{2n+2}$$

$$= 4 + \frac{2^4(1-4^{n-1})}{1-4} - n \times 2^{2n+2}$$

$$= 4 + \frac{4^{n+1}-16}{3} - n \times 4^{n+1}$$

$$= \frac{(1-3n) \times 4^{n+1} - 4}{3},$$

$$\therefore B_n = \frac{(3n-1) \times 4^{n+1} + 4}{9},$$

$$\text{因此, } \sum_{i=1}^{2n} d_i = A_n + B_n = \frac{(3n-1) \times 4^{n+1} + 9n^2 + 4}{9}.$$

数列求和方法的本质是数列各项转化为特定形式, 再通过特定方式将其和化简合并成最简形式.

$$(4) \because \sum_{i=1}^n b_i c_{n+1-i} = 2^{n+1} - n - 2,$$

$$\therefore b_1 c_n + b_2 c_{n-1} + b_3 c_{n-2} + \cdots + b_n c_1 = 2^{n+1} - n - 2,$$

$$\therefore c_n + 2c_{n-1} + 3c_{n-2} + \cdots + nc_1 = 2^{n+1} - n - 2, (n \in \mathbf{N}^*) \text{ ③},$$

$$\therefore c_{n-1} + 2c_{n-2} + 3c_{n-3} + \cdots + (n-1)c_1 = 2^n - (n-1) - 2, (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*) \text{ ④},$$

$$\text{③-④得, } c_n + c_{n-1} + c_{n-2} + \cdots + c_1 = 2^n - 1 (n \in \mathbf{N}^*) \text{ ⑤},$$

$$c_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-3} + \cdots + c_1 = 2^{n-1} - 1 \quad (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*) \text{ ⑥},$$

$$\text{⑤}-\text{⑥} \text{得}, c_n = 2^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$

所以存在这样的数列 $\{c_n\}$, $c_n = 2^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$.

【标注】 【知识点】 数列与不等式综合；分组法求和；等比数列求通项问题；等差数列求通项问题

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = 1$, $\frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 证明：对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.

【答案】 (1) $a_2 = 4$; .

(2) $a_n = n^2$.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) 依题意, $2S_1 = a_2 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{3}$,

又 $S_1 = a_1 = 1$, 所以 $a_2 = 4$.

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $2S_n = na_{n+1} - \frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n$,

$2S_{n-1} = (n-1)a_n - \frac{1}{3}(n-1)^3 - (n-1)^2 - \frac{2}{3}(n-1)$ 两式相减得

$$2a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n - \frac{1}{3}(3n^2 - 3n + 1) - (2n-1) - \frac{2}{3},$$

整理得 $(n+1)a_n = na_{n+1} - n(n+1)$,

$$\text{即} \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1,$$

$$\text{又} \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = 1,$$

故数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{1} = 1$, 公差为1的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 所以 $a_n = n^2$.

(3) 当 $n=1$ 时, $\frac{1}{a_1} = 1 < \frac{7}{4}$;

$$\text{当} n=2 \text{时}, \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{7}{4};$$

$$\text{当} n \geq 3 \text{时}, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$\begin{aligned}
 & \text{此时 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
 & < 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
 & = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{7}{4} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4}, \\
 & \text{综上, 对一切正整数 } n, \text{ 有 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}.
 \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】裂项相消法求和；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为正整数的等比数列，若 $a_2 = 2$ 且 $a_1, a_3 + \frac{1}{2}, a_4$ 成等差数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 。

(2) 定义： $\frac{n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}$ 为 n 个正数 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 的“均倒数”。

① 若数列 $\{b_n\}$ 前 n 项的“均倒数”为 $\frac{1}{2a_n - 1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n 。

② 试比较 $\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n}$ 与2的大小，并说明理由。

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}$ 。

(2) ① $b_n = (n+1) \cdot 2^{n-1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

