

## 高一期末解三角形

1 在 $\triangle ABC$ 中,  $A = 60^\circ$ ,  $B = 75^\circ$ ,  $a = 10$ , 则 $c =$  ( )

A.  $5\sqrt{2}$

B.  $10\sqrt{2}$

C.  $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

D.  $5\sqrt{6}$

答案 C

解析 由 $A + B + C = 180^\circ$ , 知 $C = 45^\circ$ ,

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 即 } \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\therefore c = \frac{10\sqrt{6}}{3}.$$

故选C.

2  $\triangle ABC$ 的三内角 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 所对边的长分别为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 若 $S_{\triangle ABC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$ , 则角 $A$ 的大小为 ( )

A.  $\frac{\pi}{6}$

B.  $\frac{\pi}{4}$

C.  $\frac{3\pi}{4}$

D.  $\frac{5\pi}{6}$

答案 B

解析 解:  $\triangle ABC$ 的三内角 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 所对边的长分别为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ,

$$\text{若 } S_{\triangle ABC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4},$$

$$\text{可得 } \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4},$$

$$\text{即 } 2bc \sin A = b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$$

$$\text{可得 } \sin A = \cos A,$$

$$\text{由 } A \text{ 是三角形的内角, 可得 } A = \frac{\pi}{4}.$$

故选: B.

3

在 $\triangle ABC$ 中，内角 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 的对边分别为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$ ， $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$ ，则 $A =$ \_\_\_\_\_。

答案  $\frac{\pi}{6}$

解析  $\because \sin C = 2\sqrt{3}\sin B$ ，  
 $\therefore c = 2\sqrt{3}b$ ，  
 $\therefore a^2 = b^2 + 6b^2 = 7b^2$ ，  
 $\therefore a = \sqrt{7}b$ ，  
 $\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 12b^2 - 7b^2}{2 \cdot b \cdot 2\sqrt{3}b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，  
 又 $A$ 为三角形的内角，  
 $\therefore A = \frac{\pi}{6}$ 。  
 故答案为： $\frac{\pi}{6}$ 。

4 在 $\triangle ABC$ 中，角 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 的对边分别为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ， $B = 45^\circ$ ， $C = 60^\circ$ ， $c = 2$ ，则最短边的长为（ ）。

- A.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$                       B.  $\sqrt{6}$                       C. 1                      D.  $\sqrt{3}$

答案 A

解析  $\because B = 45^\circ$ ， $C = 60^\circ$ ，  
 $\therefore A = 75^\circ$ ，  
 $\because$ 大角对大边，大角对大边，  
 $\therefore \angle B$ 最小，  
 $\therefore b$ 为最短边，  
 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，  
 $\frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ，  
 $\therefore b = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 。  
 故选A。

5 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AC = \sqrt{3}$ ,  $AB = 3$ ,  $A = 30^\circ$ , 则 $BC = ( \quad )$ .

A. 4

B. 2

C. 3

D.  $\sqrt{3}$

答案 D

解析 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AC = \sqrt{3}$ ,  $AB = 3$ ,  $A = 30^\circ$ ,

由余弦定理可得:  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$ ,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9 + 3 - BC^2}{2 \times \sqrt{3} \times 3},$$

解得:  $BC = \sqrt{3}$ .

故选D.

6 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 若 $a = \sqrt{6}$ ,  $b = \sqrt{2}$ ,  $A = \frac{\pi}{3}$ , 则边 $c$ 的值为 (  $\quad$  ) .

A. 2

B.  $2\sqrt{2}$

C.  $\sqrt{3}$

D.  $\sqrt{3} + 1$

答案 B

解析  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ,

$$\therefore \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin B},$$

$$\therefore \sin B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore b < a,$$

$$\therefore \angle B = \angle A = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore B = 30^\circ,$$

$$\therefore C = 90^\circ,$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 6 + 2 = 8,$$

$$\therefore c = 2\sqrt{2}.$$

- 7 在 $\triangle ABC$ 中的内角 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 所对的边 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$ ， $b - c = 2$ ， $\cos A = -\frac{1}{4}$ ，则 $a$ 的值是 \_\_\_\_\_ 。

