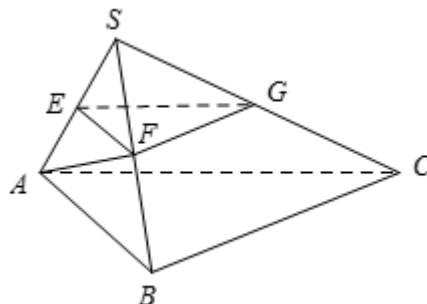


立体几何平行垂直

- 1 如图所示，在三棱锥 $S-ABC$ 中，平面 $SAB \perp$ 平面 SBC ， $AB \perp BC$ ， $AS = AB$ ，过 A 作 $AF \perp SB$ ，垂足为 F ，点 E ， G 分别是棱 SA ， SC 的中点。



- (1) 平面 $EFG \parallel$ 平面 ABC .
- (2) $BC \perp SA$.

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .

解析

- (1) $\because$ 在 $\triangle ASB$ 中， $SA = AB$ 且 $AF \perp SB$ ，
 $\therefore F$ 为 SB 的中点 .
 $\because E, G$ 分别为 SA, SC 的中点，
 $\therefore EF, EG$ 分别是 $\triangle SAB, \triangle SAC$ 的中位线，
 可得 $EF \parallel AB$ 且 $EG \parallel AC$.
 $\because EF \not\subset$ 平面 $ABC, AB \subset$ 平面 ABC ，
 $\therefore EF \parallel$ 平面 ABC .
 同理，可得 $EG \parallel$ 平面 ABC .
 又 $\because EF, EG$ 是平面 EFG 内的相交直线，
 $\therefore$ 平面 $EFG \parallel$ 平面 ABC .
- (2) $\because$ 平面 $SAB \perp$ 平面 SBC ，平面 $SAB \cap$ 平面 $SBC = SB$ ， $AF \subset$ 平面 ASB ， $AF \perp SB$ ，
 $\therefore AF \perp$ 平面 SBC .
 $\because BC \subset$ 平面 SBC ，

$$\therefore AF \perp BC.$$

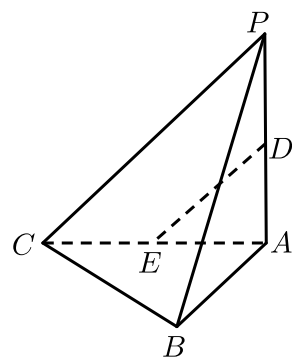
$$\because AB \perp BC, AF \cap AB = A,$$

$$\therefore BC \perp \text{平面} SAB.$$

$$\text{又} \because SA \subset \text{平面} SAB,$$

$$\therefore BC \perp SA.$$

- 2 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $PA \perp AC$, $AB \perp BC$. 设 D, E 分别为 PA, AC 中点.



- (1) 求证: $DE \parallel$ 平面 PBC ;
- (2) 求证: $BC \perp$ 平面 PAB ;
- (3) 试问在线段 AB 上是否存在点 F , 使得过三点 D, E, F 的平面内的任一条直线都与平面 PBC 平行? 若存在, 指出点 F 的位置并证明; 若不存在, 请说明理由.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 证明见解析.
- (3) 点 F 是线段 AB 中点时, 过点 D, E, F 所在平面内

解析

- (1) 因为点 E 是 AC 中点, 点 D 为 PA 的中点,
所以 $DE \parallel PC$.
又因为 $DE \not\subset$ 面 PBC , $PC \subset$ 面 PBC ,
所以 $DE \parallel$ 平面 PBC .
- (2) 因为平面 $PAC \perp$ 面 ABC , 平面 $PAC \cap$ 平面 $ABC = AC$,
又 $PA \subset$ 平面 PAC , $PA \perp AC$,
所以 $PA \perp$ 面 ABC .

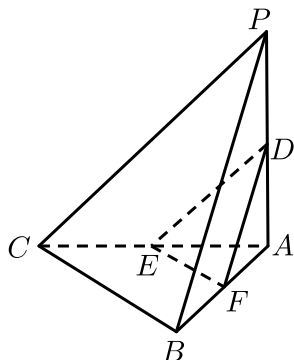
所以 $PA \perp BC$.

又因为 $AB \perp BC$, 且 $PA \cap AB = A$,

所以 $BC \perp$ 面 PAB .

(3) 当点 F 是线段 AB 中点时 , 过点 D, E, F 的平面内的任一条直线都与平面 PBC 平行 .

取 AB 中点 F , 连 EF , 连 DF .



由 (1) 可知 $DE \parallel$ 平面 PBC .

因为点 E 是 AC 中点 , 点 F 为 AB 的中点 ,

所以 $EF \parallel BC$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 PBC , $BC \subset$ 平面 PBC ,

所以 $EF \parallel$ 平面 PBC .

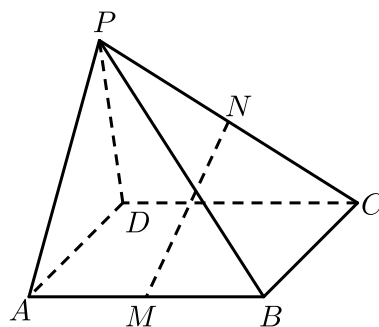
又因为 $DE \cap EF = E$,

所以平面 $DEF \parallel$ 平面 PBC ,

所以平面 DEF 内的任一条直线都与平面 PBC 平行 .

故当点 F 是线段 AB 中点时 , 过点 D, E, F 所在平面内的任一条直线都与平面 PBC 平行 .

3 如图 , 已知点 P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点 , M, N 分别是 AB, PC 的中点 .



(1) 求证 : $MN \parallel$ 平面 PAD .

