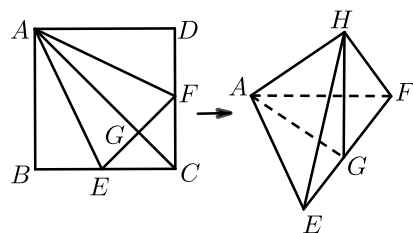


高一期末立体几何

- 1 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 BC 、 CD 的中点， G 是 EF 的中点，现在沿 AE 、 AF 及 EF 把这个正方形折成一个空间图形，使 B 、 C 、 D 三点重合，重合后的点记为 H ，那么，在这个空间图形中必有（ ）。



- A. $AG \perp \triangle EFH$ 所在平面
B. $AH \perp \triangle EFH$ 所在平面
C. $HF \perp \triangle AEF$ 所在平面
D. $HG \perp \triangle AEF$ 所在平面

答案 B

解析 $\because \angle AHE = \angle ABE = 90^\circ$

$$\therefore AH \perp EH$$

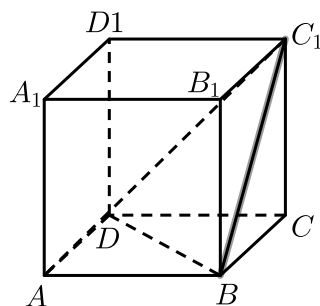
$$\angle AHF = \angle ADF = 90^\circ$$

$$\therefore AH \perp FH$$

$$\text{又} \because EH \cap FH = H$$

$$\therefore AH \perp \text{平面} EFH.$$

- 2 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $C_1 - AB - D$ 的大小为 _____。



答案 45°

解析 $\because AB \perp BC$,

$AB \perp BB_1$,

又 $\because BC \cap BB_1 = B$,

$\therefore AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

又 $\because BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

$\therefore AB \perp C_1B$,

又 $\because DA \perp AB$,

$DA \subset$ 平面 DAB ,

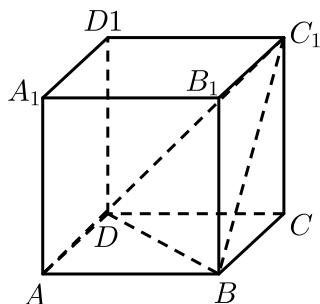
$\therefore DA$ 与 C_1B 所成角为二面角 $C_1 - AB - D$,

又 $\because \underline{DA} // BC$,

$\therefore \angle C_1BC$ 为 DA 与 BC_1 所成角,

$$\tan \angle C_1BC = \frac{C_1C}{BC} = 1,$$

$\therefore \angle C_1BC = 45^\circ$.



3 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的六个顶点都在球 O 的表面上, 若这个三棱柱的体积为 $36\sqrt{3}$, $AB = 6$, 则 $AA_1 =$ _____, 球 O 的表面积为 _____.

答案 1:12

2: 192π

解析 $\because$ 三角形 ABC 为正三角形, $AB = 6$,

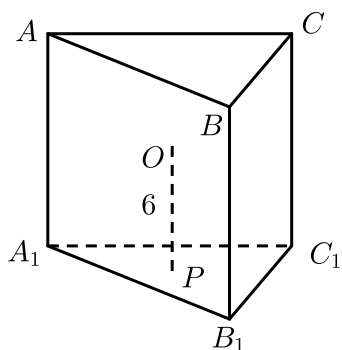
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 ,$$

$$36\sqrt{3} = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times AA_1 ,$$

$$\therefore AA_1 = 12 ,$$

过 O 作 $OP \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ 交平面 $A_1B_1C_1$ 于 P ,



$$\therefore OP = \frac{1}{2} AA_1 = 6 ,$$

$$A_1P = \frac{1}{\sqrt{3}} A_1B_1 = 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore OA_1^2 = A_1P^2 + OP^2 = 12 + 36 = 48 ,$$

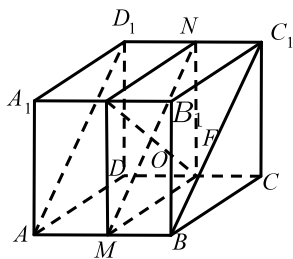
$$S_{\text{表}} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 48 = 192\pi .$$

4 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1 , E 是 A_1B_1 的中点 , 则 E 到平面 ABC_1D_1 的距离 () .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

答案 C

解析 由题意可得下图 :



取 C_1D_1 得中点 N , AB 的中点 M , CD 的中点 F ,

连接 EM , MF , FN , $ENMN$, EF ,

根据题意可得四边形 $MENF$ 是正方形 , 故 $EF \perp MN$,

又根据正方体的性质可知 ,

$AD_1 // MN$, $C_1D_1 \perp$ 平面 $MENF$, 可得 $EF \perp AD_1$, $EF \perp C_1D_1$,

所以 $EF \perp$ 面 ABC_1D_1 ,

因为根据 $AD_1 // MN$ 得到 $MN \subset$ 面 ABC_1D_1 ,

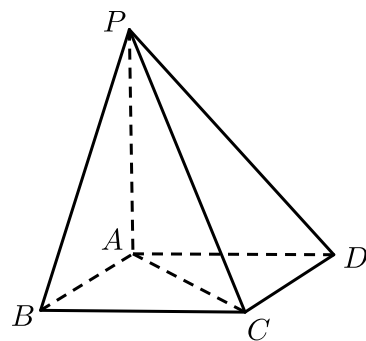
故 O 在平面 ABC_1D_1 上,

所以 E 到平面 ABC_1D 的距离为 OE 的长度,

因为 $EF = \sqrt{2}AA_1$, 所以 $EF = \sqrt{2}$,

所以 $OE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- 5 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = \sqrt{3}$, $AB = 1$, $BC = 2$, $AC = \sqrt{3}$, 则异面直线 PB 与 CD 所成的角等于 _____; 二面角 $P-CD-B$ 的大小为 _____.



答案 1: 60°

2: 45°

解析 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp AB$,

又 $\because AB = 1$, $PA = \sqrt{3}$,

由勾股定理可得 $PB = \sqrt{PA^2 + AB^2} = 2$,

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AB // CD$,

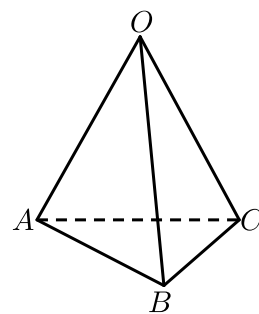
$\therefore$ 异面直线 PB 与 CD 所成的角等于 PB 与 AB 所成的角 $\angle PBA$,

而 $\sin \angle PBA = \frac{PA}{PB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\angle PBA = 60^\circ$,

即异面直线 PB 与 CD 所成的角为 60° ,

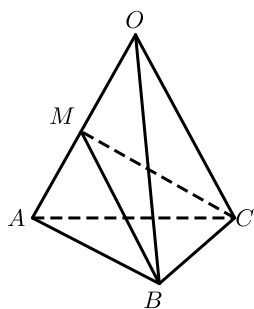
$\because AB = 1, BC = 2, AC = \sqrt{3},$
 $\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2,$
 $\therefore \angle BAC = 90^\circ,$
 $\therefore \angle ACD = 90^\circ, \text{ 即 } AC \perp CD,$
 又 $\because PA \perp \text{平面 } ABCD, CD \subset \text{平面 } ABCD,$
 $\therefore PA \perp CD,$
 又 $\because PA \cap AC = A,$
 $\therefore CD \perp \text{平面 } PAC.$
 又 $\because PC \subset \text{平面 } PAC,$
 $\therefore PC \perp CD,$
 $\therefore \angle PCA$ 是二面角 $P - CD - B$ 的平面角,
 在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中, $PA \perp AC, PA = \sqrt{3}, AC = \sqrt{3},$
 $\therefore \angle PCA = 45^\circ,$
 故二面角 $P - CD - B$ 的大小为 $45^\circ.$

- 6 如图, 在四面体 $O - ABC$ 中, $OA = OB = OC = 1, \cos \angle BOC = \frac{5}{8}, \angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{3},$ 则二面角 $B - OA - C$ 的大小是 _____.



答案 $\frac{\pi}{3}$

解析 $\because OA = OB = OC = 1, \angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{3},$
 $\therefore \triangle AOB, \triangle AOC$ 为正三角形,
 过 B, C 作 AO 的垂线, 则垂足重合, 设为 $M,$



$$\therefore AM = \frac{1}{2}, BM = \frac{\sqrt{3}}{2}, CM = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{在} \triangle BOC \text{中}, \cos \angle BOC = \frac{5}{8},$$

$$\text{又 } BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2BO \cdot CO \cdot \cos \angle BOC,$$

$$BC^2 = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \frac{5}{8},$$

$$\therefore BC^2 = \frac{3}{4},$$

$$BC = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AO \perp BM, AO \perp CM.$$

$$\therefore \angle BMC \text{ 为二面角 } B-AO-C \text{ 的平面角},$$

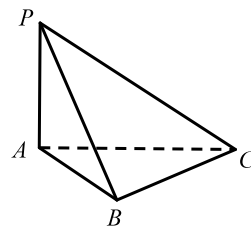
$$\therefore BM = CM = BC = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \triangle BCM \text{ 为正三角形},$$

$$\angle BMC = \frac{\pi}{3},$$

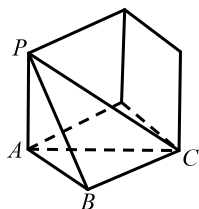
$$\therefore \text{二面角 } B-AO-C \text{ 的大小为 } \frac{\pi}{3}.$$

7 如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $PA = 1$, $AB = 2$, $BC = 3$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 _____.



答案 14π .