② $\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n} < 2$ 。

【解析】 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q ，由题意 $a_1, a_3 + \frac{1}{2}, a_4$ 成等差数列，

$$\text{即为 } 2\left(a_3 + \frac{1}{2}\right) = a_1 + a_4,$$

$$\text{即 } 2\left(2q + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{q} + 2q^2,$$

$$\text{即 } (2q^2 - 1)(q - 2) = 0,$$

$\because q$ 为正整数，

$$\therefore q = 2,$$

$$\text{故 } a_n = 2^{n-1}.$$

(2) ① 由题意有： $\frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{1}{2^n - 1}$ ，

$$\therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n \cdot (2^n - 1) \text{ ①},$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = (n-1) \cdot (2^{n-1} - 1), n \geq 2 \text{ ②},$$

$$\text{由①-②得：} b_n = (n+1) \cdot 2^{n-1} - 1 (n \geq 2),$$

又 $b_1 = 1$,

$$\therefore b_n = (n+1) \cdot 2^{n-1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*) .$$

② 判断: $\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n} < 2$,

证明如下: 由题意: $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \text{而 } \frac{n}{b_n} &= \frac{n}{(n+1) \cdot 2^{n-1} - 1} = \frac{(n+1) - 1}{(n+1) \cdot 2^{n-1} - 1} < \frac{n+1}{(n+1) \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}, \\ \therefore \frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n} &= \frac{1}{2 \cdot 2^0 - 1} + \frac{2}{3 \cdot 2^1 - 1} + \cdots + \frac{n}{(n+1) \cdot 2^{n-1} - 1} \\ &< \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2 . \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 放缩法证明数列不等式

8. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于 0, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$,

$$a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6 .$$

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$.

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}$, $b_n = n$.

(2) $T_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1}$.

(3) $\sum_{i=1}^{2^n} d_i = 2^{2n-1} + (4n-3) \cdot 2^{n-1} + 2$.

【解析】 (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$, 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_1 = 1, \text{ 由 } a_3 = a_2 + 2, \text{ 得 } q^2 = q + 2,$$

$$\because q > 0, \text{ 解得 } q = 2, \text{ 则 } a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\text{由 } a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6 \text{ 得 } \begin{cases} 2b_1 + 6d = 8 \\ 3b_1 + 13d = 16 \end{cases},$$

$$\text{解得 } b_1 = d = 1, \text{ 则 } b_n = b_1 + (n-1)d = n.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad c_n &= \frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)} = \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)} \\
 &= \frac{(2^n+1) - (2^{n-1}+1)}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)} = \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1}, \\
 \therefore T_n &= \left(\frac{1}{2^0+1} - \frac{1}{2^1+1} \right) + \left(\frac{1}{2^1+1} - \frac{1}{2^2+1} \right) + \cdots \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n+1}.
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{由 } d_n = \begin{cases} b_n, & n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), & n = 2^k, \text{ 其中 } k \in \mathbf{N}^* \end{cases},$$

$$\text{可得 } d_n = \begin{cases} n, & n \neq 2^k \\ n(\log_2 n + 1), & n = 2^k, \text{ 其中 } k \in \mathbf{N}^* \end{cases},$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} d_i = \sum_{i=1}^{2^n} i - \sum_{i=1}^n 2^i + \sum_{i=1}^n (i+1) \cdot 2^i,$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} i = \frac{2^n(1+2^n)}{2} = 2^{n-1} + 2^{2n-1},$$

$$\sum_{i=1}^n 2^i = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2,$$

$$\text{设 } M_n = 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} + (n+1) \cdot 2^n,$$

$$2M_n = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{两式相减可得 } -M_n = 4 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - (n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 2 + \frac{2(1-2^n)}{1-2} - (n+1) \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{化为 } M_n = n \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n (i+1) \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{则 } \sum_{i=1}^{2^n} d_i = 2^{2n-1} + (4n-3) \cdot 2^{n-1} + 2.$$

【标注】 【知识点】裂项相消法求和；错位相减法求和；等比数列求通项问题

9. 已知公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，且满足 $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{9}$ ， $a_1 a_2 a_3 = \frac{1}{27}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 求数列 $\{(2n-1) \cdot a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n 。