(2) 在 PB 上确定一个点 Q ，使平面 $MNQ//$ 平面 PAD ，并证明你的结论。

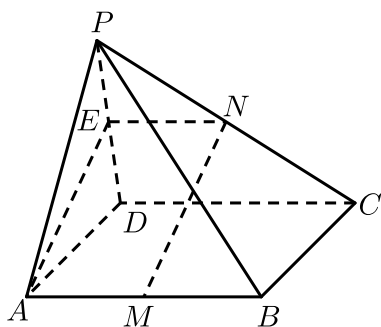
答案

(1) 证明见解析。

(2) 当 Q 是 PB 的中点时，平面 $MNQ//$ 平面 PAD 。证明见解析。

解析

(1) 取 PD 的中点 E ，连接 AE ， NE ，



$\because N$ 是 PC 的中点， E 是 PD 的中点，

$$NE//\frac{1}{2}CD,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， M 是 AB 的中点，

$$AM//\frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore AM//NE,$$

$\therefore$ 四边形 $AMNE$ 是平行四边形，

$\therefore AE//MN$ ，又 $MN \not\subset$ 平面 PAD ， $AE \subset$ 平面 PAD ，

$\therefore MN//$ 平面 PAD 。

(2) 假若平面 $MNQ//$ 平面 PAD ，

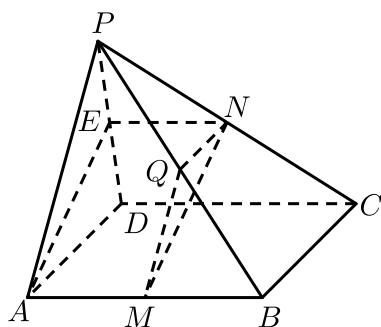
又平面 $PAB \cap$ 平面 $PAD = AD$ ，平面 $MNQ \cap$ 平面 $PAB = MQ$ 。

$$\therefore PA//MQ,$$

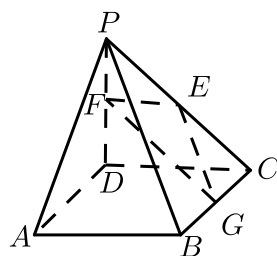
$\because M$ 是 AB 的中点，

$\therefore Q$ 是 PB 的中点。

$\therefore$ 当 Q 是 PB 的中点时，平面 $MNQ//$ 平面 PAD 。



- 4 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $ABCD$ 是正方形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD = AD = 2$ ， E, F, G 分别是 PC, PD, BC 的中点。



- (1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积。
- (2) 求证：平面 $PAB \parallel$ 平面 EFG 。
- (3) 在线段 PB 上确定一点 M ，使 $PC \perp$ 平面 ADM ，并给出证明。

答案

- (1) $\frac{8}{3}$ 。
- (2) 证明见解析。
- (3) M 为线段 PB 的中点，证明见解析。

解析

- (1) $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，
 $\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} PD \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2^2 = \frac{8}{3}$ 。
- (2) $\because E, F$ 分别是 PC, PD 的中点。
 $\therefore EF \parallel CD$ ，
 由正方形 $ABCD$ ，
 $\therefore EF \parallel AB$ ，
 又 $EF \not\subset$ 平面 PAB ， $\therefore EF \parallel$ 平面 PAB ，
 同理可得： $EG \parallel PB$ ，

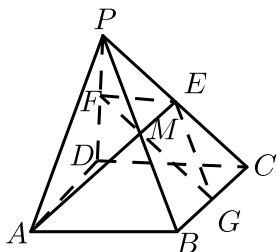
可得 $EG \parallel \text{平面} PAB$,

又 $EF \cap EG = E$,

$\therefore \text{平面} PAB \parallel \text{平面} EFG$.

(3) 当 M 为线段 PB 的中点时, 满足使 $PC \perp \text{平面} ADM$,

下面给出证明: 取 PB 的中点 M , 连接 DE , EM , AM .



$\therefore EM \parallel BC \parallel AD$,

$\therefore$ 四点 A, D, E, M 四点共面, 由 $PD \perp \text{平面} ABCD$,

$\therefore AD \perp PD$,

又 $AD \perp CD$, $PD \cap CD = D$,

$\therefore AD \perp \text{平面} PCD$,

$\therefore AD \perp PC$,

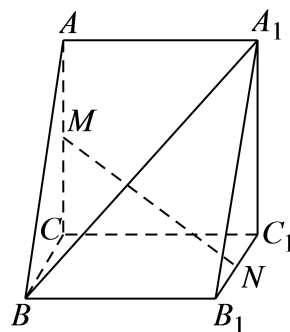
又 $\triangle PDC$ 为等腰三角形, E 为斜边的中点,

$\therefore DE \perp PC$,

又 $AD \cap DC = D$,

$\therefore PC \perp \text{平面} ADEM$, 即 $PC \perp \text{平面} ADM$.

5 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AC = BC = CC_1 = 2$, M, N 分别为 AC, B_1C_1 的中点.



(1) 求线段 MN 的长.

- 第7页 (共30页)

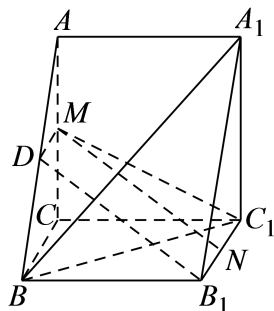
所以四边形 MDB_1N 为平行四边形，所以 $MN \parallel DB_1$ 。

因为 $MN \not\subset$ 平面 ABB_1A_1 ， $DB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 ，

所以 $MN \parallel$ 平面 ABB_1A_1 。

(3) 线段 CC_1 上存在点 Q ，且 Q 为 CC_1 中点时，有 $A_1B \perp$ 平面 MNQ 。

证明如下：连接 BC_1 。



在正方形 BB_1C_1C 中易证 $QN \perp BC_1$ 。

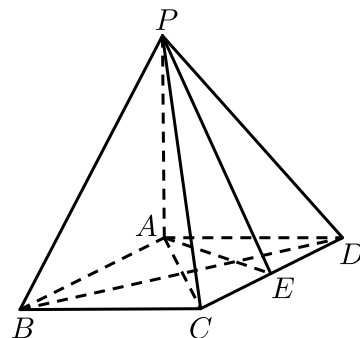
又 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C ，所以 $A_1C_1 \perp QN$ ，从而 $QN \perp$ 平面 A_1BC_1 。

所以 $A_1B \perp QN$ 。

同理可得 $A_1B \perp MQ$ ，所以 $A_1B \perp$ 平面 MNQ 。

故线段 CC_1 上存在点 Q ，使得 $A_1B \perp$ 平面 MNQ 。

6 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形。E为CD的中点。



(1) 求证： $BD \perp$ 平面 PAC 。

(2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$ ，求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PAE 。