解析



将上图补成长方体，

则三棱锥 $P-ABC$ 外接球于长方体外接球是相同的，

PC 为圆的直径，

$$PC = \sqrt{AB^2 + BC^2 + PA^2},$$

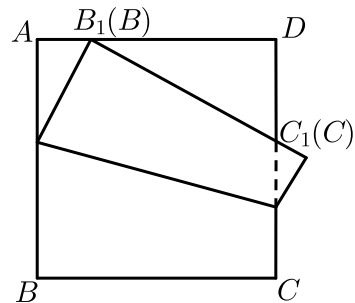
$$= \sqrt{4 + 9 + 1},$$

$$= \sqrt{14},$$

$$\therefore R = \frac{PC}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2},$$

$$\text{表面积} = 4\pi R^2, = 4\pi \cdot \frac{14}{4}, = 14\pi.$$

- 8 如图，将一张边长为1的正方形纸 $ABCD$ 折叠，使得点 B 始终落在边 AD 上，则折起部分面积的最小值为（ ）。



A. $\frac{1}{4}$

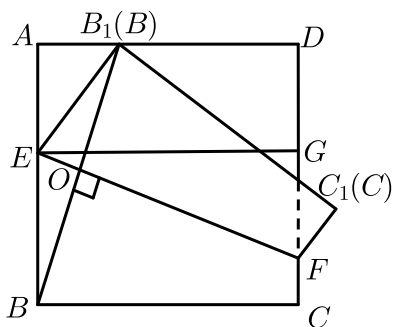
B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

答案 B

解析 如图所示，



设 $AB_1 = x$, 根据勾股定理易求得 $BB_1 = \sqrt{1+x^2}$,

根据翻折的性质 $BO = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2}$,

易证 $\triangle BAB_1 \sim \triangle BOE$,

可求得 : $BE = \frac{1+x^2}{2}$,

过 E 作 $EG \parallel BC$, 易证 $\triangle BAB_1 \cong \triangle EGF$,

$\therefore AB_1 = x = GF$,

$\therefore CF = BE - FG = \frac{x^2 - 2x + 1}{2}$, $\therefore S = \frac{1}{2}(BE + CF) \cdot BC = \frac{2x^2 - 2x + 2}{4}$,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时 , 面积最小 , 为 $\frac{3}{8}$. 故选 B.

9 已知 S, A, B, C 是球 O 表面上的点 , $SA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $SA = AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, 则球 O 的体积等于 () .

A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

B. $\frac{4\pi}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{6}$

答案 B

解析 $\because SA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$,

$\therefore SA \perp BC$, $AB \perp BC$,

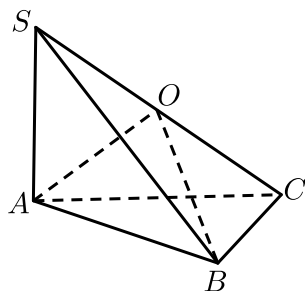
$\therefore BC \perp$ 面 SAB ,

$\therefore BS \subset$ 面 SAB ,

$\therefore SB \perp BC$,

$\therefore$ Rt $\triangle SBC$, Rt $\triangle SAC$ 中 AC 的中点 O ,

$\therefore OS = OA = OB = OC$,



$\therefore SC$ 为球 O 的直径 , 又可求得 $SC = 2$,

$\therefore$ 球 O 的半径 $R = 1$, 体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi$,

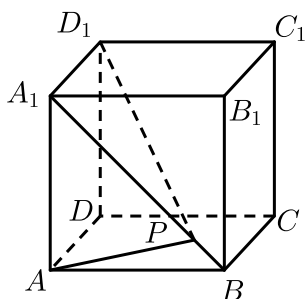
故选：B .

- 10 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，面对角线 A_1B 上存在一点 P ，使得 $AP + D_1P$ 取得最小值，则此最小值为（ ） .

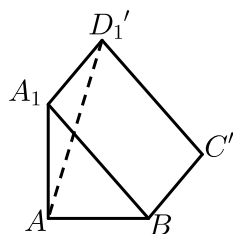
A. 2 B. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ D. $2 + \sqrt{2}$

答案 C

解析 如图，



将对角面 A_1BCD_1 绕 A_1B 旋转至 $A_1BC'D_1'$ ，使其与 $\triangle AA_1B$ 在同一个平面，
连接 AD_1' ，



$$\begin{aligned} AD_1' &= \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1'^2 - 2 \cdot AA_1 \cdot A_1D_1' \cdot \cos \angle AA_1D_1'} \\ &= \sqrt{1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos 135^\circ} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{2}} , \end{aligned}$$

即为 $AP + D_1P$ 的最小值 .

故选C .

- 11 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 $AA_1 = 5$ ， $AB = 12$ ，那么直线 B_1C_1 到平面 A_1BCD_1 的距离是 _____ .

答案 $\frac{60}{13}$

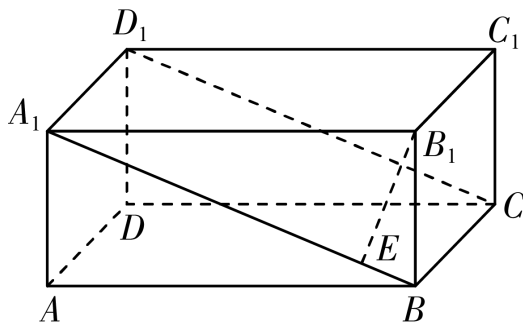
解析 解：在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $B_1C_1 // BC$ ，

而 $BC \subset$ 平面 A_1BCD_1 ， $B_1C_1 \not\subset$ 平面 A_1BCD_1 ，

所以 $B_1C_1 //$ 平面 A_1BCD_1 。

故直线 B_1C_1 上任意一点到平面 A_1BCD_1 的距离相等。

过点 B_1 作 $B_1E \perp A_1B$ 于点 E ，如图所示：



因为 $B_1E \subset$ 平面 ABB_1A_1 ， $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，则 $B_1E \perp BC$ 。

因为 $B_1E \perp A_1B$ ， $A_1B \cap BC = B$ ，所以 $B_1E \perp$ 平面 A_1BCD_1 。

故线段 B_1E 的长度为点 B_1 到平面 A_1BCD_1 的距离，

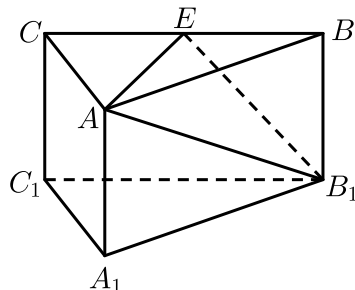
即直线 B_1C_1 到平面 A_1BCD_1 的距离。

因为 $AA_1 = 5$ ， $AB = 12$ ，所以 $A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = 13$ 。

又 $S_{\triangle A_1BB_1} = \frac{1}{2} BB_1 \cdot A_1B_1 = \frac{1}{2} A_1B \cdot B_1E$ ， $BB_1 = AA_1 = 5$ ， $A_1B_1 = AB = 12$ ，

则 $B_1E = \frac{BB_1 \cdot A_1B_1}{A_1B} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$ 。

- 12 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1$ ，底面三角形 $A_1B_1C_1$ 是正三角形， E 是 BC 中点，则下列叙述正确的是（ ）。



- A. CC_1 与 B_1E 是异面直线
B. $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1
C. AE ， B_1C_1 为异面直线，且 $AE \perp B_1C_1$
D. $A_1C_1 //$ 平面 AB_1E

答案

(1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\frac{1}{2}$.

解析

(1) 在 $\triangle ADC$ 中, $\begin{cases} AD \perp AB \\ DC // AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD \perp DC \\ AD = DC \end{cases} \Rightarrow AC = \sqrt{2}$,

在 $\triangle ACD$ 中, $PA = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{2}$, $PC = \sqrt{6}$,

且知 $AC^2 + PC^2 = PA^2$,

$\therefore AC \perp PC$.

$BC^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + AD^2$, 易知 $BC = \sqrt{2}$.

在 $\triangle ACB$ 中, $BC = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{2}$, $AB = 2$,

即 $BC^2 + AC^2 = AB^2$,

$\therefore AC \perp BC$.

$\begin{cases} AC \perp BC \\ AC \perp PC \\ BC \cap PC = C \end{cases} \Rightarrow AC \perp \text{面}PBC, AC \subset \text{面}BAC$

$\Rightarrow \text{面}EAC \perp \text{面}PBC$.

(2) 由(1)知 $AC \perp \text{面}PBC$,

$\therefore AC \perp PC, AC \perp CE$,

$PC \subset \text{面}PAC, CE \subset \text{面}ACE$.

$\Rightarrow \angle PCE$ 为二面角 $P-AC-E$ 的夹角 .

取 BC 中点 F , 连接 EF ,

由(1)知 $PC \perp AC$, 同理 $PC \perp DC$,

$AC \cap DC = C \Rightarrow PC \perp \text{面}ABCD, BC \subset \text{面}ABCD$.

$\Rightarrow PC \perp BC$,

又 $\because E$ 为 PB 中点, F 为 BC 中点 ,

$\Rightarrow EF \perp BC$.

$EF = \frac{1}{2}PC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$CF = BF = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore PE = BE = \sqrt{EF^2 + BF^2} = \sqrt{2}$.

$\therefore \cos \angle PCE = \frac{PC^2 + CE^2 - PE^2}{2 \cdot PC \cdot CE}$
 $= \frac{6 + 2 - 2}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ 二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) 作 $PG \perp CE$ 交 CE 于点 G , 连接 AG ,

$\because$ 面 $EAC \perp$ 面 PCB , 面 $EAC \cap$ 面 $PCB = CE$,

$PG \perp CE$, $PG \subset$ 面 PCB .

$\therefore PG \perp$ 面 EAC .

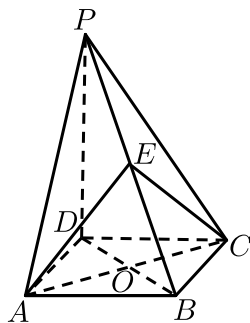
$\therefore \angle PAG$ 为 PA 与面 EAC 所成角 ,

$PC \cdot CF = CE \cdot PG$ 得 $PG = \sqrt{2}$.