答案 8

解析 由题意知

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{15},$$

$$b - c = 2, \sin A = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{联立得：} b = 6, c = 4,$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{得 } a = 8.$$

- 8 在 $\triangle ABC$ 中的内角 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 所对的边 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 根据下列条件解三角形，其中有两个解的是（ ）。

A.  $b = 10, A = 45^\circ, C = 70^\circ$

B.  $a = 60, c = 48, B = 60^\circ$

C.  $a = 7, b = 5, A = 80^\circ$

D.  $a = 14, b = 16, A = 45^\circ$

答案 D

解析  $\because a = 14, b = 16, A = 45^\circ,$

$$\therefore \text{由正弦定理得 } \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\because a < b,$$

$$\therefore A < B,$$

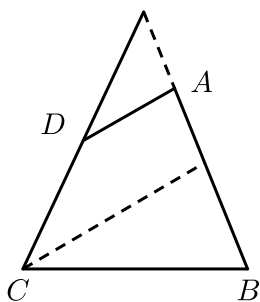
$\therefore$  三角形有两个解。

故选D。

- 9 在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$ ， $BC = 2$ ，则 $AB$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_ 。

答案  $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$

解析 方法一：如图所示，



因为  $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$ ，

所以  $\angle D = 135^\circ$ 。

因为  $BC = 2$ ，

所以当点  $D$  与点  $C$  重合时，

正弦定理可得  $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ}$ ，

解得  $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 。

当点  $D$  与点  $A$  重合时，

由正弦定理可得  $\frac{AB}{\sin 75^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ}$ ，

解得  $AB = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ 。

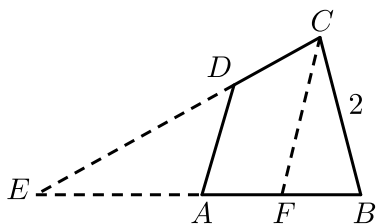
因为  $ABCD$  为平行四边形，

所以  $AB \in (\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ ，

所以  $AB$  的取值范围是  $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ 。

方法二：如图所示，延长  $BA$  与  $CD$  相交于点  $E$ ，

过点  $C$  作  $CF \parallel AD$  交  $AB$  于点  $F$ ，



则  $BF < AB < BE$ 。

在等腰三角形  $CBF$  中， $\angle FCB = 30^\circ$ ， $CF = BC = 2$ ，

$\therefore BF = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \cos 30^\circ} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 。

在等腰三角形  $ECB$  中， $\angle CEB = 30^\circ$ ， $\angle ECB = 75^\circ$ ，

$BC = CE$ ， $BC = 2$ ， $\frac{BE}{\sin 75^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$ ，

$$\therefore BE = \frac{2}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

$$\therefore \sqrt{6} - \sqrt{2} < AB < \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

所以  $AB$  的取值范围是  $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ .

10 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin^2 A \leq \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C$ , 则  $A$  的取值范围是 ( ).

A.  $(0, \frac{\pi}{6}]$

B.  $[\frac{\pi}{6}, \pi)$

C.  $(0, \frac{\pi}{3}]$

D.  $[\frac{\pi}{3}, \pi)$

答案 C

解析 由正弦定理可知  $a = 2R \sin A$ ,

$$b = 2R \sin B, c = 2R \sin C,$$

$$\therefore \sin^2 A \leq \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C,$$

$$\therefore a^2 \leq b^2 + c^2 - bc,$$

$$\therefore bc \leq b^2 + c^2 - a^2,$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore A \leq \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore A > 0,$$

$$\therefore A \text{ 的取值范围是 } (0, \frac{\pi}{3}].$$

故选 C.

11 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $c^2 - a^2 = ba + b^2$ , 则角  $C$  等于 ( ).

A.  $30^\circ$

B.  $60^\circ$

C.  $120^\circ$

D.  $150^\circ$

答案 C

解析 在  $\triangle ABC$  中, 根据余弦定理  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2}$ ,

$$\therefore C = 120^\circ.$$

故选 C.