(3) 棱 PB 上是否存在点 F ，使得 $CF \parallel$ 平面 PAE ？说明理由。

答案

(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

(3) 存在；证明见解析。

解析

(1) $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore PA \perp BD$ ，

在菱形 $ABCD$ 中， $AC \perp BD$ ，

即 $PA \perp BD$ ， $PA \subset$ 平面 PAC ，

$AC \perp BD$ ， $AC \subset$ 平面 PAC ，

$PA \cap AC = A$ ，

$\therefore BD \perp$ 平面 PAC 。

(2) $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $AE \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore PA \perp AE$ ，

在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

即 $\angle ADC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADC$ 为等边三角形，且 E 为 CD 中点。

$\therefore AE \perp CD$ ，

又 $AB \parallel CD$ ， $AE \perp AB$ ，

即 $AE \perp PA$ ， $PA \subset$ 平面 PAB ，

$AE \perp AB$ ， $AB \subset$ 平面 PAB ，

$PA \cap AB = A$ ，

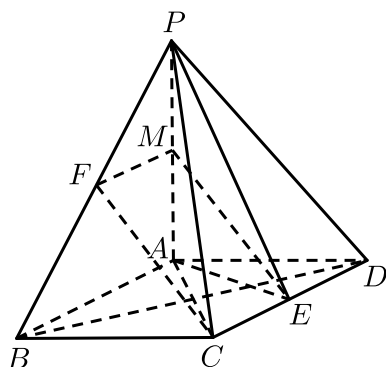
$\therefore AE \perp$ 平面 PAB ，且 $AE \subset$ 平面 PAE ，

$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 PAE 。

(3) 棱 AB 上存在 F 点，且 F 为 PB 的中点，

取 PA 中点为 M ，

连接 MF 、 ME 、 FC ，



$\therefore MF$ 分别 PA 、 PB 中点 .

$\therefore MF // AB$, $MF = \frac{1}{2} AB$,

$\therefore$ 底面 $ABCD$ 为菱形 ,

$\therefore CE // AB$, $CE = \frac{1}{2} AB$,

$\therefore MF // CE$,

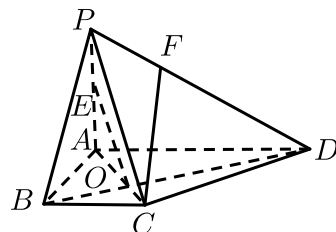
$\therefore$ 四边形 $MFCE$ 为平行四边形 ,

$\therefore FC // EM$,

$\therefore EM \subset$ 平面 PAE , $FC \not\subset$ 平面 PAE ,

$\therefore FC //$ 平面 PAE .

- 7 在四棱锥 $P-ABCD$ 中 , 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp AB$, 点 E 在棱 PA 上 , 且 $PE = \frac{1}{3} PA$, $AD // BC$, $AC \perp CD$, O 是对角线 AC , BD 的交点 , $DO = 2OB$.



- (1) 求证 : $EO //$ 平面 PCD .
- (2) 求证 : $CD \perp$ 平面 PAC .
- (3) 在线段 PD 上是否存在点 F , 使得 $CF \perp AD$, 并说明理由 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) 存在 ; 证明见解析 .

解析

- (1) 因为 $AD // BC$, O 是对角线 AC , BD 的交点 ,
所以 $\angle CBD = \angle ADB$, $\angle BCA = \angle DAC$,
所以 $\triangle AOD \sim \triangle COB$.
因为 $DO = 2OB$, 所以 $AO = 2OC$,
又因为 $PE = \frac{1}{3} PA$, 所以 $AE = 2EP$.

所以在 $\triangle PAC$ 中, $\frac{AE}{EP} = \frac{AO}{OC}$. 又因为 $\angle EAO$ 为公共角,

所以 $\triangle EAO \sim \triangle PAC$. 所以 $\angle AEO = \angle APC$.

所以 $EO \parallel PC$. 且 $PC \subset$ 平面 PCD ,

$EO \not\subset$ 平面 PCD ,

所以 $EO \parallel$ 平面 PCD .

(2) 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$,

且平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $PA \subset$ 平面 PAB ,

又因为 $PA \perp AB$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

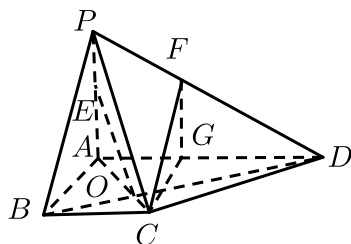
又 $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$.

又因为 $AC \perp CD$, $PA \cap AC = A$, $PA, AC \subset$ 平面 PAC ,

所以 $CD \perp$ 平面 PAC .

(3) 过点 C 作 AD 的垂线 CG , 交 AD 于点 G ,

过点 G 作 PA 的平行线, 交 PD 于点 F .



由(2)知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

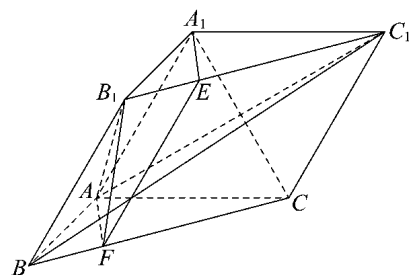
因为 $PA \parallel FG$, 所以 $FG \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $FG \perp AD$, 又 $CG \perp AD$, $FG \cap CG = G$,

所以 $AD \perp$ 平面 CGF , 所以 $AD \perp CF$.

故在线段 PD 上存在点 F , 使得 $CF \perp AD$.

8 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C , $AA_1 = AC$. 过 AA_1 的平面交 B_1C_1 于点 E , 交 BC 于点 F .



- (1) 求证： $A_1C \perp$ 平面 ABC_1 .
- (2) 求证： $A_1A \parallel EF$.
- (3) 记四棱锥 $B_1 - AA_1EF$ 的体积为 V_1 , 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 V . 若 $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{6}$, 求 $\frac{BF}{BC}$ 的值 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\frac{1}{4}$.

解析

- (1) 因为 $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C , 所以 $A_1C \perp AB$.

在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 , 因为 $AA_1 = AC$, 所以四边形 AA_1C_1C 为菱形 ,

所以 $A_1C \perp AC_1$.

所以 $A_1C \perp$ 平面 ABC_1 .

- (2) 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 ,

因为 $A_1A \parallel B_1B$, $A_1A \not\subset$ 平面 BB_1C_1C ,

所以 $A_1A \parallel$ 平面 BB_1C_1C .