又 $\because PG \perp AG$,

$\therefore \sin \angle PAG = \frac{PG}{PA} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

14 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为2的菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 点 E 在棱 PB 上 .



(1) 求证: 平面 $AEC \perp$ 平面 PDB .

(2) 若 $PD = 2$, E 是棱 PB 中点, 求异面直线 AE 和 BC 所成角的余弦值 .

(3) 若直线 AE 与平面 PBD 所成角的正切值最大为2, 求 PD 的长 .

答案

(1) 证明见解析 .

(2) $\frac{3}{4}$.

(3) $2\sqrt{3}$.

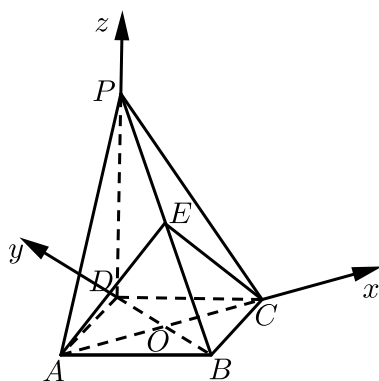
解析

(1) 以 O 为原点 ,

$\because$ 底面 $ABCD$ 为菱形 ,

$\therefore AC \perp BD$,

OC 为 x 轴正方向 , OD 为 y 轴正方向 , DP 为 z 轴正方向 ,



$$\because \angle DAB = 60^\circ,$$

$$AC = 2\sqrt{3},$$

$$BD = 2,$$

$$\therefore O(0,0,0), C(\sqrt{3},0,0), D(0,1,0), A(-\sqrt{3},0,0), B(0,-1,0).$$

$$\because AC \perp BD,$$

$$\text{又} \because PD \perp \text{平面} ABCD,$$

$$AC \subset \text{平面} ABCD,$$

$$\therefore PD \perp AC,$$

$$\text{又} \because BD \cap PD = D,$$

$$\therefore AC \perp \text{平面} PBD,$$

$$\text{又} \because AC \subset \text{平面} AEC,$$

$$\therefore \text{平面} AEC \perp \text{平面} PDB.$$

$$(2) \because PD = 2,$$

$$\therefore P(0,1,2), E(0,0,1),$$

$$\overrightarrow{AE} = (\sqrt{3}, 0, 1), \overrightarrow{BC} = (\sqrt{3}, 1, 0),$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2} = 2,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2} = 2,$$

设 AE 与 BC 所成角为 θ ,

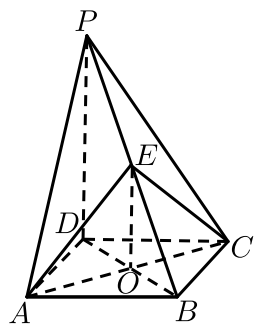
$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}.$$

$$(3) \because AC \perp \text{平面} PBD,$$

$$\therefore AO \perp \text{平面} PBD,$$

$$\therefore AO \perp EO,$$

连接 EO ,


$$\tan \angle AEO = \frac{AO}{EO} = \frac{\sqrt{3}}{EO} \leq 2,$$

$$\therefore EO \geq \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\sin B = \frac{OE}{OB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle B = \frac{PD}{DB} ,$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{PD}{2},$$

$$\therefore PD = 2\sqrt{3} .$$

-

- 第15页 (共46页)

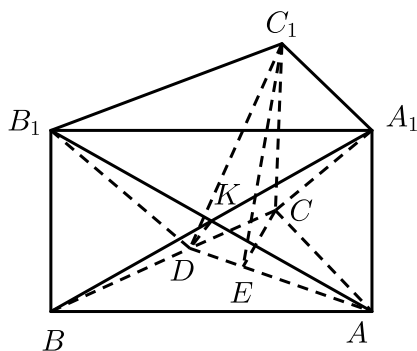
- (2) 求证：平面 $AB_1D \perp$ 平面 CC_1E .
- (3) 求直线 DC_1 与平面 CC_1E 所成角的正弦值 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

解析

- (1) 取 AB_1 中点 K ,



$\because$ 四边形 ABB_1A_1 为长方形 ,

$\therefore K$ 为 A_1B 中点 ,

D 为 BC 中点 , 连结 KD ,

$\therefore KD \parallel A_1C$,

又 $\because KD \subset$ 平面 AB_1D ,

$A_1C \not\subset$ 平面 AB_1D ,

$\therefore A_1C \parallel$ 平面 AB_1D .

- (2) $\because$ 该图为直三棱柱 ,

$\therefore C_1C \perp$ 平面 ABC ,

又 $\because AD \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore C_1C \perp AD$,

又 $\because CE \perp AD$,

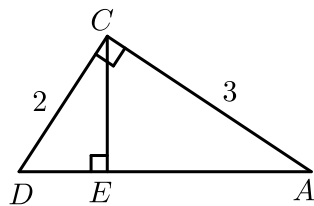
$C_1C \cap CE = C$,

$\therefore AD \perp$ 平面 CC_1E ,

又 $\because AD \subset$ 平面 AB_1D ,

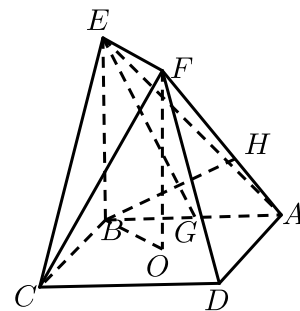
$\therefore$ 平面 $AB_1D \perp$ 平面 CC_1E .

- (3) 由(2)知 $AD \perp$ 平面 CC_1E ,
 $\therefore DE \perp$ 平面 CC_1E ,
 设 DC_1 与平面 CC_1E 所成角为 θ ,



$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{DE}{DC_1} , \\ \therefore D &\text{为} BC \text{中点} , \\ \therefore CD &= \frac{1}{2} BC = 2 , \\ CC_1 &= 2\sqrt{3} , \\ \therefore C_1D^2 &= CD^2 + CC_1^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 , \\ \therefore C_1D &> 0 , \\ \therefore C_1D &= 4 , \\ \therefore AC^2 + BC^2 &= AB^2 , \\ \therefore \angle ACB &= 90^\circ , \\ \text{在 Rt}\triangle ACD \text{中} , \\ AD^2 &= CD^2 + AC^2 = 2^2 + 3^2 = 13 , \\ \therefore AD &= \sqrt{13} , \\ \cos D &= \frac{DC}{AD} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{\sqrt{13}} , \\ DE &= DC \cdot \cos D = 2 \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}} , \\ \sin \theta &= \frac{\frac{4}{\sqrt{13}}}{4} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13} .\end{aligned}$$

- 16 如图, 正方形 $ABCD$ 的中心为 O , 四边形 $OBEF$ 为矩形, 平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$, 点 G 为 AB 的中点, $AB = BE = 2$.



- (1) 求证： $EG \parallel$ 平面 ADF .
- (2) 求二面角 $O - EF - C$ 的正弦值 .
- (3) 设 H 为线段 AF 上的点，且 $AH = \frac{2}{3}HF$ ，求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值 .

答案

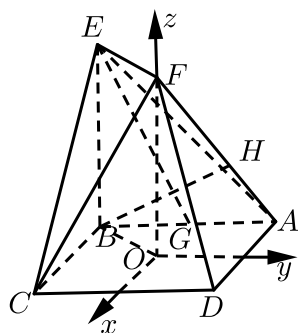
(1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $\frac{\sqrt{7}}{21}$.

解析

(1)



依题意， $\overrightarrow{AD} = (2, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{AF} = (1, -1, 2)$.

设 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ 为平面 ADF 的法向量，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 2x = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} .$$

不妨设 $z = 1$ ，可得 $\vec{n}_1 = (0, 2, 1)$ ，

又 $\overrightarrow{EG} = (0, 1, -2)$ ，可得 $\overrightarrow{EG} \cdot \vec{n}_1 = 0$ ，

又因为直线 $EG \not\subset$ 平面 ADF ，所以 $EG \parallel$ 平面 ADF .

(2) 易证， $\overrightarrow{OA} = (-1, 1, 0)$ 为平面 OEF 的一个法向量 .

依题意， $\overrightarrow{EF} = (1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{CF} = (-1, 1, 2)$.

设 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$ 为平面 CEF 的法向量，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CF} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} .$$

不妨设 $x = 1$, 可得 $\vec{n}_2 = (1, -1, 1)$.

$$\text{因此有 } \cos \langle \vec{OA}, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{n}_2}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{n}_2|} = -\frac{\sqrt{6}}{3} ,$$

$$\text{于是 } \sin \langle \vec{OA}, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3} ,$$

所以 , 二面角 $O - EF - C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$(3) \text{ 由 } \vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{HF} , \text{ 得 } \vec{AH} = \frac{2}{5} \vec{AF} .$$

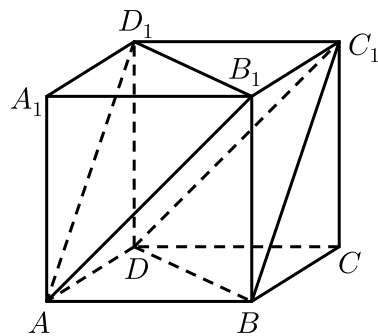
$$\text{因为 } \vec{AF} = (1, -1, 2) , \text{ 所以 } \vec{AH} = \frac{2}{5} \vec{AF} = \left(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right) ,$$

$$\text{进而有 } H \left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) , \text{ 从而 } \vec{BH} = \left(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5} \right) ,$$

$$\text{因此 } \cos \langle \vec{BH}, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{BH} \cdot \vec{n}_2}{|\vec{BH}| \cdot |\vec{n}_2|} = -\frac{\sqrt{7}}{21} .$$

所以 , 直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{21}$.

17 已知棱长为 a 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$.



