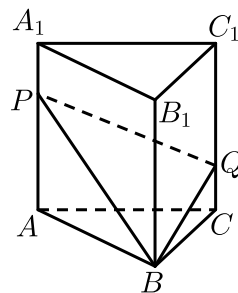


组合体体积

- 1 如图，已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ，点 P, Q 分别在侧棱 AA_1 和 CC_1 上， $AP = C_1Q$ ，则平面 BPQ 把三棱柱分成两部分的体积比为（ ）。



- A. 2 : 1 B. 3 : 1 C. 3 : 2 D. 4 : 3

答案 A

解析 $V_{B-ACQP} = \frac{1}{2} V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{2} \times 2V_{B-ACC_1}$
 $= V_{C_1-ABC} = \frac{1}{3} V_{\text{柱}},$

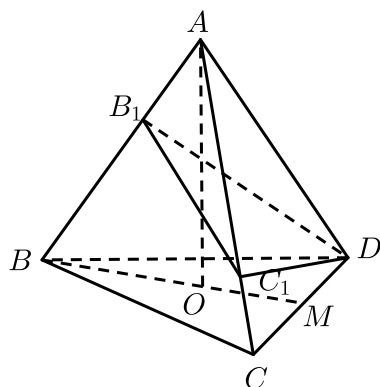
因此两部分体积之比为 2 : 1 .

故选 A .

- 2 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 3，点 B_1 和 C_1 分别在棱 AB 和 AC 上，且 $AB_1 = 1, AC_1 = 2$ ，则四面体 AB_1C_1D 的体积为 _____ .

答案 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析 如图， $AO \perp$ 平面 BCD ， M 是 CD 的中点，



$\because \triangle BCD$ 的边长为 3 ,

$$\therefore BM = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\therefore BO = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \sqrt{3} ,$$

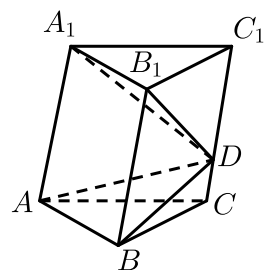
$$\therefore AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6} ,$$

$\therefore$ 四面体 AB_1C_1D 的体积 :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AB_1C_1} \cdot h_D \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB_1 \times AC_1 \times \sin \angle B_1AC_1 \times AO \\ &= \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} . \end{aligned}$$

故本题的正确答案为 : $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- 3 如图 , 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 , D 是 CC_1 上一点 , 设四棱锥 $D - A_1ABB_1$ 的体积为 V_1 , 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 V_2 , 则 $V_1 : V_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.



答案 2 : 3

解析 设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高为 h ,
三棱锥 $D - ABC$ 的高为 h_1 ,

三棱锥 $D - A_1B_1C_1$ 的高为 h_2 ,

则 $h = h_1 + h_2$,

设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面 $\triangle ABC$ 的面积为 S ,

则三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积 $V_2 = Sh$,

三棱锥 $D - ABC$ 的体积 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3}Sh_1$,

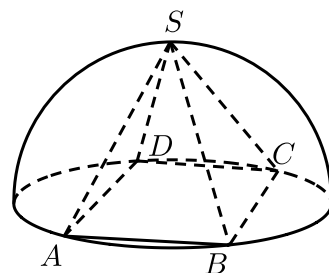
三棱锥 $D - A_1B_1C_1$ 的体积 $V_{D-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}Sh_2$,

所以四棱锥 $D - A_1ABB_1$ 的体积 :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{\text{三棱柱 } ABC-A_1B_1C_1} - V_{D-ABC} - V_{D-A_1B_1C_1} = Sh - \frac{1}{3}Sh_1 - \frac{1}{3}Sh_2 = Sh - \frac{1}{3}S(h_1 + h_2) \\ &= Sh - \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{3}Sh = \frac{2}{3}V_2 , \end{aligned}$$

故 $V_1 : V_2 = 2 : 3$.

- 4 如图, 半球内有一内接正四棱锥 $S - ABCD$, 该四棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 则该半球的体积为 _____ .