因为平面 $AA_1EF \cap$ 平面 $BB_1C_1C = EF$,

所以 $A_1A \parallel EF$.

- (3) 记三棱锥 $B_1 - ABF$ 的体积为 V_2 , 三棱柱 $ABF - A_1B_1E$ 的体积为 V_3 .

因为三棱锥 $B_1 - ABF$ 与三棱柱 $ABF - A_1B_1E$ 同底等高 ,

所以 $\frac{V_2}{V_3} = \frac{1}{3}$,

所以 $\frac{V_1}{V_3} = 1 - \frac{V_2}{V_3} = \frac{2}{3}$.

因为 $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{6}$, 所以 $\frac{V_3}{V} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$.

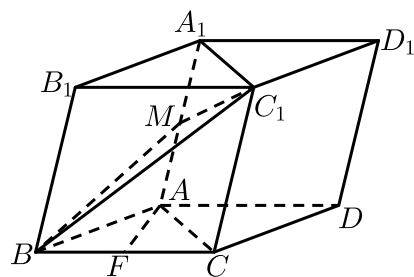
因为三棱柱 $ABF - A_1B_1E$ 与三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 等高 ,

所以 $\triangle ABF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 $\frac{1}{4}$,

所以 $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{4}$.

9

在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 , $AB = AC$, 平面 $BB_1C_1C \perp$ 底面 $ABCD$, 点 M 、 F 分别是线段 AA_1 、 BC 的中点 .



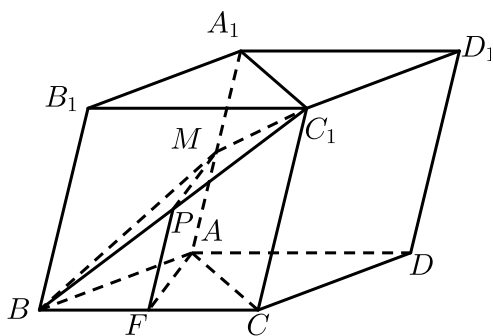
- (1) 求证： $AF \parallel$ 平面 BMC_1 .
- (2) 求证：平面 $BB_1C_1C \perp$ 平面 BMC_1 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .

解析

- (1) 方法一：取 BC_1 中点 P ，连 MP ， PF ，



$\because P, F$ 分别为 BC_1, BC 中点，

$\therefore PF \parallel CC_1, PF = \frac{1}{2}CC_1$ ，

$\because ABCD - A_1B_1C_1D$ 为四棱柱，

$\therefore BB_1 \parallel CC_1, BB_1 = CC_1$ 且 $AA_1 \parallel BB_1, AA_1 = BB_1$ ，

$\therefore AA_1 \parallel CC_1, AA_1 = CC_1$ ，

又 M 为 AA_1 的中点，

$\therefore AM \parallel \frac{1}{2}CC_1, AM = \frac{1}{2}CC_1$ ，

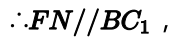
$\therefore PF \parallel AM, PF = AM$ ，

$\therefore$ 四边形 $PFAM$ 为平行四边形，

$\therefore AF \parallel PM$ 又 $AF \not\subset$ 面 $BMC_1, PM \subset$ 面 BMC_1 ，

$\therefore AF \parallel$ 面 BMC_1 .

方法二：取 CC_1 中点 N ，连接 FN, AN ，


$$\therefore FN \parallel \text{面} BMC_1,$$
$$\therefore BB_1 // CC_1, BB_1 = CC_1 \text{ and } AA_1 // BB_1, AA_1 = BB_1,$$
$$\therefore AA_1 // CC_1, AA_1 = CC_1,$$

$\because M, N$ 为 AA_1, CC_1 中点, $MA \parallel C_1N, MA = C_1N,$

$\therefore$ 四边形 MAC_1N 为平行四边形,

$$\therefore AN \parallel MC_1,$$

$\therefore AN \parallel \text{面} BMC_1$ 又 $PN \cap AN = N$, $PA, AN \subset \text{面} BMC_1$,

$\therefore \text{面} AFN // \text{面} BMC_1$,

$$\therefore FN \parallel \text{面} BMC_1 .$$
$$\therefore AF \perp BC,$$
$$\therefore AF \perp \text{面} BB_1C_1C,$$

又 $BB_1 \subset \text{面} BB_1 C_1 C$,

$$\therefore AF \perp BB_1 ,$$

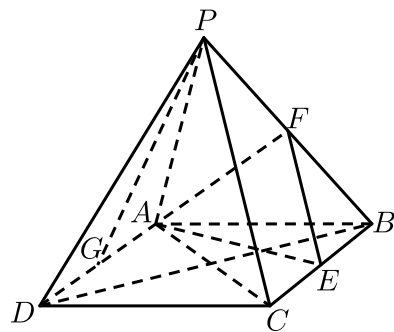
而 $MP \parallel AF$,

$$\therefore MP \perp BC, MP \perp BB_1,$$
$$\text{又 } BC \cap BB_1 = B, BC, BB_1 \subset \text{面 } BB_1C_1C,$$

$\therefore MP \perp \text{面} BB_1C_1C$, 又 $MP \subset \text{面} MBC_1$,

$\therefore \text{面} BB_1C_1C \perp \text{面} MBC_1$.

10 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 E, F, G 分别为线段 BC, PB, AD 的中点.



- (1) 证明 $EF \parallel \text{平面} PAC$.
- (2) 证明 $\text{平面} PCG \parallel \text{平面} AEF$.
- (3) 在线段 BD 上找一点 H , 使得 $FH \parallel \text{平面} PCG$, 并说明理由 .

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 证明见解析.
- (3) 所找的 H 点为 AE 与 BD 的交点 .

解析

- (1) 证明 : $\because E, F$ 分别是 BC, BP 中点 ,
 $\therefore EF \parallel \frac{1}{2} PC$,
 $\because PC \subset \text{平面} PAC, EF \not\subset \text{平面} PAC$,
 $\therefore EF \parallel \text{平面} PAC$.
- (2) 证明 : $\because E, G$ 分别是 BC, AD 中点 ,
 $\therefore AE \parallel CG$,
 $\because AE \not\subset \text{平面} PCG, CG \subset \text{平面} PCG$,
 $\therefore AE \parallel \text{平面} PCG$,
 又 $\because EF \parallel PC$,
 $PC \subset \text{平面} PCG, EF \not\subset \text{平面} PCG$,
 $\therefore EF \parallel \text{平面} PCG$,
 $AE \cap EF = E$ 点 , $AE, EF \subset \text{平面} AEF$,

$\therefore$ 平面 $AEF \parallel$ 平面 PEG .