(3) 若 $b_n = \frac{n}{3^{n-1} \cdot a_n} + \frac{3}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，证明： $\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_n b_{n+1}} \geq \frac{4}{35}$ 。

【答案】 (1) $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ 。

$$(2) T_n = 3 - \frac{n+1}{3^{n-1}}.$$

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 由 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{1}{27}$ 及等比数列性质得,

$$a_2 = \frac{1}{3}, \text{ 由 } a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{9}, \text{ 得 } a_1 + a_3 = \frac{10}{9},$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 q = \frac{1}{3} \\ a_1 + a_1 q^2 = \frac{10}{9} \end{cases},$$

$$\therefore \frac{1+q^2}{q} = \frac{10}{3},$$

$$\text{解得 } q = 3 \text{ 或 } q = \frac{1}{3},$$

$\therefore \{a_n\}$ 是递减数列,

$$\therefore q = \frac{1}{3}, a_1 = 1,$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = \frac{1}{3^{n-1}} (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } (2n-1) \cdot a_n = (2n-1) \cdot \frac{1}{3^{n-1}},$$

$$\therefore T_n = 1 + \frac{3}{3} + \frac{5}{3^2} + \cdots + \frac{2n-1}{3^{n-1}} \text{ ①},$$

$$\frac{1}{3} T_n = \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{2n-3}{3^n} + \frac{2n-1}{3^n} \text{ ②},$$

①-②得,

$$\frac{2}{3} T_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} - \frac{2n-1}{3^n}$$

$$= 1 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{3^n}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2n-1}{3^n}$$

$$= 2 - \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{2n-1}{3^n},$$

$$\therefore T_n = 3 - \frac{n+1}{3^{n-1}}.$$

$$(3) \therefore b_n = \frac{n}{3^{n-1} \cdot a_n} + \frac{3}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$= n + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{2n+3}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_n b_{n+1}}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{2n+3} \cdot \frac{2}{2n+5}$$

$$= 2 \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) \right]$$

$$= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5} \right),$$

$$\therefore n \geq 1, \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5} \geq \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35},$$

$$\therefore \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_n b_{n+1}} \geq \frac{4}{35}.$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；错位相减法求和；裂项相消法求和；数列与不等式综

合

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ (n 为正整数) .

(1) 令 $b_n = 2^n a_n$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \frac{n+1}{n} a_n$, $T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$, 求 T_n .

【答案】 (1) 证明见解析

$$(2) T_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}$$

【解析】 (1) 在 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ 中, 令 $n=1$, 可得 $S_1 = -a_1 - 1 + 2 = a_1$, 即 $a_1 = \frac{1}{2}$. 当

$$n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = -a_{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2. \therefore a_n = S_n - S_{n-1} = -a_n + a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$2a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 即 } 2^n a_n = 2^{n-1} a_{n-1} + 1. \because b_n = 2^n a_n, \therefore b_n = b_{n-1} + 1, \text{ 即当 } n \geq 2 \text{ 时,}$$

$b_n - b_{n-1} = 1$. 又 $b_1 = 2a_1 = 1$, $\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项和公差均为1的等差数列. 于是

$$b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n = 2^n a_n, \therefore a_n = \frac{n}{2^n}.$$

(2) 由(1)得 $c_n = \frac{n+1}{n} a_n = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 所以

$$T_n = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\frac{1}{2} T_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \text{ 由①-②得}$$

$$\frac{1}{2} T_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}}, \therefore T_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}$$

【标注】 【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 错位相减法求和

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = \frac{n+1}{2} a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

(2) 求数列 $\{n^2 a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 若存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a_n \leq (n+1)\lambda$ 成立, 求实数 λ 的取值范围.

【答案】(1) $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \frac{2}{n} \cdot 3^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$.

(2) $T_n = \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right) 3^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(3) $\lambda \geq \frac{1}{3}$.

【解析】(1) 因为 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = \frac{n+1}{2} a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$,

所以 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = \frac{n}{2} a_n (n \geq 2)$,

两式相减得 $na_n = \frac{n+1}{2} a_{n+1} - \frac{n}{2} a_n$,

所以 $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = 3 (n \geq 2)$,

因此数列 $\{na_n\}$ 从第二项起, 是以2为首项, 以3为公比的等比数列,

所以 $na_n = 2 \cdot 3^{n-2} (n \geq 2)$,

故 $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \frac{2}{n} \cdot 3^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$.