(1) 求证平面 $AB_1D_1 //$ 平面 DBC_1 .

(2) 求二面角 $C_1 - BD - C$ 的正切值 .

(3) 求出棱锥 $A - BB_1D_1D$ 的体积 .

答案

(1) 证明见解析 .

(2) $\sqrt{2}$.

(3) $\frac{1}{3}a^3$.

解析

(1) $\because$ 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $B_1D_1 = BD = \sqrt{2}a$, $AB_1 = DC_1 = \sqrt{2}a$,

$\therefore AB_1 // DC_1$ 且 $AB_1 \not\subset$ 平面 DBC_1 , $DC_1 \subset$ 平面 DBC_1 ,

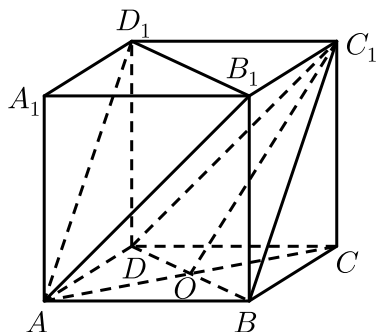
$\therefore AB_1 //$ 平面 DBC_1 ,

$B_1D_1 \parallel BD$ 且 $B_1D_1 \not\subset$ 平面 DBC_1 , $BD \subset$ 平面 DBC_1 ,
 $\therefore B_1D_1 \parallel$ 平面 DBC_1 ,

又 $\because AB_1 \cap B_1D_1 = B_1$,

$\therefore$ 平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 DBC_1 .

(2) 连接 AC 交 BD 于 O , 连接 C_1O ,



$\because CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore CC_1 \perp BD$,

$\because$ 正方形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, $CC_1 \cap AC = C$,

$\therefore BD \perp$ 平面 AA_1C_1C ,

$\therefore BD \perp C_1O$,

$\therefore \angle COC_1$ 为二面角 $C_1 - BD - C$ 的平面角,

Rt $\triangle COC_1$ 中, $C_1C = a$, $CO = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore \tan \angle COC_1 = \frac{CC_1}{CO} = \sqrt{2}$,

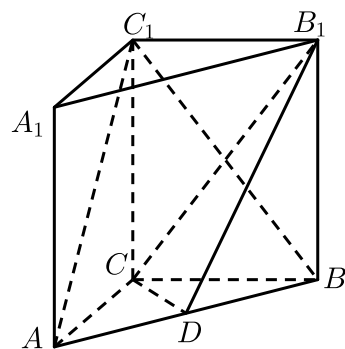
$\therefore$ 二面角 $C_1 - BD - C$ 的正切值等于 $\sqrt{2}$.

(3) $\because$ 点 A 到平面 BDD_1B_1 距离为 $d = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1 = a \cdot \sqrt{2}a = \sqrt{2}a^2$,

$\therefore V_{A-BB_1D_1D} = \frac{1}{3} S_{BB_1D_1D} \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{1}{3}a^3$.

18 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = BC = \sqrt{2}$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AA_1 = 2$, D 为 AB 的中点.



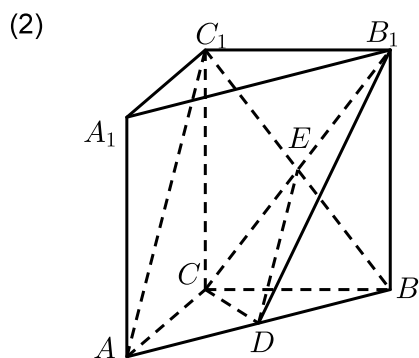
- (1) 求证： $AC \perp BC_1$ ；
- (2) 求证： $AC_1 \parallel \text{平面} B_1CD$ ；
- (3) 求异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值.

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\frac{2}{3}$.

解析

- (1) $\because CC_1 \perp \text{平面} ABC, AC \subset \text{平面} ABC, \angle ACB = 90^\circ, \therefore CC_1 \perp AC, BC \perp AC$.
 $\because CC_1 \cap BC = C, \therefore AC \perp \text{平面} BCC_1$.
 $\because BC_1 \subset \text{平面} BCC_1,$
 $\therefore AC \perp BC_1$.



如图，设 CB_1 与 C_1B 的交点为 E ，连接 DE .

- $\because D$ 为 AB 的中点，
- E 为 C_1B 的中点，
- $\therefore DE \parallel AC_1$.
- $\because DE \subset \text{平面} B_1CD,$
- $AC_1 \not\subset \text{平面} B_1CD,$

$\therefore AC_1 // \text{平面} B_1CD$.

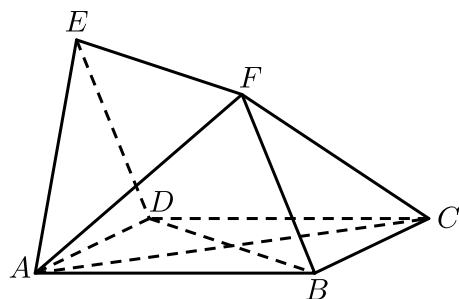
(3) 由 $DE // AC_1$ ，可知 $\angle CED$ 为 AC_1 与 B_1C 所成的角，

在 $\triangle CDE$ 中，

$$\begin{aligned} DE &= \frac{1}{2} AC_1 = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad CE = \frac{1}{2} B_1C = \frac{1}{2} \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \\ CD &= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + BC^2} = 1. \quad \cos \angle CED = \frac{CE^2 + DE^2 - CD^2}{2CE \cdot DE} \\ &= \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 1}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

19 已知四边形 $ABCD$ 与 $BDEF$ 都为菱形， $FA = FC$ ，且 $\angle DAB = \angle DBF = 60^\circ$.



(1) 求证： $AC \perp \text{平面} BDEF$.

(2) 求二面角 $E-AF-B$ 的正弦值.

(3) 若 M 为边 DE 上一点，满足直线 AM 与平面 ABF 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$ ，求 $\frac{DM}{DE}$ 的值.

答案

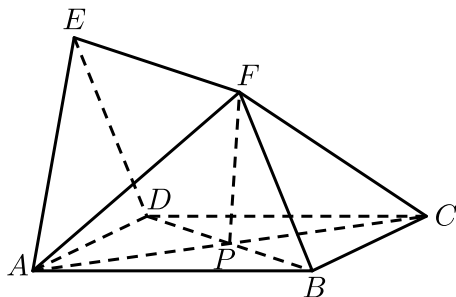
(1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

(3) $\frac{DM}{DE} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

解析

(1) AC 与 BD 相交于 P 点，连接 FP ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

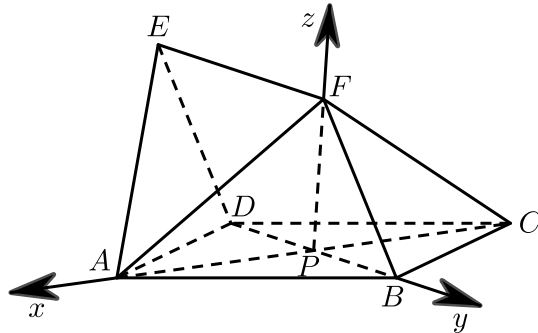
$$\therefore AC \perp BD, AC \perp EF,$$

$$AP = PC, DP = BP, FA = FC,$$

$$\therefore AC \perp FP \text{ 且 } FP \cap BD = P,$$

$$\therefore AC \perp \text{平面} BDEF.$$

(2) 以 PF 所在直线为 z 轴, PA 为 x 轴, PB 为 y 轴, 建立空间直角坐标系,



$$\text{设 } AB = 2,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 为菱形, } \angle DAB = 60^\circ,$$

$$\therefore BD = 2, AC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle DBF \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore PF = \sqrt{3},$$

$$\therefore A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), D(0, -1, 0), C(-\sqrt{3}, 0, 0), F(0, 0, \sqrt{3}), E(0, -2, \sqrt{3}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, -1, 0), \overrightarrow{AF} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DB} = (0, 2, 0),$$

$$\text{设平面 } AEF \text{ 的法向量为 } \vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AF} \cdot \vec{n}_1 = -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot \vec{n}_1 = 2y_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x_1 = 1, \text{ 则 } \vec{n}_1 = (1, 0, 1),$$

$$\text{设平面 } ABF \text{ 的法向量为 } \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AF} \cdot \vec{n}_2 = -\sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_2 = -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x_2 = 1, \text{ 则 } \vec{n}_2 = (1, \sqrt{3}, 1),$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

所以二面角 $E-AF-B$ 的正弦值为

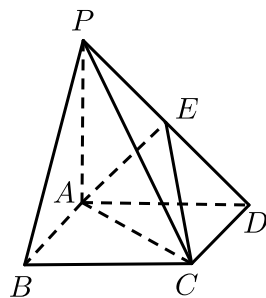
$$\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

(3) $\because M$ 在线段 DE 上, 可设 $M(0, \lambda - 2, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda) \lambda \in (0, 1),$

$$\text{且 } \overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{ED} = \lambda \overrightarrow{BF} = \lambda(0, -1, \sqrt{3}) = (0, -\lambda, \sqrt{3}\lambda),$$

$$\begin{aligned}
 \vec{AM} &= \vec{AD} + \vec{DM} \\
 &= (-\sqrt{3}, -1, 0) + (0, -\lambda, \sqrt{3}\lambda) \\
 &= (-\sqrt{3}, -1-\lambda, \sqrt{3}\lambda), \\
 \cos \langle \vec{AM}, \vec{n_2} \rangle &= \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{4\lambda^2 + 2\lambda + 4}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}, \\
 \text{化简得: } 8\lambda^2 + 4\lambda - 1 &= 0, \\
 \text{得 } \lambda &= \frac{\sqrt{3}-1}{4} \text{ 或 } \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \text{ (舍)}, \\
 \text{所以 } \frac{DM}{DE} &= \frac{|\vec{DM}|}{|\vec{DE}|} = \lambda = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.
 \end{aligned}$$