(3) 设 AE, GC 与 BD 分别交于 M, N 两点 ,

易知 F, N 分别是 BP, BM 中点 ,

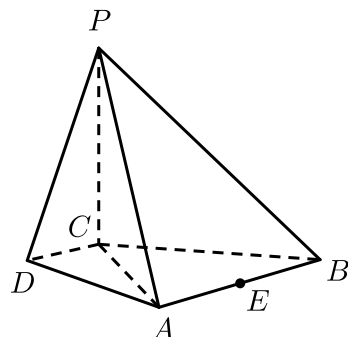
$$\therefore \underline{FN} \parallel \frac{1}{2} PM ,$$

$\because PM \subset$ 平面 $PGC, FN \not\subset$ 平面 PGC ,

$\therefore FN \parallel$ 平面 PGC ,

即 N 点为所找的 H 点 .

11 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC \perp$ 平面 $ABCD, AB \parallel CD, DC \perp AC$.



(1) 求证: $DC \perp$ 平面 PAC .

(2) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAC .

(3) 设点 E 为 AB 中点, 在棱 PB 上是否存在点 F , 使得 $PA \parallel$ 平面 CEF ? 说明理由.

答案

(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

(3) 存在点 F 为 PB 中点, 理由见解析 .

解析

(1) $\because PC \perp$ 平面 $ABCD, CD \subset$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore PC \perp CD ,$$

而 $DC \perp AC, PC, AC \subset$ 平面 $PAC, PC \cap AC = C$,

$\therefore CD \perp$ 平面 PAC .

(2) $\because PC \perp$ 平面 $ABCD, AB \subset$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore PC \perp AB ,$$

又 $\because CD \parallel AB, CD \perp AC$,

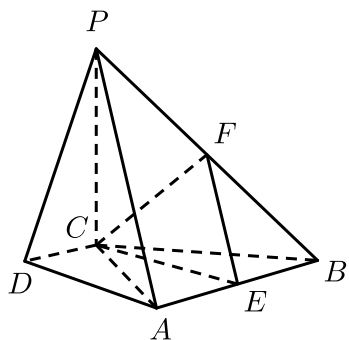
$\therefore AC \perp AB$,

而 $PC, AC \subset \text{平面} PAC$, $PC \cap AC = C$,

$\therefore AB \perp \text{平面} PAC$, 而 $AB \subset \text{平面} PAB$

所以 $\text{平面} PAB \perp \text{平面} PAC$.

(3) 如图：

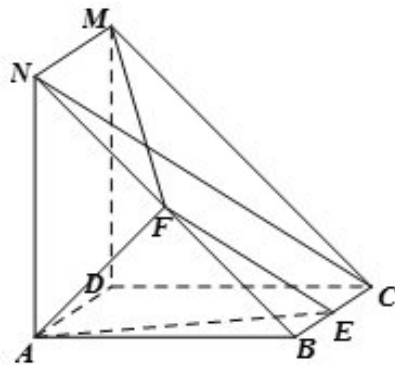


欲使 $PA \parallel \text{平面} CEF$, 只需 $EF \parallel PA$ 即可；

而 E 为 AB 中点, 故 F 为 PB 中点.

所以, 存在点 F 为 PB 中点使得 $PA \parallel \text{平面} CEF$.

- 12 如图, 四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADMN$ 都为正方形, $AN \perp AB$, F 为线段 BN 的中点, E 为线段 BC 上的动点.



- (1) 当 E 为线段 BC 中点时, 求证: $NC \parallel \text{平面} AEF$;
- (2) 求证: $\text{平面} AEF \perp \text{平面} BCMN$;
- (3) 设 $\frac{BE}{BC} = \lambda$, 写出 λ 为何值时 $MF \perp \text{平面} AEF$ (结论不要求证明) .

答案

- (1) 证明见解析;
- (2) 证明见解析;
- (3) $\lambda = \frac{1}{2}$

解析

(1) 证明： F 为线段 NB 的中点， E 为线段 BC 中点

所以 $EF \parallel NC$

又 $NC \not\subset$ 平面 AEF ， $EF \subset$ 平面 AEF

所以 $NC \parallel$ 平面 AEF

(2) 证明：四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADMN$ 都为正方形

所以 $AD \perp NA$ ， $AD \perp AB$

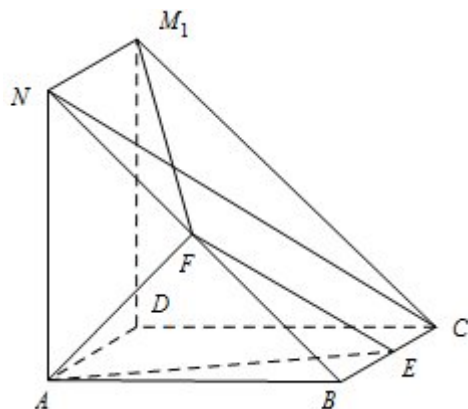
$NA \cap AB = A$ ，所以 $AD \perp$ 平面 NAB

$AF \subset$ 平面 NAB ，故 $AD \perp AF$

$AD \parallel BC$ ，所以 $BC \perp AF$

由题意 $NA = AB$ ， F 为线段 NB 的中点

所以 $AF \perp NB$



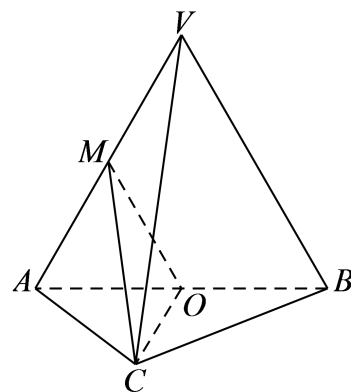
$NB \cap BC = B$ ，所以 $AF \perp$ 平面 $BCMN$

$AF \subset$ 平面 AEF

所以平面 $AEF \perp$ 平面 $BCMN$ 。

(3) $\lambda = \frac{1}{2}$

13 如图，在三棱锥 $V-ABC$ 中，平面 $VAB \perp$ 平面 ABC ， $\triangle VAB$ 为等边三角形， $AC \perp BC$ ，且 $AC = BC = \sqrt{2}$ ， O ， M 分别为 AB ， VA 的中点。



- (1) 求证： $VB \parallel$ 平面 MOC .
- (2) 求证：平面 $MOC \perp$ 平面 VAB .
- (3) 求三棱锥 $V-ABC$ 的体积 .