答案 $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

解析 因为四棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 设球半径为 R ,

$$\text{则 } \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} \times R \times \frac{1}{2} \times 2R \times 2R ,$$

$$\therefore R = \sqrt{2} ,$$

$$\text{因此半球的体积为 } V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi .$$

- 5 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB = 2$, $AA_1 = 1$, 若则点 A 到平面 A_1BC 的距离为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

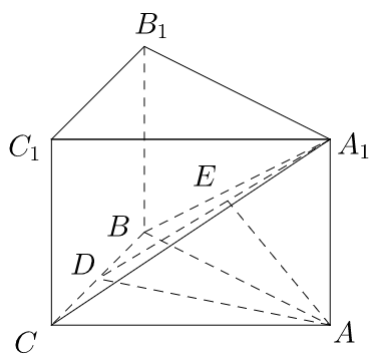
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D. $\sqrt{3}$

答案 B

解析



设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h ,

$$\because V_{A_1-ABC} = V_{A-A_1BC} ,$$

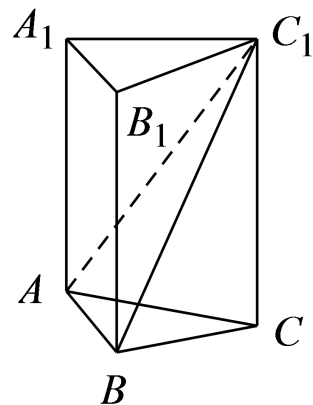
$$\therefore \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} \cdot h ,$$

$$\therefore \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{1}{3} \times 2 \times h ,$$

$$\text{解得 } h = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

故选B .

- 6 如图 , 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 , $AB = 1$, 若二面角 $C - AB - C_1$ 的大小为 60° , 则点 C 到平面 ABC_1 的距离为 () .



A. $\frac{3}{4}$

B. 1

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{3}{2}$

答案 A

解析 点 C 到平面 C_1AB 距离为 h ,

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} , S_{\triangle ABC_1} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

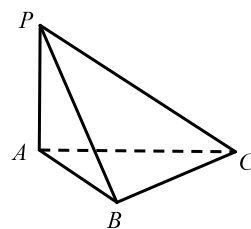
$$\therefore V_{G-ABC} = V_{C_1-ABC},$$

$$\text{即 } \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot C_1C = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC_1} \cdot h$$

$$\therefore h = \frac{3}{4}.$$

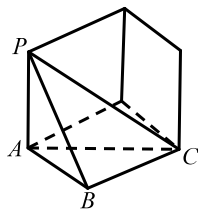
故选A.

- 7 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $PA = 1$, $AB = 2$, $BC = 3$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 _____.



答案 14π .

解析



将上图补成长方体,

则三棱锥 $P-ABC$ 外接球于长方体外接球是相同的,

PC 为圆的直径,

$$PC = \sqrt{AB^2 + BC^2 + PA^2},$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 1},$$

$$= \sqrt{14},$$

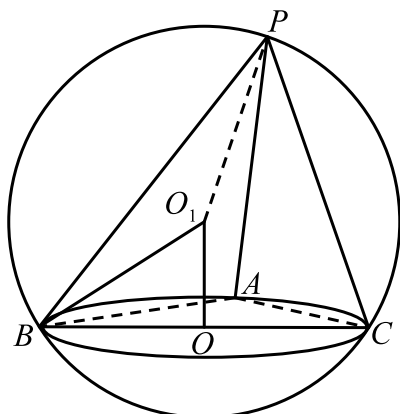
$$\therefore R = \frac{PC}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2},$$

$$\text{表面积} = 4\pi R^2, = 4\pi \cdot \frac{14}{4}, = 14\pi.$$

- 8 已知点 A 是以 BC 为直径的圆 O 上异于 B, C 的动点, P 为平面 ABC 外一点, 且平面 $PBC \perp$ 平面 ABC , $BC = 3$, $PB = 2\sqrt{2}$, $PC = \sqrt{5}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 _____.