12 在 $\triangle ABC$ 中,  $\tan A + \tan B + \frac{\sqrt{3}}{3} \tan A \cdot \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 则 $\triangle ABC$ 是( ).

- A. 锐角三角形      B. 直角三角形      C. 钝角三角形      D. 不能确定

答案 C

解析 原等式 $\Leftrightarrow \tan A + \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \tan A \tan B) \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \tan(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

而 $A+B \in (0, \pi)$ , 则 $A+B = \frac{\pi}{6}$ .

则 $C = \frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$ . 故 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

故选C.

13 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $BC^2 + AC^2 < AB^2$ , 则 $\triangle ABC$ 的形状是( ).

- A. 锐角三角形      B. 直角三角形      C. 钝角三角形      D. 不能确定

答案 C

解析 由余弦定理:  $\cos C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC}$ ,

$$\because BC^2 + AC^2 < AB^2,$$

$$\therefore \cos C < 0 \text{ 且 } C \in (0^\circ, 180^\circ),$$

$$\therefore C \in (90^\circ, 180^\circ).$$

$\therefore \triangle ABC$ 为钝角三角形.

故选C.

14 若三角形的两个内角 $A, B$ 满足 $\sin A \cos B < 0$ , 则此三角形为( ).

- A. 钝角三角形      B. 直角三角形  
C. 锐角三角形      D. 不能确定三角形的形状

答案 A

**解析** 由于  $\sin A \cos B < 0$ ,

$\therefore$  在  $\triangle ABC$  中,  $\sin A > 0$ ,

$\therefore \cos B < 0$ ,

$\therefore B$  为钝角,

$\therefore \triangle ABC$  为钝角三角形,

故选 A.

15 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $C = 60^\circ$ , 则边  $c$  等于 ( ).

A.  $\sqrt{3}$

B.  $\sqrt{2}$

C. 3

D. 4

**答案** A

**解析** 由余弦定理, 得  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \cos 60^\circ$

$$= 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3,$$

$\therefore c > 0$ ,

$\therefore c = \sqrt{3}$ .

16 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  满足  $\sin C + \sin(B - A) = \sin 2A$ , 则  $\triangle ABC$  的形状为 ( ).

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰或直角三角形

**答案** D

**解析**  $\therefore \sin C + \sin(B - A) = \sin 2A$ ,

$\therefore \sin(A + B) + \sin(B - A) = \sin 2A$ ,

$\therefore \sin A \cos B + \cos A \sin B + \sin B \cos A - \cos B \sin A = 2 \sin A \cos A$ ,

$\therefore 2 \sin B \cos A = 2 \sin A \cos A$ ,

$\therefore \cos A (\sin A - \sin B) = 0$ ,

$\therefore 0 < A, B < \pi$ ,

$\therefore A = \frac{\pi}{2}$  或  $A = B$ .

$\therefore \triangle ABC$  为直角三角形或等腰三角形 .

故选 D .

17 在  $\triangle ABC$  中的内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边  $a$ 、 $b$ 、 $c$  ,  $a = 4$  ,  $b = 5$  ,  $c = 6$  , 则  $\frac{\sin 2A}{\sin C} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

答案 1

解析 由正弦定理得

$$\frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin C} = \frac{2a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{C} .$$

$$\because a = 4 , b = 5 , c = 6 ,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{2 \times 4 \times \frac{25 + 36 - 16}{2 \times 4 \times 5}}{6} = 1 .$$

18 已知  $\triangle ABC$  中 ,  $\sin A = \frac{3}{5}$  ,  $\cos B = \frac{5}{13}$  , 则  $\cos C = \underline{\hspace{2cm}}$  .

答案  $\frac{16}{65}$

解析  $\triangle ABC$  中 ,  $\sin A = \frac{3}{5}$  ,  $\cos B = \frac{5}{13}$  ,

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} ,$$

$$\text{由正弦定理 , } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} ,$$

$$\frac{a}{\frac{3}{5}} = \frac{b}{\frac{12}{13}} ,$$

$$\text{则 } a = \frac{13}{20} b ,$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{4}{5} ,$$

$$\because A、B、C \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 内角 , 则 } C = \pi - A - B ,$$

$$\cos C = \cos[\pi - (A + B)]$$

$$= -\cos(A + B)$$

$$= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B)$$

$$= -\cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$= -\frac{20}{65} + \frac{36}{65}$$

$$= \frac{16}{65},$$

$$\therefore \cos C = \frac{16}{65}.$$

19 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ . 若 $(4b - c) \cos A = a \cos C$ , 则 $\cos A =$ \_\_\_\_\_.