20 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为2的正方形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ 。



- (1) 求证： $CD \perp$ 平面 PAD 。
- (2) 若 E 为 PD 的中点，三棱锥 $C-ADE$ 的体积为 $\frac{2}{3}$ ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积。

答案 (1) 证明见解析。

(2) $8 + 4\sqrt{2}$ 。

解析 (1) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

又 $\because AD =$ 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD$,

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore CD \perp AD$,

$\therefore CD \perp$ 平面 PAD 。

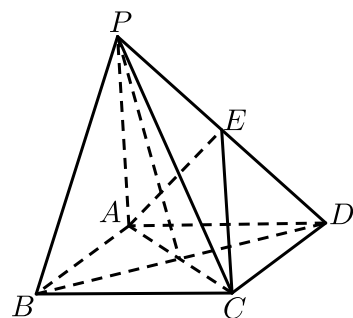
(2) $V_{C-ADE} = \frac{2}{3}$,

$\therefore V_{E-ACD} = \frac{2}{3}$,

$\because E$ 为 PD 中点,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2} V_{P-ACD} &= \frac{2}{3}, \\ \therefore \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \cdot PA &= \frac{2}{3}, \\ \therefore PA &= 2, \\ S_{\text{四边形}ABCD} &= 2 \times 2 = 4, \\ S_{\triangle PAB} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PA = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, \\ S_{\triangle PAD} &= \frac{1}{2} \times PA \cdot AD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, \\ \therefore BC \perp AB, PA \perp BC, \\ \therefore BC \perp \text{平面} PAB, \\ \therefore BC \perp PB, \\ PB^2 &= AB^2 + AP^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \\ \therefore PB &= 2\sqrt{2}, \\ S_{\triangle PBC} &= \frac{1}{2} BC \cdot PB = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \\ \text{由(1)知 } CD \perp \text{平面} PAD, \\ \therefore CD \perp PD, \\ PD^2 &= PA^2 + AD^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \\ \therefore PD &= 2\sqrt{2}, \\ S_{\triangle PCD} &= \frac{1}{2} \times CD \cdot PD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \\ S_{\text{表}} &= 4 + 2 + 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

21 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形， E 为棱 PD 的中点。



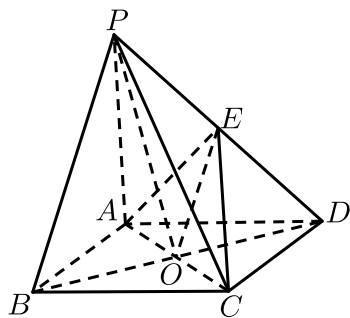
- (1) 求证： $PB \parallel$ 平面 EAC 。
- (2) 求证：平面 $PBD \perp$ 平面 PAC 。
- (3) 若 $PA = AB = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，求直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值。

答案

- (1) 证明见解析 .
 (2) 证明见解析 .
 (3) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

解析

- (1) 底面 $ABCD$ 对角线交点为 O ，连接 EO ，



$\therefore O$ 为 AC ， BD 中点，

又 $\because E$ 为 PD 中点，

$\therefore EO$ 为 $\triangle PBD$ 中位线，

$\therefore EO \parallel PB$ ，

$\because EO \subset \text{平面} EAC$ ， $PB \not\subset \text{平面} EAC$ ，

$\therefore PB \parallel \text{平面} EAC$.

- (2) $\because PA \perp \text{底面} ABCD$ ，

$\therefore PA \perp BD$ ，

$\because AC$ ， BD 为菱形 $ABCD$ 对角线，

$\therefore AC \perp BD$ ，

$PA \cap AC = A$ ， $BD \not\subset \text{平面} PAC$ ，

$\therefore BD \perp \text{平面} PAC$ ， $BD \subset \text{平面} PBD$ ，

$\therefore \text{平面} PBD \perp \text{平面} PAC$.

- (3) 由(2)得：

$\because BD \perp \text{平面} PAC$ ， $PA = AB = AC = 2$ ， $BD \perp PO$ ，

$\therefore \angle BPO$ 为 PB 与平面 PAC 所成角，

$\text{Rt}\triangle PAB$ 中： $PB^2 = PA^2 + AB^2 = 8$ ，

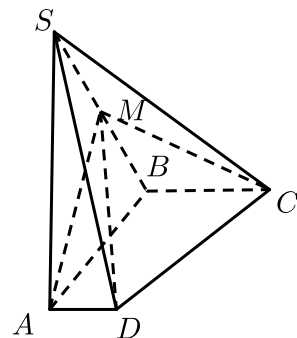
$\therefore PB = 2\sqrt{2}$ ，

$\text{Rt}\triangle BAO$ 中： $BO^2 = AB^2 - AO^2 = 3$ ，

$\therefore BO = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore \sin \angle BPO = \frac{BO}{PB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

- 22 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，侧棱 $SA \perp$ 底面 $ABCD$ ， AB 垂直于 AD 和 BC ， $SA = AB = BC = 2$ ， $AD = 1$ ， M 是棱 SB 的中点。



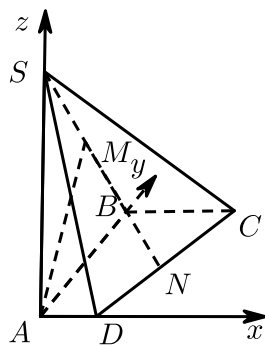
- (1) 求证： $AM \parallel$ 平面 SCD 。
- (2) 求平面 SCD 和平面 SAB 所成锐二面角的余弦值。
- (3) 在线段 DC 上是否存在一点 N ，使得 MN 与平面 SAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{35}}{7}$ ，若存在，请求出 $\frac{DN}{DC}$ 的值，若不存在，请说明理由。

答案

- (1) 证明见解析。
- (2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。
- (3) 存在， $\frac{2}{3}$ 。

解析

- (1) 以点 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$ ， $B(0,2,0)$ ， $D(1,0,0)$ ， $S(0,0,2)$ ， $M(0,1,1)$ ，

则 $\overrightarrow{AM} = (0,1,1)$ ， $\overrightarrow{SD} = (1,0,-2)$ ， $\overrightarrow{CD} = (-1,-2,0)$ ，

设平面 SCD 的法向量是 $\vec{n} = (x,y,z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{SD} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x - 2z = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $x = 2$, $y = -1$,

于是 $\vec{n} = (2, -1, 1)$,

$$\therefore \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0 ,$$

$$\therefore \vec{AM} \perp \vec{n} ,$$

又 $\because AM \not\subset \text{平面} SCD$,

$\therefore AM // \text{平面} SCD$.

(2) 易知平面 SAB 的法向量是 $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$,

设平面 SCD 与平面 SAB 所成的二面角为 α ,

$$\text{则 } |\cos \alpha| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| |\vec{n}_1|} = \frac{2}{1 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} ,$$

$$\text{即 } \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} ,$$

$\therefore$ 平面 SCD 与平面 SAB 所成的二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) 设 $N(x, 2x - 2, 0)$, 则 $\vec{MN} = (x, 2x - 3, -1)$,

$$\therefore \sin \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{MN}|}{|\vec{n}_1| |\vec{MN}|} = \frac{|x|}{\sqrt{5x^2 - 12x + 10}} = \frac{\sqrt{35}}{7} ,$$

$$\therefore 49x^2 = 35(5x^2 - 12x + 10) ,$$

$$7x^2 = 5(5x^2 - 12x + 10) ,$$

$$7x^2 = 25x^2 - 60x + 50 ,$$

$$18x^2 - 60x + 50 = 0 ,$$

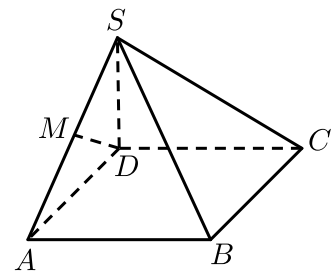
$$9x^2 - 30x + 25 = 0 ,$$

$$(3x - 5)^2 = 0 ,$$

$$\therefore x = \frac{5}{3} ,$$

$$\therefore N\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0\right) , D(1, 0, 0) , C(2, 2, 0) ,$$

$$\frac{DN}{DC} = \frac{x_D - x_N}{x_D - x_C} = \frac{1 - \frac{5}{3}}{-1} = \frac{2}{3} .$$



- (1) 求证 $BC \perp SC$.
- (2) 求平面 SBC 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小 .
- (3) 设棱 SA 的中点为 M . 求异面直线 DM 与 SB 所成角的大小 .

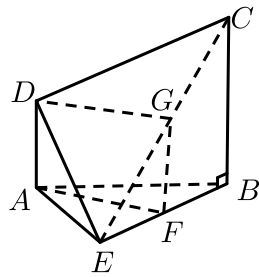
答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 45° .
- (3) 90° .

解析

- (1) $\because SD \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore SD \perp BC$,
 又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形 ,
 $\therefore BC \perp DC$,
 又 $\because CD \cap SD = D$,
 $\therefore BC \perp$ 平面 SDC ,
 $\because SC \subset$ 平面 SDC ,
 $\therefore BC \perp SC$.
- (2) 由 (1) 知 , $BC \perp SC$, $DC \perp BC$,
 $BC =$ 平面 $SBC \cap$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore \angle SCD$ 为平面 SBC 与平面 $ABCD$ 所成角 ,
 $\because SD \perp$ 平面 $ABCD$, $DC \subset$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore SD \perp DC$,
 $\tan \angle SCD = \frac{SD}{DC} = \frac{1}{1} = 1$,
 $\therefore \angle SCD = 45^\circ$.
- (3) $\because DS = DA$, M 为 SA 中点 ,
 $\therefore DM \perp SA$,
 又 $\because SD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

第30页 (共46页)



在 $\triangle EBC$ 中, $\because G, F$ 为中线,

$\therefore GF \parallel BC$ 且 $GF = 1$,

又 $AD \parallel BC$ 且 $AD = 1$,

$\therefore AD \parallel GF$,

$\therefore$ 四边形 $ADGF$ 是平行四边形,

$\therefore DG \parallel AF$,

又 $DG \subset$ 面 DEC , $AF \not\subset$ 面 DEC ,

$\therefore AF \parallel$ 面 DEC .