(2) 由(1)可知当 $n \geq 2$ 时, $na_n = 2n \cdot 3^{n-2}$,

当 $n \geq 2$ 时, $T_n = 1 + 4 \cdot 3^0 + 6 \cdot 3^1 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-2}$,

$\therefore 3T_n = 3 + 4 \cdot 3^1 + \cdots + 2(n-1) \cdot 3^{n-2} + 2n \cdot 3^{n-1}$,

两式相减得 $T_n = \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$,

又 $\because T_1 = a_1 = 1$ 也满足上式,

所以 $T_n = \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right) 3^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(3) 若存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a_n \leq (n+1)\lambda$ 成立, 即为 $\lambda \geq \frac{a_n}{n+1}$,

当 $n \geq 2$ 时, $\lambda \geq \frac{2 \cdot 3^{n-2}}{n(n+1)}$,

令 $f(n) = \frac{2 \cdot 3^{n-2}}{n(n+1)}$,

则 $\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{2 \cdot 3^{n-2}} = 3n > 1$,

又 $f(n) > 0$, 即有 $f(n+1) > f(n)$,

当 $n \geq 2$ 时, $f(n)$ 单调递增, $f(n)$ 的最小值为 $f(2) = \frac{1}{3}$,

而 $n=1$ 时, $\frac{a_1}{1+1} = \frac{1}{2}$,

综上可得 $\frac{a_n}{n+1}$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$,

即有 $\lambda \geq \frac{1}{3}$.

【标注】【知识点】数列与不等式综合; 错位相减法求和; 等比数列求通项问题

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且点 $(n, S_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在函数 $y = 2^{x+1} - 2$ 的图象上.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = 0$ ， $b_{n+1} + b_n = a_n$ ，求 $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (3) 在第(2)问的条件下，若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，不等式 $b_n < \lambda b_{n+1}$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

【答案】 (1) $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, } b_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3};$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } b_n = \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3}.$$

$$(3) (1, +\infty).$$

【解析】 (1) 由题意可知， $S_n = 2^{n+1} - 2$.

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) = 2^n,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 2^{1+1} - 2 = 2 \text{ 也满足上式,}$$

$$\text{所以 } a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*).$$

(2) 方法一：由(1)可知 $b_{n+1} + b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，即 $b_{k+1} + b_k = 2^k (k \in \mathbf{N}^*)$.

$$\text{当 } k = 1 \text{ 时, } b_2 + b_1 = 2^1,$$

$$\text{当 } k = 2 \text{ 时, } b_3 + b_2 = 2^2, \text{ 所以 } -b_3 - b_2 = -2^2, \text{ ②}$$

$$\text{当 } k = 3 \text{ 时, } b_4 + b_3 = 2^3, \text{ ③}$$

$$\text{当 } k = 4 \text{ 时, } b_5 + b_4 = 2^4, \text{ 所以 } -b_5 - b_4 = -2^4, \text{ ④}$$

.....

$$\text{当 } k = n - 1 \text{ 时}(n \text{ 为偶数}), b_n + b_{n-1} = 2^{n-1}, \text{ 所以 } -b_n - b_{n-1} = -2^{n-1} \dots \dots n - 1,$$

$$\text{以上 } n - 1 \text{ 个式子相加, 得 } b_n + b_1 = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{n-1},$$

$$= \frac{2[1 - (-2)^{n-1}]}{1 - (-2)} = \frac{2(1 + 2^{n-1})}{3} = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3},$$

$$\text{又 } b_1 = 0,$$

$$\text{所以, 当 } n \text{ 为偶数时, } b_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3},$$

同理, 当 n 为奇数时,

$$-b_n + b_1 = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots - 2^{n-1}$$

$$= \frac{2[1 - (-2)^{n-1}]}{1 - (-2)} = \frac{2 - 2^n}{3},$$

所以, 当 n 为奇数时, $b_n = \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3}$.