答案

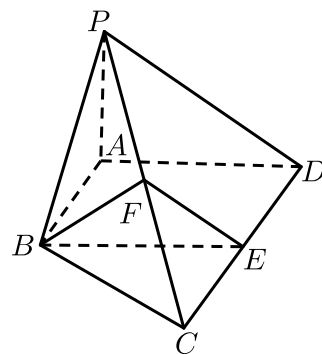
- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $V_{V-ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

解析

- (1) 证明： O 、 M 分别为 AB ， VA 的中点，
 $\therefore OM \parallel VB$ ， $OM = \frac{1}{2}VB$ ，
 又 $\because OM \subset$ 平面 MOC ， $VB \not\subset$ 平面 MOC ，
 $\therefore VB \parallel$ 平面 MOC .
- (2) $\because AC = BC$ ， O 为 AB 的中点，
 $\therefore OC \perp AB$ ，
 又 $\because$ 平面 $VAB \perp$ 平面 ABC ，平面 $VAB \cap$ 平面 $ABC = AB$ ，
 $OC \subset ABC$ ， $OC \perp AB$ ，
 $\therefore OC \perp$ 平面 VAB ，
 又 $\because OC \subset$ 平面 MOC ，
 $\therefore$ 平面 $MOC \perp$ 平面 VAB .
- (3) 连接 VO ， $VO \perp AB$ ，平面 $VAB \perp$ 平面 ABC ，
 平面 $VAB \cap$ 平面 $ABC = AB$ ， $VO \subset VAB$ ， $VO \perp AB$ ，
 $\therefore VO \perp$ 平面 ABC ，
 $\because AB = 2$ ， $\therefore VO = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore V_{V-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \right) \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

- 14 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $CD = 2AB$ ，平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA \perp AD$ ， E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点，求证：



- (1) $PA \perp$ 底面 $ABCD$.
- (2) $BE \parallel$ 平面 PAD .
- (3) 平面 $BEF \perp$ 平面 PCD .

答案

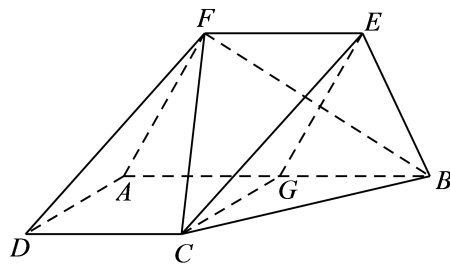
- (1) 见解析 .
- (2) 见解析 .
- (3) 见解析 .

解析

- (1) $\because$ 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$.
 面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$.
 $PA \subset$ 面 PAD 且 $PA \perp AD$.
 $\therefore PA \perp$ 面 $ABCD$.
- (2) $\because AB \parallel CD$, $CD = 2AB$.
 $\therefore \underline{DE \parallel AB}$.
 $\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形 .
 $\therefore BE \parallel AD$.
 又 $\because BE \not\subset$ 面 PAD , $AD \subset$ 面 PAD .
 $\therefore BE \parallel$ 面 PAD .
- (3) $\because AB \perp AD$.
 $\therefore$ 平行四边形 $ABED$ 为矩形 .

$\therefore BE \perp CD, AD \perp CD.$
 $\therefore PA \perp \text{面} ABCD, CD \subset \text{面} ABCD.$
 $\therefore CD \perp PA.$
 又 $\therefore PA \cap AD = A.$
 $\therefore CD \perp \text{面} PAD.$
 $\therefore CD \perp PD.$
 $\therefore EF$ 为 CPD 中位线.
 $\therefore EF \parallel PD.$
 $\therefore CD \perp EF.$
 又 $CD \perp BE, BF \cap EF = E.$
 $\therefore CD \perp \text{面} BEF.$
 $\therefore CD \subset \text{面} PCD.$
 $\therefore \text{面} BEF \perp \text{面} PCD.$

- 15 如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直， $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $AB \perp AD$ ， G 为 AB 的中点， $CD = DA = AF = FE = 2$ ， $AB = 4$ 。



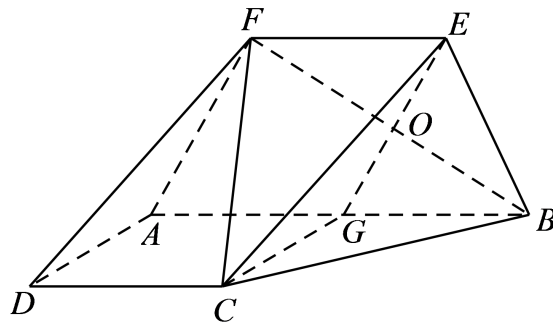
- (1) 求证： $DF \parallel \text{平面} BCE$ 。
- (2) 求证： $\text{平面} BCF \perp \text{平面} GCE$ 。
- (3) 求多面体 $AFEB$ 的体积。

答案

- (1) 证明见解析。
- (2) 证明见解析。
- (3) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 。

解析

- (1) 因为 $CD \parallel EF$, 且 $CD = EF$,
 所以四边形 $CDFE$ 为平行四边形 ,
 所以 $DF \parallel CE$.
 因为 $DF \not\subset$ 平面 BCE ,
 所以 $DF \parallel$ 平面 BCE .
- (2) 连接 FG .
 因为 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$,
 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB$, $AD \perp AB$,
 所以 $AD \perp$ 平面 $ABEF$,
 所以 $BF \perp AD$.
 因为 G 为 AB 的中点 ,
 所以 $AG \parallel CD$, 且 $AG = CD$. $EF \parallel BG$, 且 $EF = BG$,
 所以 四边形 $AGCD$ 和 四边形 $BEFG$ 均为平行四边形 .
 所以 $AD \parallel CG$, 所以 $BF \perp CG$.
 因为 $EF = EB$,
 所以 四边形 $BEFG$ 为菱形 ,
 所以 $BF \perp EG$.
 所以 $BF \perp$ 平面 GCE .
 所以 平面 $BCF \perp$ 平面 GCE .
- (3) 设 $BF \cap GE = O$.