(2) 在 $\triangle EBC$ 中, $\because BC = 2$, $BE = 2$,

$CE = 2\sqrt{2}$,

$BE^2 + BC^2 = CE^2$,

$\therefore BC \perp BE$, 又 $BC \perp AB$, $AB \cap BE = B$,

$\therefore BC \perp$ 面 ABE ,

$\therefore BC \perp AF$,

又 F 是中点, $AF \perp BE$,

$BC \cap BE = B$,

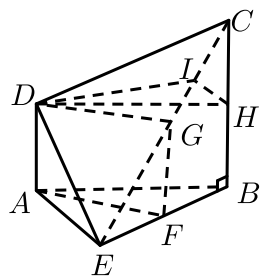
$\therefore AF \perp$ 面 BEC ,

又 $AF \parallel DG$, $DG \subset$ 面 DEC ,

$\therefore$ 面 $DEC \perp$ 面 EBC .

(3) 过 D 作 $DH \parallel AB$,

H 为 BC 中点, 过 H 作 $HI \perp EC$, 连接 DI ,



$\because$ 面 $DEC \perp$ 面 EBC , $HI \perp EC$,

$\therefore HI \perp$ 面 DEC ,

$\therefore \angle HDI$ 为 AB 与平面 DEC 所成角,

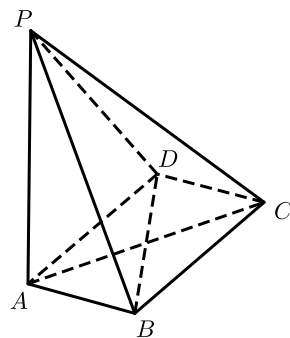
$$\sin \angle HDI = \frac{HI}{DH} = \frac{HI}{AB},$$

$$HI = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \sin \angle HDI = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

即 AB 与平面 DEC 所成角正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

- 25 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $PA = AB = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$.



- (1) 求证: $AB \parallel$ 平面 PCD .
- (2) 求证: 直线 $BD \perp$ 平面 PAC .
- (3) 求直线 PB 与平面 PAD 所成角的正切值.

答案

(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

解析

(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\text{又} \because AB \not\subset \text{平面} PCD, CD \subset \text{平面} PCD,$$

$$\therefore AB \parallel \text{平面} PCD.$$

(2) $\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD,$$

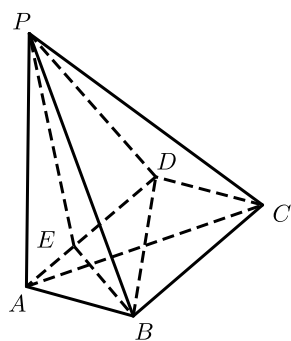
$$\because PA \perp \text{平面} ABCD, BD \subset \text{平面} ABCD,$$

$$\therefore PA \perp BD,$$

$$\text{又} \because AC \cap PA = A,$$

$$\therefore BD \perp \text{平面} PAC.$$

(3) 方法一: 过 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E , 连接 PE ,



$$\because PA \perp \text{平面} ABCD, BE \subset \text{平面} ABCD,$$

$$\therefore PA \perp BE,$$

$$\because BE \perp AD, PA \cap AD = A,$$

$$\therefore BE \perp \text{平面} PAD, \text{ 可得 } \angle BPE \text{ 就是直线 } PB \text{ 与平面 } PAD \text{ 所成的角},$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle BPE \text{ 中}, BE = \sqrt{3}, PE = \sqrt{PA^2 + AE^2} = \sqrt{5},$$

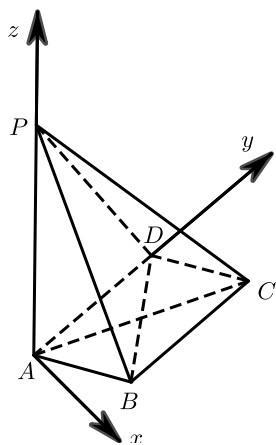
$$\therefore \tan \angle BPE = \frac{BE}{PE} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},$$

$$\text{即 } PB \text{ 与平面 } PAD \text{ 所成角的正切值等于 } \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

方法二: 以点 A 为坐标原点, AD, AP 方向为 y 轴, z 轴正方向,

如图所示, 在平面 $ABCD$ 内与 AD 垂直的方向为 x 轴正方向建立空间直角坐标系

$$A - xyz,$$



则： $P(0,0,2)$ ， $B(\sqrt{3},1,0)$ ， $A(0,0,0)$ ， $D(0,2,0)$ ，

则直线 PB 的方向向量 $\overrightarrow{PB} = (\sqrt{3}, 1, -2)$ ，

很明显平面 PAD 的法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0)$ ，

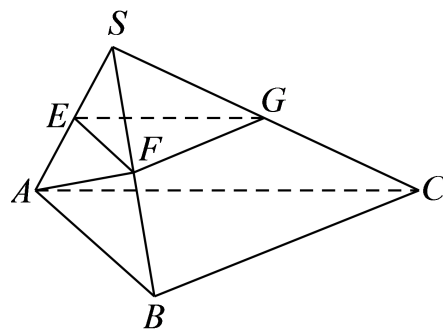
设直线 PB 与平面 PAD 所成角为 θ ，

$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{PB}| \times |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8} \times 1} ,$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} ,$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} .$$

- 26 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，平面 $SAB \perp$ 平面 SBC ， $AB \perp BC$ ， $AS = AB$ ．过 A 作 $AF \perp SB$ ，垂足为 F ，点 E, G 分别是侧棱 SA, SC 的中点．求证：



- (1) 平面 $EFG \parallel$ 平面 ABC ．
- (2) $BC \perp SA$ ．

答案 (1) 证明见解析．
(2) 证明见解析．

解析 (1) 因为 $AS = AB$ ， $AF \perp SB$ ，

所以 F 为 SB 的中点.

又 E, G 分别是侧棱 SA, SC 的中点,

所以 $EF \parallel AB, EG \parallel AC$,

又 $AB \cap AC = A, EF \cap EG = E$,

$EF, EG \subset$ 平面 $EFG, AB, AC \subset$ 平面 ABC ,

所以平面 $EFG \parallel$ 平面 ABC .

(2) 因为平面 $SAB \perp$ 平面 SBC , 平面 $SAB \cap$ 平面 $SBC = SB$,

$AF \subset$ 平面 $SAB, AF \perp SB$,

所以 $AF \perp$ 平面 SBC ,

又 $BC \subset$ 平面 SBC ,

所以 $AF \perp BC$.

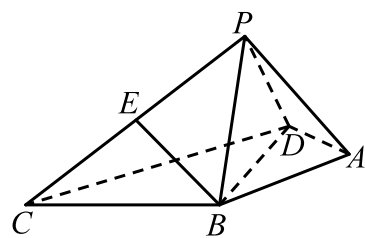
因为 $AB \perp BC, AF \cap AB = A$,

所以 $BC \perp$ 平面 SAB .

又 $SA \subset$ 平面 SAB ,

所以 $BC \perp SA$.

27 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC = BD = DC = 2\sqrt{3}, AD = AB = PD = PB = 2$.



(1) 若点 E 为 PC 的中点, 求证: $BE \parallel$ 平面 PAD .

(2) 当平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ 时, 求二面角 $C-PD-B$ 的余弦值.

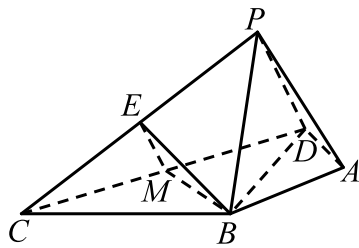
答案

(1) 证明见解析.

(2) 二面角 $C-PD-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

解析

(1) 取 CD 的中点为 M , 连结 EM, BM .



由已知得, $\triangle BCD$ 为等边三角形, $BM \perp CD$.

$$\because AD = AB = 2, BD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ, \therefore BM \parallel AD.$$

又 $\because BM \not\subset \text{平面} PAD, AD \subset \text{平面} PAD,$

$$\therefore BM \parallel \text{平面} PAD.$$

$$\because E \text{ 为 } PC \text{ 的中点, } M \text{ 为 } CD \text{ 的中点, } \therefore EM \parallel PD.$$

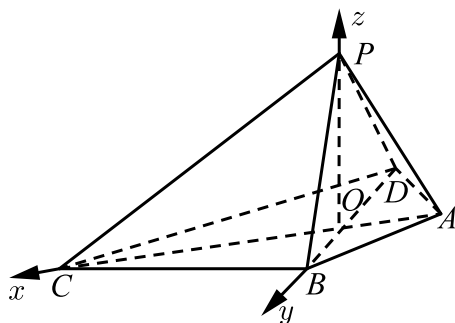
又 $\because EM \not\subset \text{平面} PAD, PD \subset \text{平面} PAD,$

$$\therefore EM \parallel \text{平面} PAD.$$

$$\because EM \cap BM = M, \therefore \text{平面} BEM \parallel \text{平面} PAD.$$

$$\because BE \subset \text{平面} BEM, \therefore BE \parallel \text{平面} PAD.$$

(2) 连结 AC , 交 BD 于点 O , 连结 PO ,



由对称性知, O 为 BD 的中点, 且 $AC \perp BD, PO \perp BD$.

$$\because \text{平面} PBD \perp \text{平面} ABCD, PO \perp BD,$$

$$\therefore PO \perp \text{平面} ABCD, PO = AO = 1, CO = 3.$$

以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OC}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

$$\text{则 } D(0, -3, 0), C(3, 0, 0), P(0, 0, 1).$$

易知平面 PBD 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \vec{n}_2 \perp \overrightarrow{DC}, \vec{n}_2 \perp \overrightarrow{DP},$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{DC} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{DP} = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \vec{DC} = (3, \sqrt{3}, 0), \vec{DP} = (0, \sqrt{3}, 1),$$

$$\therefore \begin{cases} 3x + \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}y + z = 0 \end{cases}.$$

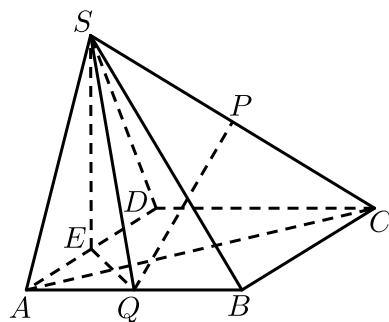
$$\text{令 } y = \sqrt{3}, \text{ 得 } x = -1, z = -3, \therefore \vec{n}_2 = (-1, \sqrt{3}, -3),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{-1}{\sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{13}}{13}.$$

由图可知二面角 $C - PD - B$ 为锐角,

$\therefore$ 二面角 $C - PD - B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{13}}{13}$.