答案 10π

解析 因为 O 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，



且平面 $PBC \perp$ 平面 ABC ，过 O 作面 ABC 的垂线 l ，则垂线 l 一定在面 PBC 内，

根据球的性质，球心一定在垂线 l ，

$\therefore$ 球心 O_1 一定在面 PBC 内，即球心 O_1 也是 $\triangle PBC$ 外接圆的圆心，

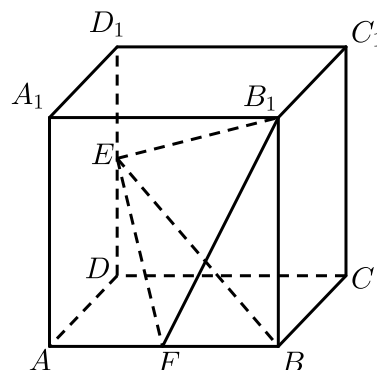
在 $\triangle PBC$ 中，由余弦定理得 $\cos B = \frac{PB^2 + BC^2 - PC^2}{2BP \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

由正弦定理得： $\frac{PC}{\sin B} = 2R$ ，解得 $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ，

$\therefore$ 三棱锥 $P - ABC$ 外接球的表面积为 $s = 4\pi R^2 = 10\pi$ ，

故答案为： 10π 。

9 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1， E 为棱 DD_1 上的点， F 为 AB 的中点，则三棱锥 $B_1 - BFE$ 的体积为 _____。



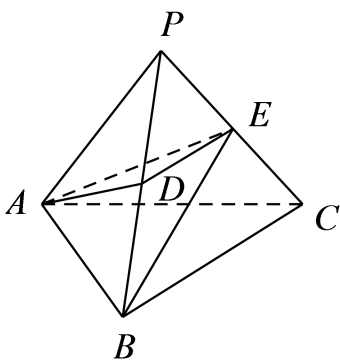
答案 $\frac{1}{12}$

解析 $V_{B_1-BFE} = V_{E-BFB_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BFB_1} \cdot AD = \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12}$.

10 三棱锥 $P-ABC$ 中, D, E 分别为 PB, PC 的中点, 记三棱锥 $D-ABE$ 的体积为 V_1 , $P-ABC$ 的体积为 V_2 , 则 $V_1 : V_2 =$ _____ .

答案 1 : 4

解析 依题意作图如下:



记点 C 到平面 PAB 距离为 d ,

$$V_{P-ABC} = V_{C-PAB} ,$$

$$\text{又} \because V_{C-PAB} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PAB} \cdot d ,$$

$$V_{D-ABE} = V_{E-ABD} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} d \right) \cdot S_{\triangle ABD} ,$$

$$\text{又} \because S_{\triangle ABD} : S_{\triangle PAB} = 1 : 2 ,$$

$$\therefore V_1 : V_2 = V_{E-ABD} : V_{C-PAB} = 1 : 4 .$$

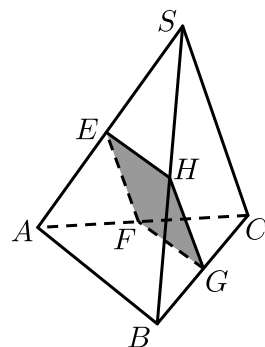
11 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上, 若 $AB = AC = 2$, $AA_1 = 3$, $\angle BAC = 90^\circ$, 则此球的表面积等于 _____ .

答案 17π

解析 $2R = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17}$,

$$S = 4\pi R^2 = 17\pi .$$

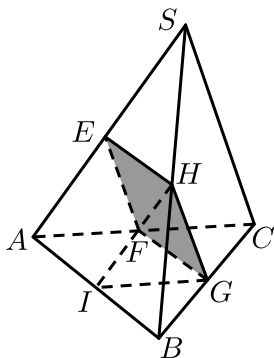
- 12 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中， E, F, G, H 分别为 SA, AC, BC, SB 的中点，则截面 $EFGH$ 将该三棱锥分成的两部分的体积之比 $\frac{V_{ABGHEF}}{V_{SCGHEF}} = \underline{\hspace{2cm}}$.