方法二: 猜测: 当 n 为奇数时,

$$b_n = 2^{n-1} - 2^{n-2} + \dots + 2^2 - 2 = \frac{2^{n-1}(1 - (-\frac{1}{2})^{n-1})}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3},$$

猜测: 当 n 为偶数时, $b_n = 2^{n-1} - 2^{n-2} + \dots - 2^2 + 2$

$$= \frac{2^{n-1}(1 - (-\frac{1}{2})^{n-1})}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}.$$

(3) 由(2)可知 $b_n = \begin{cases} \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3} & (n \text{ 为奇数}) \\ \frac{2^n}{3} - \frac{2}{3} & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$,

①当 n 为偶数时, $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{2^n + 2}{2^{n+1} - 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^{n+1} + 2},$

所以 $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 随 n 的增大而减小,

从而, 当 n 为偶数时, $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 的最大值是 $\frac{b_2}{b_3} = 1$.

②当 n 为奇数时, $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\frac{2^n}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{2^n - 2}{2^{n+1} + 2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^{n+1} + 2},$

所以 $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 随 n 的增大而增大, 且 $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2^{n+1} + 2} < \frac{1}{2} < 1$.

综上, $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 的最大值是1.

因此, 若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $b_n < \lambda b_{n+1}$ 恒成立, 只需 $\lambda > 1$,

故实数 λ 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

【标注】 【知识点】 数列中的恒成立问题

13. 已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 且 $a_3 + 2$ 是 a_2, a_4 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_n} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(3) 在(2)条件下. 设 $c_n = 2^n + \lambda b_n$. 问是否存在实数 λ 使得数列 $\{c_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是单调递增数列? 若存在, 求出 λ 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $a_n = 2^n$.

$$(2) \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right), n \geq 2 \end{cases}$$

$$(3) \left\{ \lambda \mid -\frac{128}{35} < \lambda < \frac{32}{19} \right\}.$$

【解析】(1) 设等比数列为： $a_1, a_1q, a_1q^2 \dots$ 其中 $a_1 \neq 0, q \neq 0$.

$$\text{由题意知：} a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 28, \quad (1)$$

$$a_1q + a_1q^3 = 2(a_1q^2 + 2), \quad (2)$$

$$\text{联立(1)(2)解得 } q = 2 \text{ 或 } q = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 等比数列 $\{a_n\}$ 单调递增，

$$\therefore a_1 = 2, q = 2, \text{ 则 } a_n = 2^n.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n},$$

$$\text{由 } \frac{1}{a_n} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1},$$

$$\text{得 } \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \dots + (-1)^n \frac{b_{n-1}}{2^{n-1}+1},$$

$$\text{两式作差得：} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1},$$

$$\text{即 } b_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right) (n \geq 2).$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = \frac{b_1}{2+1}, \text{ 得 } b_1 = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1 \\ (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right), n \geq 2 \end{cases}$$

$$(3) \because c_n = 2^n + \lambda b_n.$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } c_n = 2^n + (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} \right) \lambda, c_{n-1} = 2^{n-1} + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + 1 \right) \lambda,$$

$$\text{依据题意, 有 } c_n - c_{n-1} = 2^{n-1} + (-1)^n \lambda \left(2 + \frac{3}{2^n} \right) > 0.$$

$$\text{即 } (-1)^n \lambda > -\frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2}.$$

$$\text{① 当 } n \text{ 为大于或等于 4 的偶数时, 有 } \lambda > -\frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2} \text{ 恒成立,}$$

$$\text{又 } \frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2} = -\frac{1}{\frac{3}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}}} \text{ 随 } n \text{ 增大而增大,}$$

$$\text{则当 } n=4 \text{ 时, } \left(\frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2} \right)_{\min} = \frac{128}{35}, \text{ 故 } \lambda \text{ 的取值范围为 } \lambda > -\frac{128}{35};$$