- 28 如图, 在四棱锥 $S - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$, $SA = SD$, E, P, Q 分别是棱 AD, SC, AB 的中点.



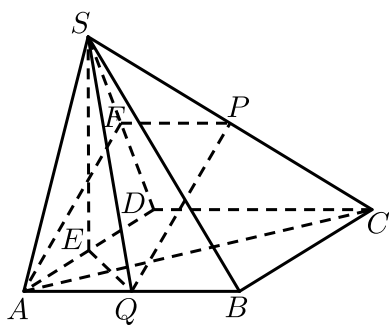
- (1) 求证: $PQ \parallel$ 平面 SAD .
- (2) 求证: $AC \perp$ 平面 SEQ .
- (3) 如果 $SA = AB$, 求直线 PQ 与平面 $ABCD$ 所成角.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 证明见解析.
- (3) $\frac{\pi}{6}$.

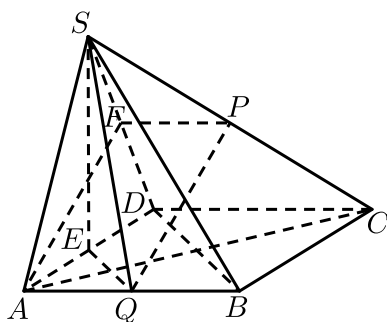
解析

- (1) 取 SD 中点 F , 连接 AF, PF ,



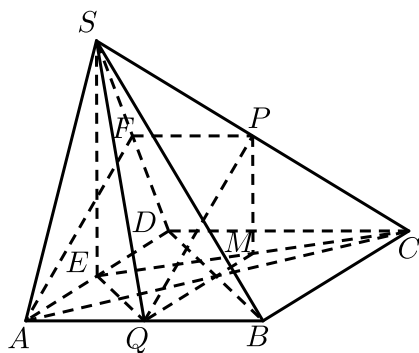
$\therefore PF$ 为 $\triangle SCD$ 中位线 ,
 $\therefore PF \parallel CD$ 且 $PF = \frac{1}{2}CD$,
 $\therefore$ 菱形 $ABCD$ 中 , Q 是 AB 的中点 ,
 $\therefore AQ \parallel CD$ 且 $AQ = \frac{1}{2}CD$,
 $\therefore FP \parallel AQ$ 且 $FP = AQ$,
 $\therefore$ 四边形 $AQPF$ 为平行四边形 ,
 $\therefore PQ \parallel AF$, $PQ \not\subset$ 平面 SAD , $AF \subset$ 平面 SAD ,
 $\therefore PQ \parallel$ 平面 SAD .

(2) 连接 BD ,



$\therefore \triangle SAD$ 中 , $SA = SD$, E 为 AD 中点 ,
 $\therefore SE \perp AD$,
 又 $\therefore SE \subset$ 平面 SAD , 平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore SE \perp$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore SE \perp AC$,
 $\therefore$ 底面 $ABCD$ 为菱形 , AC , BD 为对角线 ,
 $\therefore BD \perp AC$, $EQ \parallel BD$,
 $\therefore EQ \perp AC$ 且 $EQ \cap SE = E$,
 所以 , $AC \perp$ 平面 SEQ .

(3) 连接 EC , 取 EC 中点 M , 连接 QM , PM ,



由(2)可知, $SE \perp$ 底面 $ABCD$,

又 $\because PM$ 为 $\triangle SEC$ 中位线,

$\therefore PM \parallel SE$,

$\therefore PM \perp$ 底面 $ABCD$,

$\therefore \angle PQM$ 即为 PQ 与平面 $ABCD$ 所成角.

设 $SA = SD = AB = a$,

又 $\because \angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore AD = AB = a$,

$\therefore SE = \sqrt{SA^2 - AE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

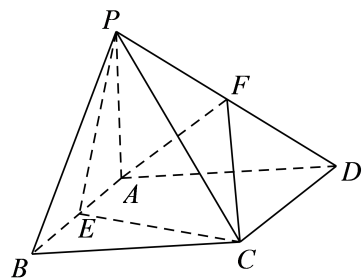
$\therefore PM = \frac{1}{2}SE = \frac{\sqrt{3}}{4}a$, $MQ = \frac{3}{4}AD$,

$\therefore MQ = \frac{3}{4}AD = \frac{3}{4}a$,

$\therefore \tan \angle PQM = \frac{PM}{MQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle PQM = \frac{\pi}{6}$.

- 29 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是矩形, E 、 F 分别是 AB 、 PD 的中点. 若 $PA = AD = 3$, $CD = \sqrt{6}$.



- (1) 求证: $AF \parallel$ 平面 PCE .
- (2) 求点 F 到平面 PCE 的距离.

(3) 求直线 FC 平面 PCE 所成角的正弦值.

答案

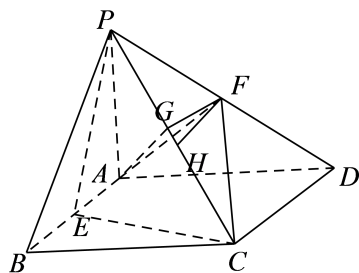
(1) 证明见解析.

(2) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

(3) $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

解析

(1) 设 G 为 PC 的中点, 连接 EG , FG ,



$\therefore FG$ 为 $\triangle PCD$ 的中位线, $\therefore FG \parallel CD \parallel AE$.

又 $\because E$ 为 AB 的中点, $\therefore AE = FG$,

$\therefore AEGF$ 为平行四边形, $\therefore AF \parallel EG$.

$\because AF \not\subset$ 平面 PCE , $EG \subset$ 平面 PCE , $\therefore AF \parallel$ 平面 PCE .

(2) 设 F 到平面 PEC 的距离为 h .

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp EA$.

又 $\because ABCD$ 为矩形, $\therefore EA \perp AD$.

$\because PA \cap AD = A$, $\therefore EA \perp$ 平面 PAD , $\therefore AEGF$ 为矩形.

$\because \triangle PAD$ 为等腰直角三角形, $\therefore PF$ 是棱锥 $P-AEGF$ 的高.

$$\therefore \text{四棱锥 } P-AEGF \text{ 的体积} = \frac{1}{3} \cdot PF \cdot FG \cdot AF = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

$$\because PE = EC = \frac{\sqrt{42}}{2}, PC = 2\sqrt{6}, \therefore \text{由余弦定理可得 } \cos \angle PEC = -\frac{1}{7},$$

$$\therefore \sin \angle PEC = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\therefore S_{\triangle PEC} = 3\sqrt{3};$$

$\therefore$ 四棱锥 $P-AEGF$ 的体积=

三棱锥 $F-PEG$ 体积的2倍=三棱锥 $F-PEC$ 体积

$$\therefore \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}h = \frac{3\sqrt{6}}{4}, \therefore h = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$\therefore F \text{ 点到平面 } PEC \text{ 的距离为 } \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

(3) 在平面 PCD 内作 $FH \perp PC$, 则 $FH \perp$ 平面 PCE ,

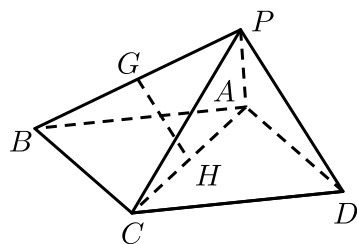
$\therefore \angle FCH$ 是 FC 与平面 PCE 所成的角.

在 $\triangle FCH$ 中, $FH = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $FC = \frac{\sqrt{42}}{2}$,

$\therefore \sin \angle FCH = \frac{\sqrt{21}}{14}$,

$\therefore$ 直线 FC 与平面 PCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

- 30 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle PCD$ 为等边三角形, 平面 $PAC \perp$ 平面 PCD , $PA \perp CD$. $CD = 2$, $AD = 3$.



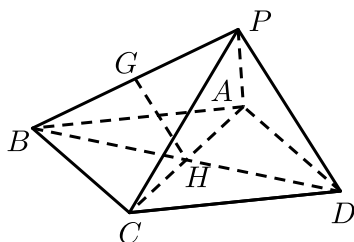
- (1) 设 G, H 分别为 PB, AC 的中点, 求证: $GH \parallel$ 平面 PAD .
- (2) 求证: $PA \perp$ 平面 PCD .
- (3) 求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 证明见解析.
- (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解析

- (1) 连接 BD ,



易知 $AC \cap BD = H$, $BH = DH$.

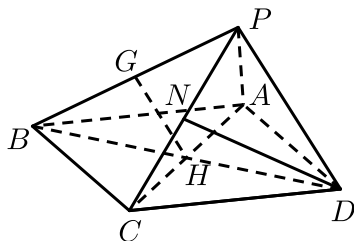
又由 $BG = PG$,

故 $GH \parallel PD$,

又因为 $GH \not\subset$ 平面 PAD , $PD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $GH \parallel$ 平面 PAD .