由 (1) 得 $DF \parallel CE$, 所以 $DF \parallel$ 平面 GCE ,
 由 (2) 得 $AD \parallel CG$, 所以 $AD \parallel$ 平面 GCE ,
 所以 平面 $ADF \parallel$ 平面 GCE ,
 所以 几何体 $ADF - GCE$ 是三棱柱 .

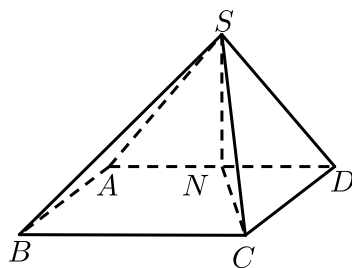
由(2)得 $BF \perp$ 平面 GCE .

所以多面体 $AFEBCE$ 的体积 $V = V_{ADF-GCE} + V_{B-GCE}$

$$= S_{\triangle GCE} \cdot FO + \frac{1}{3} S_{\triangle GCE} \cdot BO$$

$$= \frac{4}{3} S_{\triangle GCE} \cdot FO = \frac{8\sqrt{3}}{3} .$$

- 16 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $AD = 2AB$, $SA = SD$, $SA \perp AB$, N 是棱 AD 的中点 .



- (1) 求证: $AB \parallel$ 平面 SCD ;
- (2) 求证: $SN \perp$ 平面 $ABCD$;
- (3) 在棱 SC 上是否存在一点 P , 使得平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$? 若存在, 求出 $\frac{SP}{PC}$ 的值; 若不存在, 说明理由 .

答案

- (1) 证明见解析
- (2) 证明见解析
- (3) 证明见解析

解析

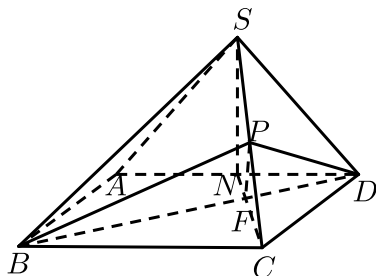
- (1) 证明: 因为底面 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AB \parallel CD$,
又因为 $AB \not\subset$ 平面 SCD , $CD \subset$ 平面 SCD , 所以 $AB \parallel$ 平面 SCD .
- (2) 证明: 因为 $AB \perp SA$, $AB \perp AD$, $SA \cap AD = A$,
所以 $AB \perp$ 平面 SAD ,
又因为 $SN \subset$ 平面 SAD ,
所以 $AB \perp SN$.
因为 $SA = SD$, 且 N 为 AD 中点,

所以 $SN \perp AD$.

又因为 $AB \cap AD = A$,

所以 $SN \perp$ 平面 $ABCD$.

- (3) 如图, 连接 BD 交 NC 于点 F , 在平面 SNC 中过 F 作 $FP \parallel SN$ 交 SC 于点 P , 连接 PB , PD .



因为 $SN \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $FP \perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $FP \subset$ 平面 PBD ,

所以平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$.

在矩形 $ABCD$ 中, 因为 $ND \parallel BC$,

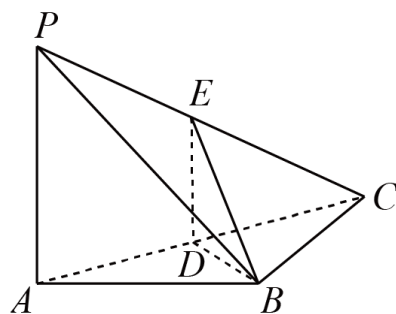
$$\text{所以 } \frac{NF}{FC} = \frac{ND}{BC} = \frac{1}{2} .$$

在 $\triangle SNC$ 中, 因为 $FP \parallel SN$,

$$\text{所以 } \frac{NF}{FC} = \frac{SP}{PC} = \frac{1}{2} .$$

则在棱 SC 上存在点 P , 使得平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, 此时 $\frac{SP}{PC} = \frac{1}{2}$.

- 17 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp AB$, $PA \perp BC$, $AB \perp BC$, $PA = AB = BC = 2$, D 为线段 AC 的中点, E 为线段 PC 上一点.



- (1) 求证: $PA \perp BD$.
- (2) 当 $PA \parallel$ 面 BDE 时, 求三棱锥 $E-BCD$ 的体积 .

答案

(1) 证明见解析 .

(2) $\frac{1}{3}$.

解析

(1) $\because PA \perp AB, PA \perp BC, AB \subset \text{平面} ABC,$

$BC \subset \text{平面} ABC, AB \cap BC = B,$

$\therefore PA \perp \text{平面} ABC,$

又 $BC \subset \text{平面} ABC,$

$\therefore PA \perp BD.$

(2) $\because PA \parallel \text{平面} BDE, PA \subset \text{平面} PAC,$

且 $\text{平面} PAC \cap \text{平面} BDE = DE,$

$\therefore PA \parallel DE,$ 又 D 是 AC 的中点,

$\therefore E$ 是 PC 的中点, 且 $DE = \frac{1}{2}PA = 1,$

由 $DA \perp \text{平面} ABC,$ 知 $DE \perp \text{平面} ABC,$

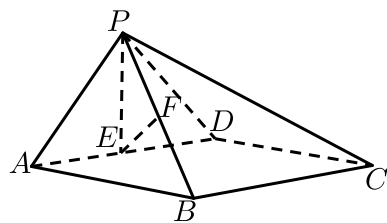
$\therefore S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 1,$

则三棱锥 $E-BCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BDC} \cdot DE = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}.$

18

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD, PA \perp PD,$

$PA = PD, E, F$ 分别为 AD, PB 的中点.



(1) 求证: $PE \perp BC.$

(2) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 $PCD.$

(3) 求证: $EF \parallel \text{平面} PCD.$

答案

(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

(3) 证明见解析 .