答案 1

解析 方法一：（常规解法）

如图，取 AB 的中点 I ，连接 HI, GI ，



$$\text{则 } V_{H-IBG} = \frac{1}{8} V_{S-ABC}, V_{AEF-IHG} = 3V_{H-IBG} = \frac{3}{8} V_{S-ABC},$$

$$\text{所以 } V_{ABGHEF} = V_{AEF-IHG} + V_{H-IBG} = \frac{1}{2} V_{S-ABC},$$

$$\text{所以 } V_{SCGHEF} = V_{S-ABC} - V_{ABGHEF} = \frac{1}{2} V_{S-ABC},$$

所以答案为1 .

方法二：（秒杀解法）

由于图形不确定，而答案固定，

故假设该三棱锥为正四面体，则所截得的两部分形状一样，体积相等，

故答案为1 .

- 13 所有棱长均为4的正四棱锥的外接球体积为（ ） .

A. $\frac{32\pi}{3}$

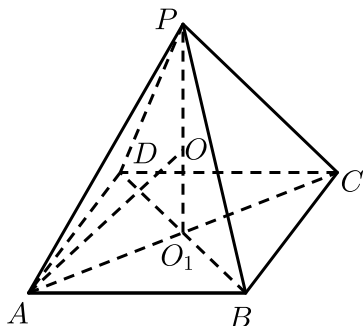
B. 32π

C. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$

D. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

答案 D

解析 $\because$ 正四棱锥的棱长为2, 其外接球的球心在它的高 PO_1 上, 如图 O 为外接球的球心,



由题意可知, $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$,

$$\therefore AO_1 = 2\sqrt{2},$$

又 $AP = 4$, 则 $PO_1 = \sqrt{AP^2 - AO_1^2} = 2\sqrt{2}$,

令外接球半径为 R , 则 $OO_1 = 2\sqrt{2} - R$,

在 $Rt\triangle AOO_1$ 中, $R^2 = (2\sqrt{2} - R)^2 + (2\sqrt{2})^2$,

$$\therefore R = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{64}{3}\sqrt{2}\pi.$$

故选D.

14 已知球 O 与棱长为4的正四面体的各棱相切, 则球 O 的体积为().

A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

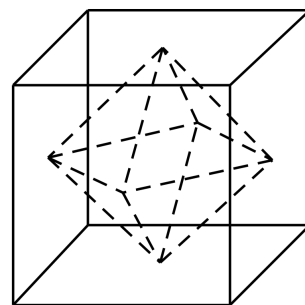
C. $\frac{8\sqrt{6}}{3}\pi$

D. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$

答案 A

解析 将正四面体补成正方体, 则正四面体的棱为正方体面上的对角线, 因为正四面体的棱长为4, 所以正方体的棱长为 $2\sqrt{2}$, 因为球 O 与正四面体的各棱都相切, 所以球 O 为正方体的内切球, 即球 O 的直径为正方体的棱长 $2\sqrt{2}$, 则球 O 的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.
故选A.

- 15 如图所示，正方体的棱长为2，以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为 _____ .



答案 $\frac{4}{3}$

解析 方法一：平面 $ABCD$ 将多面体分成了两个以 $\sqrt{2}$ 为底面边长，高为1的正四棱锥，所以其体积为 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$.

方法二：由图可知该几何体为两个全等的正四棱锥构成，

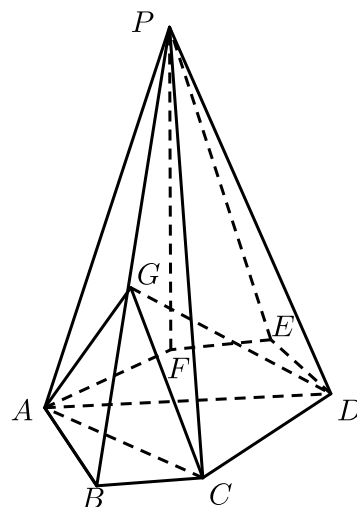
四棱锥底面四边形面积为正方形面积一半为2，

高为正方体棱长一半为1，

所以 $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 \times 2 = \frac{4}{3}$.

故答案为： $\frac{4}{3}$.