答案  $\frac{1}{4}$

解析  $(4b - c) \cos A = a \cos C$ ,

$$\therefore 4 \sin B \cos A = \sin C \cos A + \sin A \cos C,$$

$$\therefore 4 \sin B \cos A = \sin(A + C),$$

$$\therefore 4 \sin B \cos A = \sin B,$$

$$\because B \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin B > 0,$$

$$\therefore 4 \cos A = 1,$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{4}.$$

20 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ , 若 $a^2 = 2b^2$ ,  $\sin C = \sqrt{3} \sin B$ . 则 $\cos A =$ \_\_\_\_\_.

答案  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析  $\because a^2 = 2b^2$ ,

$$\therefore a = \sqrt{2}b,$$

$$\text{又} \because \sin C = \sqrt{3} \sin B,$$

$$\therefore c = \sqrt{3}b,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$2b^2 = b^2 + 3b^2 - 2\sqrt{3}b^2 \cos A,$$

$$2\sqrt{3}b^2 \cos A = 2b^2,$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- 21 在 $\triangle ABC$ 中内角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ , 且满足 $\sin B = 2 \sin C, a = \sqrt{6}, \cos A = \frac{7}{8}$ , 则边 $c$ 等于( ).

A. 2

B.  $\sqrt{6}$

C. 4

D.  $2\sqrt{3}$

答案 A

解析 由正弦定理,

$$\therefore \sin B = 2 \sin C,$$

$$\therefore b = 2c,$$

由余弦定理知,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$6 = 4c^2 + c^2 - 4c^2 \frac{7}{8}$$

$$6 = \frac{3}{2}c^2,$$

$$\therefore c = 2.$$

故选: A.

- 22 在 $\triangle ABC$ 中,  $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c}$  ( $a, b, c$ 分别为角 $A, B, C$ 的对应边), 则 $\triangle ABC$ 的形状为( )

A. 正三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形

答案 B

解析 因为 $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c} = \frac{1-\cos A}{2}$ , 即 $\frac{b}{c} = \cos A$ , 由余弦定理可得 $\frac{b}{c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ,

可得 $a^2 + b^2 = c^2$ , 所以三角形是直角三角形.

故选B.

- 23 设 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ , 且 $a + c = 6, b = 2, \cos B = \frac{7}{9}$ .

- (1) 求 $a, c$ 的值 .  
 (2) 求 $\sin(A - B)$ 的值 .

答案

- (1)  $a = 3, c = 3$  .  
 (2)  $\frac{10\sqrt{2}}{27}$  .

解析

- (1) 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ , 得 $b^2 = (a + c)^2 - 2ac(1 + \cos B)$ ,  
 又 $a + c = 6, b = 2, \cos B = \frac{7}{9}$ , 所以 $ac = 9$ , 解得 $a = 3, c = 3$  .  
 (2) 在 $\triangle ABC$ 中,  $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ ,  
 由正弦定理得 $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  
 因为 $a = c$ , 所以 $A$ 为锐角, 所以 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{1}{3}$   
 因此 $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B = \frac{10\sqrt{2}}{27}$  .

24 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sqrt{3}a \cdot \sin C = c \cdot \sin 2A$  .

- (1) 求 $\angle A$ 的大小 .  
 (2) 若 $a = \sqrt{7}, b = 2\sqrt{3}$ , 求 $\triangle ABC$ 的面积 .

答案

- (1)  $\frac{\pi}{6}$  .  
 (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  或  $\frac{5}{2}\sqrt{3}$  .