$$\text{② 当 } n \text{ 为大于或等于 3 的奇数时, 有 } \lambda < \frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2} \text{ 恒成立, 且仅当 } n=3 \text{ 时,}$$

$$\left(\frac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n} + 2} \right)_{\min} = \frac{32}{19}, \text{ 故 } \lambda \text{ 的取值范围为 } \lambda < \frac{32}{19}.$$

$$\text{又 } n=2 \text{ 时, 由 } c_n - c_{n-1} = c_2 - c_1 = \left(2^2 + \frac{5}{4} \lambda \right) - \left(2 + \frac{3}{2} \lambda \right) > 0, \text{ 解得 } \lambda < 8.$$

$$\text{综上可得, 所求 } \lambda \text{ 的取值范围是 } \left\{ \lambda \mid -\frac{128}{35} < \lambda < \frac{32}{19} \right\}.$$

【标注】【知识点】数列中的存在性问题

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_2 = 4, a_{n+1} + 2a_{n-1} = 3a_n (n \geq 2)$.

(1) 求证: 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 设 $b_n = a_n - 1$, $S_n = \frac{a_1}{b_1 b_2} + \frac{a_2}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n b_{n+1}}$, $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使 $S_n \geq 4m^2 - 3m$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $a_n = 2^n$.

(3) $-\frac{1}{4} < m < 1$.

【解析】 (1) $\because a_{n+1} + 2a_{n-1} = 3a_n$,

$$\therefore \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \frac{3a_n - 2a_{n-1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列.

(2) $\because a_1 = 2, a_2 = 4, \therefore a_2 - a_1 = 2$,

$\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1 = 2$ 为首项, 公比为2的等比数列,

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2^n,$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n,$$

$\because n = 1$ 适合上式, $\therefore a_n = 2^n$.

(3) $\because b_n = a_n - 1 = 2^n - 1$,

$$\therefore \frac{a_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1},$$

$$\therefore S_n = \left(\frac{1}{2^1 - 1} - \frac{1}{2^2 - 1} \right) + \left(\frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^3 - 1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1},$$

$$\therefore S_{n+1} - S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+2} - 1} - 1 + \frac{1}{2^{n+1} - 1}$$
$$= \frac{1}{2^{n+1} - 1} - \frac{1}{2^{n+2} - 1} = \frac{1}{(2^{n+2} - 1)(2^{n+1} - 1)} > 0,$$

又 $\because S_n < 1$ 在 $n \in \mathbf{N}^*$ 上恒成立,

所以 $1 > 4m^2 - 3m$, 解得 $-\frac{1}{4} < m < 1$.

【标注】 【知识点】裂项相消法求和; 数列中的恒成立问题

15. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = \lambda$, 并满足: $a_{2k-1}, a_{2k-1+1}, a_{2k-1+2}, \dots, a_{2k}$ 是等差数列 (其中 $k \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$), 且当 k 为奇数时, 公差为 d ; 当 k 为偶数时, 公差为 $-d$.
- (1) 当 $\lambda = 1, d = 1$ 时, 求 a_8 的值.
- (2) 当 $d \neq 0$ 时, 求证: 数列 $\{|a_{2^{n+2}} - a_{2^n}|\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是等比数列.
- (3) 当 $\lambda \neq 1$ 时, 记满足 $a_m = a_2$ 的所有 m 构成的一个单调递增数列为 $\{b_n\}$, 试求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) 3.

(2) 证明见解析.

$$(3) \quad b_n = \begin{cases} \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{2}{3} & (n \text{ 为偶数}) \\ \frac{2^{n+2}}{3} - \frac{2}{3} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}.$$

【解析】 (1) 由 $\lambda = 1, d = 1$,

所以 $a_2 = 1, a_2, a_3, a_4$ 为等差数列且公差为 -1 ,

所以 $a_4 = a_2 - 2 = -1$,

又 $a_4, a_5, \dots, a_8$ 为等差数列且公差为 1 ,

所以 $a_8 = a_4 + 4 = 3$.