(2) 取棱 PC 的中点 N ，连接 DN 。



依题意，得 $DN \perp PC$ ，

又因为平面 $PAC \perp$ 平面 PCD ，平面 $PAC \cap$ 平面 $PCD = PC$ ，

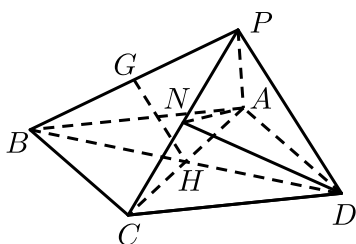
所以 $DN \perp$ 平面 PAC ，交 $PA \subset$ 平面 PAC ，

故 $DN \perp PA$ 。

又已知 $PA \perp CD$ ， $CD \cap DN = D$ ，

所以 $PA \perp$ 平面 PCD 。

(3) 连接 AN ，



由(2)中 $DN \perp$ 平面 PAC ，可知 $\angle DAN$ 为直线 AD 与平面 PAC 所成的角，

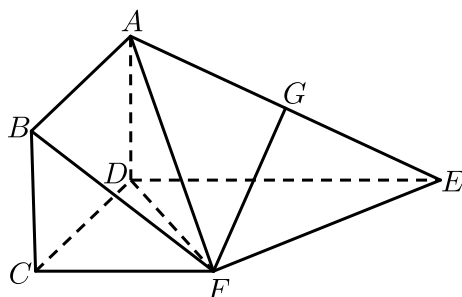
因为 $\triangle PCD$ 为等边三角形， $CD = 2$ 且 N 为 PC 的中点，

所以 $DN = \sqrt{3}$ 。

又 $DN \perp AN$ ，在 $\text{Rt}\triangle AND$ 中， $\sin \angle DAN = \frac{DN}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

所以，直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

- 31 已知正方形 $ABCD$ 与梯形 $CDEF$ 所在平面互相垂直， $CD \perp DE$ ， $CF \parallel DE$ ， $CD = CF = 2$ ， $DE = 4$ ， G 为 AE 的中点。



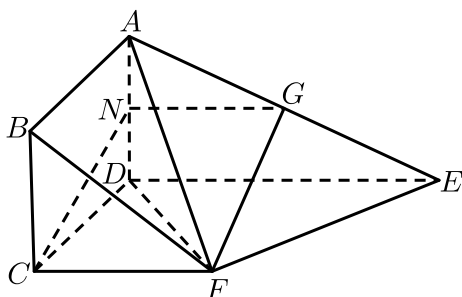
- (1) 求证： $FG \parallel$ 平面 $ABCD$.
- (2) 求证：平面 $ADF \perp$ 平面 AEF .
- (3) 求平面 AEF 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

解析

- (1) 取 AD 中点 N ，连接 NC ， NG ，



在 $\triangle ADE$ 中， N ， G 分别为 AD ， AE 中点，

$$\therefore NG \parallel DE, \text{ 且 } NG = \frac{1}{2}DE = 2,$$

又 $CF \parallel DE$ 且 $CF = 2$ ，

$$\therefore CF \parallel NG \text{ 且 } CF = NG,$$

$\therefore$ 四边形 $CFGN$ 为平行四边形，

$$\therefore FG \parallel CN,$$

又 $CN \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$$\therefore FG \parallel \text{平面 } ABCD.$$

- (2) 在正方形 $ABCD$ 中， $AD \perp DC$ ，

又平面 $ABCD \perp$ 平面 $CDEF$ ，

且平面 $ABCD \cap$ 平面 $CDEF = DC$ ，

$$\therefore AD \perp \text{平面 } CDEF,$$

$$\therefore AD \perp EF,$$

在直角梯形 $CDEF$ 中，由 $CD = CF = 2$ ， $DE = 4$ ，

$$\text{可得 } EF = 2\sqrt{2},$$

在 $\triangle DEF$ 中， $DF = EF = 2\sqrt{2}$ ， $DE = 4$ ，

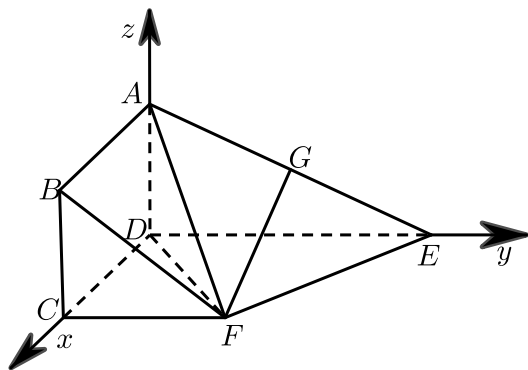
$$\therefore \angle DFE = 90^\circ, DF \perp EF,$$

$$\therefore EF \perp \text{平面} ADF,$$

$$\text{又 } EF \subset \text{平面} AEF,$$

$$\therefore \text{平面} ADF \perp \text{平面} AEF.$$

(3) 以 D 为原点, DC, DE, DA 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立坐标系,



$$\therefore A(0, 0, 2), E(0, 4, 0), F(2, 2, 0),$$

$$\text{平面 } ABCD \text{ 的一个法向量 } \vec{n}_1 = (0, 1, 0),$$

$$\text{设平面 } AEF \text{ 的法向量为 } \vec{n}_2 = (x, y, z),$$

$$\text{由 } \vec{PE} = (-2, 2, 0), \vec{AE} = (0, 4, -2),$$

$$\therefore \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } y = 1, z = 2,$$

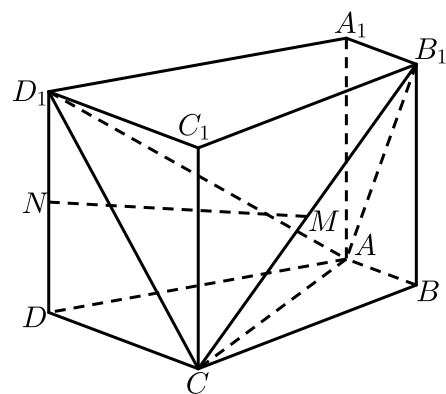
$$\therefore \vec{n}_2 = (1, 1, 2) \text{ 为平面 } AEF \text{ 的一个法向量},$$

设平面 AEF 和平面 $ABCD$ 所成二锐角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

32 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AC$, $AB = 1$,

$AC = AA_1 = 2$, $AD = CD = \sqrt{5}$, 且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点.



- (1) 求证： $MN \parallel$ 平面 $ABCD$.
- (2) 求二面角 $D_1 - AC - B_1$ 的正弦值 .
- (3) 设 E 为棱 A_1B_1 上的点，若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$ ，求线段 A_1E 的长 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.
- (3) $\sqrt{7} - 2$.

解析

- (1) 作 $MQ \perp BC$, 且与 BC 交于点 Q ,

由题意可知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱 ,

所以 $DD_1 \parallel BB_1$,

又因为 M 为 B_1C 的中点 ,

所以 $MQ \parallel BB_1$, $MQ = \frac{1}{2}BB_1$,

又因为 N 为 DD_1 的中点 ,

所以 $ND \parallel MQ$, $ND = MQ$.

所以四边形 $NDQM$ 是平行四边形 .

所以 $NM \parallel DQ$.

因为 $DQ \subset$ 平面 $ABCD$,

$NM \not\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $NM \parallel$ 平面 $ABCD$.

- (2) 以 AC 为 x 轴 , AB 为 y 轴 , AA_1 为 z 轴建立空间直角坐标系 , 如图 :

则 $C(2, 0, 0)$, $B_1(0, 1, 2)$, $A(0, 0, 0)$, $D_1(1, -2, 2)$,

$A_1(0, 0, 2)$, $N(1, -2, 1)$, $B(0, 1, 0)$,

平面 D_1AC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\overrightarrow{AD_1} = (1, -2, 2), \overrightarrow{AC} = (2, 0, 0),$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = 1 \text{ 得 }, \vec{n} = (0, 1, 1).$$

设平面 CB_1A 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

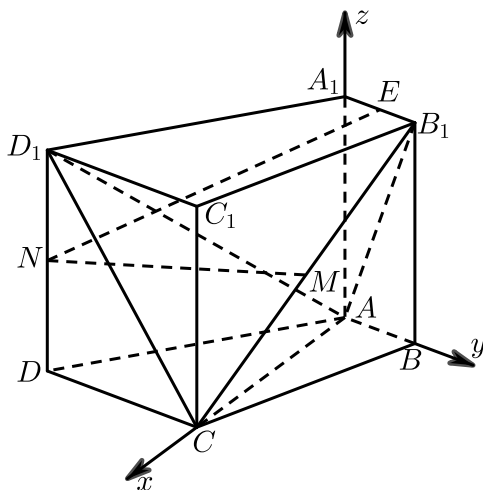
$$\overrightarrow{AB_1} = (0, 1, 2), \overrightarrow{AC} = (2, 0, 0),$$

$$\begin{cases} y_1 + 2z_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z_1 = 1 \text{ 得 }, \vec{m} = (0, -2, 1).$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

因为二面角 $D_1 - AC - B_1$ 为锐角,

所以二面角 $D_1 - AC - B_1$ 的正弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.



$$(3) \text{ 设 } E(x, y, z), \overrightarrow{A_1E} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}, (0 \leq \lambda \leq 1), \overrightarrow{A_1E} = (x, y, z - 2), \overrightarrow{A_1B_1} = (0, 1, 0).$$

$$\text{所以 } E = (0, \lambda, 2).$$

$$\overrightarrow{NE} = (-1, \lambda + 2, 1),$$

平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

由已知得,

$$\left| \cos \langle \overrightarrow{NE}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{NE} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{NE}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2 + (\lambda + 2)^2}} = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } \lambda = \sqrt{7} - 2,$$

所以, 线段 A_1E 的长为 $\sqrt{7} - 2$.