- 16 正六棱锥 $P - ABCDEF$ 中， G 为 PB 的中点，则三棱锥 $D - GAC$ 与三棱锥 $P - GAC$ 体积之比为 () .



A. 1:1

B. 1:2

C. 2:1

D. 3:2

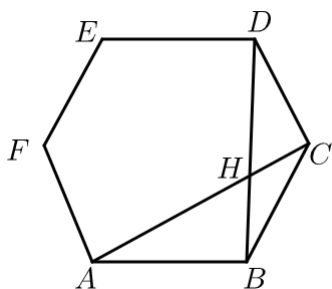
答案 C

解析 由于 G 是 PB 中点, 故 $P-GAC$ 的体积等于 $B-GAC$ 的体积, 在底面正六边形中,

$$BH = AB \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} AB, \text{ 而 } BD = \sqrt{3} AB, \text{ 所以 } DH = 2BH, \text{ 于是}$$

$$V_{D-GAC} = 2V_{B-GAC} = 2V_{P-GAC},$$

故选C.



17 已知半径为2的球内有一个内接圆柱, 若圆柱的高为2, 则球的体积与圆柱的体积的比为().

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{9}{16}$

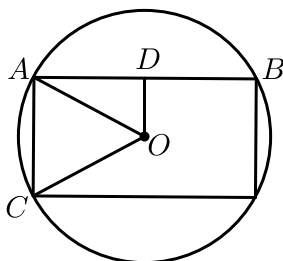
C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{16}{9}$

答案 D

解析 球的体积 $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$.

由图,



根据几何关系可知 $\angle AOC = \angle CAO = \angle ACO = 60^\circ$,

$$\therefore \angle OAB = 30^\circ,$$

$$\therefore AO = 2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{圆柱体积为 } V = 2 \times \pi \times (\sqrt{3})^2 = 6\pi.$$

$$\therefore \text{球的体积与圆柱的体积比为 } \frac{\frac{32}{3}\pi}{6\pi} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9}.$$

故选D.

- 18 一个正六棱柱的底面上正六边形，其侧棱垂直于底面，已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上，且该六棱柱的体积为 $\frac{9}{8}$ ，底面周长为3，则这个球的体积为_____.

答案 $\frac{4\pi}{3}$

解析 设正六边形边长为 a ，正六棱柱的高为 h ，底面外接圆的半径为 r ，则 $a = \frac{1}{2}$ ，
底面积为 $S = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ， $V_{\text{柱}} = Sh = \frac{3\sqrt{3}}{8}h = \frac{9}{8}$ ，
 $\therefore h = \sqrt{3}$ ， $R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ ， $R = 1$ ，
球的体积为 $V = \frac{4\pi}{3}$.

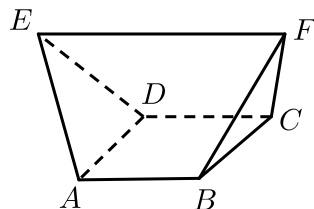
- 19 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知 $ABCD$ 是边长为1的正方形，且 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCF$ 均为正三角形， $EF \parallel AB$ ， $EF = 2$ ，则该多面体的体积为（ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

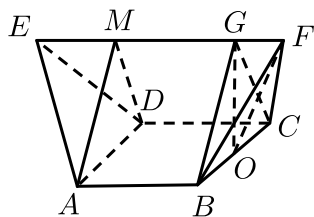
C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{3}{2}$



答案 A

解析 如图所示，过 BC 作 EF 的直截面 BCG ，



作面 $ADM \parallel$ 面 BCG ， $FO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $FG = \frac{1}{2}$ ，
所以 $GO = \sqrt{FO^2 - FG^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{所以 } S_{\triangle BCG} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} .$$

$$V_1 = V_{BCG-ADM} = S_{\triangle BCG} \cdot AB = \frac{\sqrt{2}}{4} ,$$

$$V_2 = 2V_{F-BCG} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} ,$$

$$\text{从而 } V = V_1 + V_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} .$$

故选A .