(2) 当 $n = 2k + 1$ 时, $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}, \dots, a_{2k+1}$ 是等差数列且公差为 d ,

所以 $a_{2k+1} = a_{2k} + 2^k d$,

同理可得 $a_{2k} = a_{2^{k-1}} - 2^{k-1} d$,

两式相加, 得 $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 2^{k-1} d$;

当 $n = 2k$ 时, 同理可得 $a_{2k+2} - a_{2k} = -2^k d$,

所以 $|a_{2^{n+2}} - a_{2^n}| = |2^n d|$.

又因为 $d \neq 0$,

所以 $\frac{|a_{2^{n+2}} - a_{2^n}|}{|a_{2^{n+1}} - a_{2^{n-1}}|} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2 (n \geq 2)$,

所以数列 $\{|a_{2^{n+2}} - a_{2^n}|\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是以 2 为公比的等比数列.

(3) 方法一: 因为 $a_2 = \lambda$,

所以 $a_4 = a_2 - 2d = \lambda - 2d$,

由(2)知 $a_{2^{2k+1}} = a_{2^{2k-1}} + 2^{2k-1}d$,

所以 $a_{2^{2k+1}} = a_{2^{2k-1}} + 2^{2k-1}d = a_{2^{2k-3}} + 2^{2k-3}d + 2^{2k-1}d$,

依次下推, 得 $a_{2^{2k+1}} = a_{2^1} + 2^1d + 2^3d + \cdots + 2^{2k-3}d + 2^{2k-1}d$,

所以 $a_{2^{2k+1}} = \lambda + \frac{2}{3}(2^{2k} - 1)d$,

当 $2^{2k+1} \leq n \leq 2^{2k+2}$ 时, $a_n = a_{2^{2k+1}} - (n - 2^{2k+1})d = \lambda + \left(\frac{2^{2k+3}}{3} - n - \frac{2}{3}\right)d$,

由 $a_m = a_2$, 得 $m = \frac{2^{2k+3}}{3} = \frac{2}{3}$,

所以 $b_{2^{2k+1}} = \frac{2^{2k+3}}{3} - \frac{2}{3}$,

所以 $b_n = \frac{2^{n+2}}{3} - \frac{2}{3}$ (n 为奇数),

由(2)知 $a_{2^{2k+2}} = a_{2^{2k}} - 2^{2k}d = a_{2^{2k-2}} - 2^{2k-2}d - 2^{2k}d$,

依次下推, 得 $a_{2^{2k+2}} = a_{2^2} - 2^2d - 2^4d - \cdots - 2^{2k-2}d - 2^{2k}d$,

所以 $a_{2^{2k+2}} = \lambda - 2d - \frac{4(2^{2k} - 1)}{3}d$,

当 $2^{2k+2} \leq n \leq 2^{2k+3}$ 时, $a_n = a_{2^{2k+2}} + (n - 2^{2k+2})d = \lambda + \left(n - \frac{2^{2k+4}}{3} - \frac{2}{3}\right)d$,

则 $a_m = a_2$, 得 $m = \frac{2^{2k+4}}{3} + \frac{2}{3}$,

所以 $b_{2^{2k+2}} = \frac{2^{2k+4}}{3} + \frac{2}{3}$.

所以 $b_n = \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{2}{3}$ (n 为偶数).

综上所述, $b_n = \begin{cases} \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{2}{3} & (n \text{ 为偶数}) \\ \frac{2^{n+2}}{3} - \frac{2}{3} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$.

方法二: 由题意知, $b_1 = 2 < 2^2 < b_2 < 2^3 < b_3 < \cdots < 2^n < b_n < 2^{n+1} < b_{n+1} < 2^{n+2} < \cdots$,

当 n 为奇数时, $a_{2^n}, a_{2^{n+1}}, a_{2^{n+2}}, \cdots, a_{2^{n+1}}$ 的公差为: $-d, a_{2^{n+1}}, a_{2^{n+1}+1}, a_{2^{n+1}+2}, \cdots$,

$a_{2^{n+2}}$ 的公差为 d ,

所以 $a_{b_n} = a_{2^{n+1}} - (2^{n+1} - b_n)(-d)$, $a_{b_{n+1}} = a_{2^{n+1}} + (b_{n+1} - 2^{n+1})d$,

则由 $a_{b_n} = a_{b_{n+1}} = a_2$,

得 $-(2^{n+1} - b_n)(-d) = (b_{n+1} - 2^{n+1})d$,

即 $b_{n+1} + b_n = 2^{n+2}$.