解析

- (1) 因为 $\sqrt{3}a \cdot \sin C = c \cdot \sin 2A$ ,  
 所以 $\sqrt{3} \frac{a}{c} \cdot \sin C = 2 \sin A \cos A$ .  
 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\sqrt{3} \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \sin C = 2 \sin A \cos A$ .  
 所以 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  
 因为 $0 < A < \pi$ ,  
 所以 $A = \frac{\pi}{6}$ .  
 (2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ , 所以  
 $(\sqrt{7})^2 = (2\sqrt{3})^2 + c^2 - 2(2\sqrt{3}) \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 整理得 $c^2 - 6c + 5 = 0$ , 解得 $c = 1$ , 或 $c = 5$   
 , 均适合题意 .

当  $c = 1$  时,  $\triangle ABC$  的面积为  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

当  $c = 5$  时,  $\triangle ABC$  的面积为  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

25 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $b \sin A = \sqrt{3}a \cos B$ .

(1) 求角  $B$  的大小.

(2) 若  $b = 3$ ,  $\sin C = 2 \sin A$ , 求  $a, c$  的值.

答案

(1)  $\frac{\pi}{3}$ .

(2)  $a = \sqrt{3}, c = 2\sqrt{3}$ .

解析

(1) 由  $b \sin A = \sqrt{3}a \cos B$  及正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ,

得  $\sin B \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos B$ ,

$\because A$  为三角形的内角,

$\therefore \sin A \neq 0$ ,

$\therefore \sin B = \sqrt{3} \cos B$ ,

即  $\tan B = \sqrt{3}$ , 又  $B$  为三角形的内角,

$\therefore B = \frac{\pi}{3}$ .

(2) 由  $\sin C = 2 \sin A$  及正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ,

得  $c = 2a$  ①,

$\because b = 3, \cos B = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore$  由余弦定理  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ,

得  $9 = a^2 + c^2 - ac$  ②,

联立①②解得  $a = \sqrt{3}, c = 2\sqrt{3}$ .

26 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a = 7, b = 5, c = 8$ .

(1) 求角  $A$  的大小.

(2) 求角  $B$  的正弦值.

答案

(1)  $\frac{\pi}{3}$ .

(2)  $\sin B = \frac{5}{14}\sqrt{3}$ .

解析

(1)  $\because a = 7, b = 5, c = 8,$

$$\therefore \text{由余弦定理可得: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 64 - 49}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2},$$

又  $A \in (0, \pi),$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由①知:  $A = \frac{\pi}{3}, a = 7, b = 5,$

$$\text{由正弦定理可得: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sin B},$$

$$\therefore \sin B = \frac{5}{14}\sqrt{3}.$$

27 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ , 已知 $a > b, a = 5, \sin B = \frac{3}{5}$ ,  $\triangle ABC$ 的面积为9.

(1) 求 $b$ 和 $\sin A$ 的值.

(2) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

答案

(1)  $b = \sqrt{13}, \sin A = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$

(2)  $\frac{7\sqrt{2}}{26}.$

解析

(1)  $\because S_{\triangle ABC} = 9,$

$$\therefore \frac{1}{2}ac \sin B = 9,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5c \cdot \frac{3}{5} = 9,$$

$$\therefore c = 6,$$

$$\because b < a,$$

$$\therefore \angle B \text{ 为锐角},$$

$$\text{又} \because \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \cos B = \frac{4}{5},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$= 25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \frac{4}{5}$$

$$= 61 - 48$$

$$= 13,$$

$$\therefore b = \sqrt{13},$$

$$\text{又} \because \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{13}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{\sin A},$$

$$\therefore \sin A = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$$(2) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$25 = 13 + 36 - 2 \times 6 \times \sqrt{13} \cos A,$$

$$\therefore 12\sqrt{13} \cos A = 24,$$

$$\cos A = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A = 2 \times \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13},$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{8}{13} - 1 = -\frac{5}{13},$$

$$\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin 2A \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2A$$

$$= \frac{12}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{5}{13}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{26}.$$

28 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ , 所对边分别为 $a, b, c$ , 已知 $a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}b$ ,  $\sin B = \sqrt{6} \sin C$ .

(1) 求 $\cos A$ 的值.