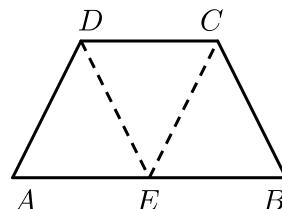
- 20 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB = 2DC = 2$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， E 为 AB 的中点，将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED ， EC 向上折起，使 A ， B 重合于点 P ，则三棱锥 $P - DCE$ 的外接球的体积为（ ） .

A. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$

B. $\frac{\sqrt{6}\pi}{2}$

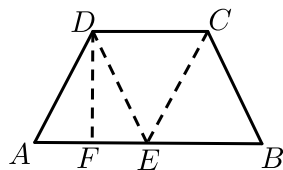
C. $\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$

D. $\frac{\sqrt{6}\pi}{24}$



答案 C

解析 方法一：过 D 点作 $DF \perp AB$ 于 F ，

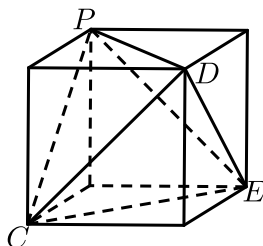


$$\text{则 } AD = \frac{AF}{\cos 60^\circ} = 1 ,$$

$$\therefore AD = DC = CB = CE = BE = ED = AE = 1 ,$$

折叠后形成的三棱锥 $P - DCE$ 为棱长为1的正四面体 .

方法二： $\because$ 正四面体 $P - DCE$ —内接于棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方体，



∴其外接球即为上述正方体外接球，

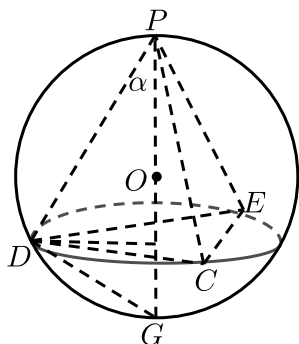
设其外接球半径为 R ，

$$\text{则 } 2R = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{8}\pi.$$

方法三：如图，



$$\therefore \sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 \times \frac{2}{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{2R},$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{8}\pi.$$

21 在梯形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD = 2AB = 2$ ．将梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为（ ）．

A. $\frac{2\pi}{3}$

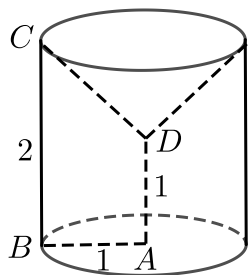
B. $\frac{4\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{3}$

D. 2π

答案 C

解析



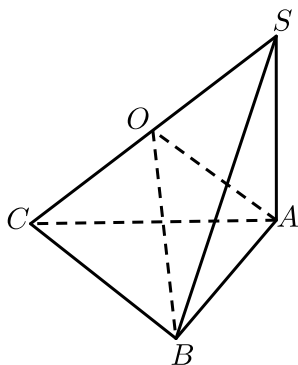
由图知梯形 $ABCD$ 绕着 AD 所在的直线旋转一周所形成的几何体的体积，

恰好为以 BC 为高、底面半径为 AB 的圆柱体的体积减去底面半径为 AB 、高为 $(BC - AD)$ 的圆锥体体积，即 $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ ，
故选C。

- 22 已知三棱锥 $S - ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上， SC 是球 O 的直径，若平面 $SCA \perp$ 平面 SCB ， $SA = AC$ ， $SB = BC$ ，三棱锥 $S - ABC$ 的体积为9，则球 O 的表面积为 _____。

答案 36π

解析 令 $SO = AO = OB = R$ ，
 $\because O$ 为 SC 中点， $SA = AC$ ， $SB = BC$ ，



$\therefore AO \perp SC$ ， $BO \perp SC$ ，
 $\therefore SC \perp$ 平面 ABO ，
又 $\because$ 平面 $SCA \perp$ 平面 SCB ，平面 $SCA \cap$ 平面 $SCB = SC$ ， $SC \perp AO$ ，
 $\therefore AO \perp$ 平面 SCB ，
 $\therefore V = \frac{1}{3} S_{\triangle SBC} \cdot OA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2R \times R \times R = 9$ ，
 $\therefore R = 3$ ，
 $\therefore S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 9 = 36\pi$ 。