同理, 当 n 为偶数时, 也有 $b_{n+1} + b_n = 2^{n+2}$.

故恒有 $b_{n+1} + b_n = 2^{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$.

① 当 n 为奇数时, 由 $b_{n+2} + b_{n+1} = 2^{n+3}$,

$b_{n+1} + b_n = 2^{n+2}$, 相减, 得 $b_{n+2} - b_n = 2^{n+2}$,

所以 $b_n = (b_n - b_{n-2}) + \cdots + (b_3 - b_1) + b_1$

$= (2^n + \cdots + 2^5 + 2^3) + 2$

$= \frac{2^3(1 - 4^{\frac{n-1}{2}})}{1 - 4} + 2$

$= \frac{2^{n+2}}{3} - \frac{2}{3}$.

②当 n 为偶数时, 同理可得 $b_n = \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{2}{3}$.

$$\text{综上所述, } b_n = \begin{cases} \frac{2^{n+2}}{3} + \frac{2}{3} & (n \text{ 为偶数}) \\ \frac{2^{n+2}}{3} - \frac{2}{3} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}.$$

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明; 数列单调性问题; 递推数列与递推方法; 等差数列求通项问题

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 并且 $a_2 = 2$, $S_5 = 15$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = \frac{1}{2}$,

$$b_{n+1} = \frac{n+1}{2n} b_n (n \in \mathbf{N}^+), \text{ 记数列}\{b_n\}\text{的前}n\text{项和为}T_n.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及前 n 项和公式 S_n .

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 b_n 及前 n 项和公式 T_n .

(3) 记集合 $M = \left\{ n \mid \frac{2S_n(2-T_n)}{n+2} \geq \lambda, n \in \mathbf{N}^+ \right\}$, 若 M 的子集个数为16, 求实数 λ 的取值范围.

【答案】 (1) $a_n = n$,

$$S_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

$$(2) b_n = \frac{n}{2^n}.$$

$$T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$(3) \frac{15}{16} < \lambda \leq 1.$$

【解析】 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由题意得} \begin{cases} a_1 + d = 2 \\ 5a_1 + 10d = 15 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = n,$$

$$\therefore S_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

$$(2) \text{由题意得} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n},$$

$$\text{累乘得} b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n-2} \times \cdots \times \frac{2}{1}\right)$$

$$= \frac{n}{2^n}.$$

$$\text{由题意得} T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} \text{①},$$

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \text{②},$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{得: } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}},$$

$$\therefore T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$(3) \text{ 由上面可得 } \frac{2S_n(2-T_n)}{n+2} = \frac{n^2+n}{2^n}, \text{ 令 } f(n) = \frac{n^2+n}{2^n},$$

$$\text{则 } f(1) = 1, f(2) = \frac{3}{2}, f(3) = \frac{3}{2}, f(4) = \frac{5}{4}, f(5) = \frac{15}{16}.$$

下面研究数列 $f(n) = \frac{n^2+n}{2^n}$ 的单调性,

$$\therefore f(n+1) - f(n) = \frac{(n+1)^2 + n+1}{2^{n+1}} - \frac{n^2+n}{2^n}$$

$$= \frac{(n+1)(2-n)}{2^{n+1}},$$

$\therefore n \geq 3$ 时, $f(n+1) - f(n) < 0$, $f(n+1) < f(n)$, 即 $f(n)$ 单调递减.

$\therefore$ 集合 M 的子集个数为 16,

$\therefore M$ 中的元素个数为 4,

$\therefore$ 不等式 $\frac{n^2+n}{2^n} \geq \lambda$, $n \in \mathbf{N}^+$ 解的个数为 4,

$$\therefore \frac{15}{16} < \lambda \leq 1.$$

【标注】 【素养】数学抽象；数学运算