(2) 求 $\cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

答案

$$(1) \cos A = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$(2) \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}.$$

解析

$$(1) \because \sin B = \sqrt{6} \sin C,$$

$$\therefore b = \sqrt{6}c, \text{ 代入 } a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}c, \text{ 得 } a - c = c,$$

$$\text{即 } a = 2c,$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc^2 + c^2 - 4c^2}{2\sqrt{6}c^2} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos A &= \frac{\sqrt{6}}{4} . \\ (2) \therefore \cos A &= \frac{\sqrt{6}}{4}, A \text{ 为三角形内角,} \\ \therefore \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{10}}{4}, \\ \therefore \cos 2A &= 2\cos^2 A - 1 = -\frac{1}{4}, \\ \sin 2A &= 2\sin A \cos A = \frac{\sqrt{15}}{4}. \\ \cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos 2A \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2A \sin \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

29 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ,  $b(\cos B + \cos A \cos C) = 2a \sin B \cos C$ .

(1) 求 $\tan C$ 的值.

(2) 若 $a = 6$ ,  $\cos B = \frac{1}{3}$ , 求 $b$ .

答案

(1)  $\tan C = 2$ .

(2)  $b = 12\sqrt{5} - 6\sqrt{10}$ .

解析

(1)  $\therefore b(\cos B + \cos A \cos C) = 2a \sin B \cos C$ ,

$\therefore$ 由正弦定理, 得:

$$\sin B(\cos B + \cos A \cos C) = 2 \sin A \sin B \cos C.$$

$$\therefore B \in (0, \pi),$$

故 $\sin B \neq 0$ ,

$$\therefore \cos B + \cos A \cos C = 2 \sin A \cos C,$$

$$\therefore -\cos(A + C) + \cos A \cos C = 2 \sin A \cos C,$$

$$\therefore -\cos A \cos C + \sin A \sin C + \cos A \cos C = 2 \sin A \cos C.$$

$$\text{即} \sin A \sin C = 2 \sin A \cos C,$$

$$\text{又} \therefore A \in (0, \pi),$$

$$\sin A \neq 0,$$

$$\therefore \sin C = 2 \cos C.$$

$$\therefore \cos C \neq 0,$$

$$\therefore \tan C = 2 .$$

(2) 由 (1) 知:  $\tan C = 2 > 0$ ,

$$\text{又} \because C \in (0, \pi),$$

$$\therefore C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{则} \sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos C = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{由} \cos B = \frac{1}{3},$$

$$B \in (0, \pi),$$

$$\text{得: } \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \sin A$$

$$= \sin[\pi - (B + C)]$$

$$= \sin(B + C)$$

$$= \sin B \cos C + \cos B \sin C$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}}{15},$$

$$\text{由正弦定理知: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\text{得: } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}}{15}} = 12\sqrt{5} - 6\sqrt{10}.$$

30 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $a = 7, c = 8$ .

(1) 若  $\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ , 求角  $A$ .

(2) 若  $b < a$ , 且  $\triangle ABC$  的面积为  $10\sqrt{3}$ , 求  $b$ .

答案

(1)  $A = 60^\circ$ .

(2) 5.

解析

(1) 由正弦定理知:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\frac{7}{\sin A} = \frac{8}{\frac{4}{7}\sqrt{3}},$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又} \because a < c,$$

$$\therefore \angle A \text{ 为锐角 },$$

$$\therefore A = 60^\circ.$$

$$(2) S = \frac{1}{2}ac \sin B,$$

$$\therefore 10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \sin B,$$

$$\therefore \sin B = \frac{10\sqrt{3}}{28} = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

$$\therefore b < a,$$

$$\therefore \angle B \text{ 为锐角 },$$

$$\therefore \cos B > 0,$$

$$\cos^2 B + \sin^2 B = 1,$$

$$\therefore \cos^2 B + \frac{75}{196} = 1,$$

$$\therefore \cos^2 B = \frac{121}{196},$$

$$\therefore \cos B = \frac{11}{14},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$= 49 + 64 - 2 \times 7 \times 8 \times \frac{11}{14}$$

$$= 49 + 64 - 88$$

$$= 25,$$

$$\text{又} \because b > 0,$$

$$\therefore b = 5.$$