解析

(1) 在 $\triangle PAD$ 中, $PA = PD$, 点 E 为 AD 的中点,

$$\therefore PE \perp AD,$$

$$\therefore \text{平面} PAD \perp \text{平面} ABCD,$$

$$\text{平面} PAD \cap \text{平面} ABCD = AD, PE \subset \text{平面} PAD,$$

$$\therefore PE \perp \text{平面} ABCD,$$

$$\therefore BC \subset \text{平面} ABCD,$$

$$\therefore PE \perp BC.$$

(2) 由(1)知 $PE \perp \text{平面} ABCD$,

$$\therefore CD \subset \text{平面} ABCD,$$

$$\therefore PE \perp CD,$$

$$\text{又} CD \perp AD, PE, AD \subset \text{平面} PAD, PE \cap AD = E,$$

$$\therefore CD \perp \text{平面} PAD,$$

$$\therefore PA \subset \text{平面} PAD, \therefore CD \perp PA,$$

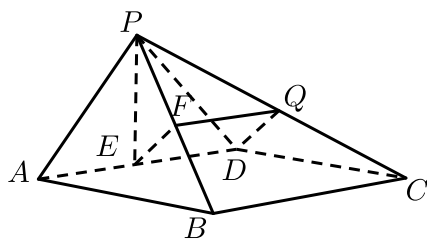
$$\therefore PA \perp PD, CD, PD \subset \text{平面} PCD, CD \cap PD = D,$$

$$\therefore PA \perp \text{平面} PCD.$$

$$\therefore PA \subset \text{平面} PAB,$$

$$\therefore \text{平面} PAB \perp \text{平面} PCD.$$

(3) 取 PC 中点 Q , 连接 FQ, DQ ,



在 $\triangle PBC$ 中, F, Q 分别为 PB, PC 中点,

$$\therefore FQ \parallel BC, \text{ 且 } FQ = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore ED \parallel BC, \text{ 且 } ED = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore FQ \parallel ED, \text{ 且 } ED = FQ,$$

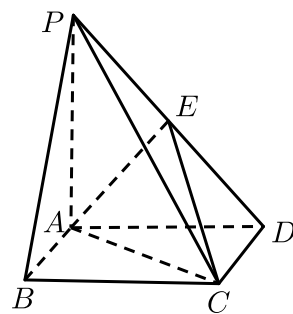
$$\therefore \text{四边形} EFQD \text{ 为平行四边形},$$

$$\therefore EF \parallel DQ,$$

$$\therefore EF \not\subset \text{平面} PCD, DQ \subset \text{平面} PCD,$$

$$\therefore EF \parallel \text{平面} PCD.$$

- 19 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PA = AD = 2$ ，点 E 为线段 PD 的中点。



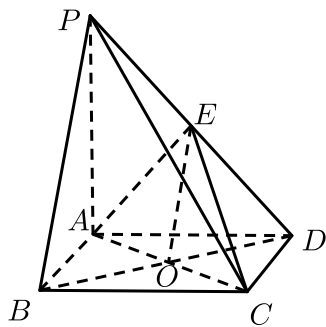
- (1) 求证： $PB \parallel$ 平面 AEC 。
- (2) 求证： $AE \perp$ 平面 PCD 。
- (3) 求三棱锥 $A-PCE$ 的体积。

答案

- (1) 证明见解析。
- (2) 证明见解析。
- (3) $\frac{2}{3}$ 。

解析

- (1) 证明：连结 BD ，交 AC 于点 O ，连结 OE ，
因为 O 是正方形 $ABCD$ 对角线交点，所以 O 为 BD 中点，
由已知 E 为线段 PD 的中点，
所以 $PB \parallel OE$ ，
又 $OE \subset$ 平面 ACE ， $PB \not\subset$ 平面 ACE ，
所以 $PB \parallel$ 平面 ACE 。
- (2) 证明：因为 $PA = AD$ ， E 为线段 PD 的中点，



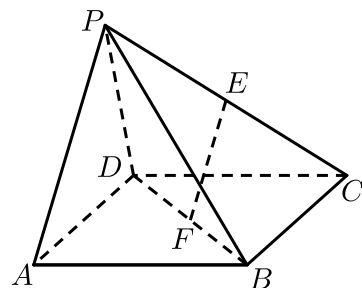
所以 $AE \perp PD$ ，

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,
 所以 $PA \perp CD$,
 在正方形 $ABCD$ 中 , $CD \perp AD$,
 又 $PA \cap AD = A$,
 所以 $CD \perp$ 平面 PAD ,
 又 $AE \subset$ 平面 PAD ,
 所以 $CD \perp AE$,
 又 $PD \cap CD = D$,
 所以 $AE \perp$ 平面 PCD .

(3) 因为 $AE \perp$ 平面 PCD , 所以三棱锥 $A - PCE$ 的体积 ,

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle PCE} \cdot AE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} PE \cdot CD \cdot AE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \frac{2}{3} .$$

20 如图 , 在四棱锥 $P - ABCD$ 中 , 底面 $ABCD$ 是正方形 , E, F 分别为 PC, BD 的中点 , 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD = \sqrt{2}$.



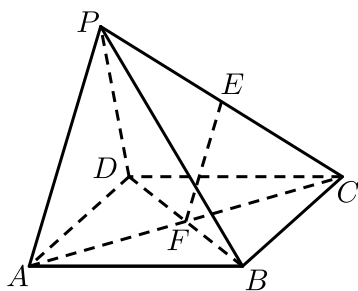
- (1) 求证 : $EF \parallel$ 平面 PAD .
- (2) 求证 : $PA \perp$ 平面 PCD .
- (3) 求 V_{F-PBC} .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\frac{1}{3}$.

解析

- (1) 连结 AC ,



则 F 是 AC 的中点, E 为 PC 的中点,

故在 $\triangle CPA$ 中, $EF \parallel PA$,

$\because PA \subset \text{平面} PAD$, $EF \not\subset \text{平面} PAD$,

$\therefore EF \parallel \text{平面} AD$.

(2) 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $AD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $CD \perp AD$,

所以 $CD \perp \text{平面} PAD$,

$\because PA \subset \text{平面} PAD$,

$\therefore CD \perp PA$,

又 $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$,

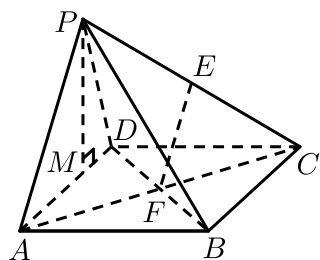
所以 $\triangle PAD$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle APD = \frac{\pi}{2}$,

即 $PA \perp PD$,

又 $CD \cap PD = D$,

$\therefore PA \perp \text{平面} PCD$.

(3) 过 P 作 AD 的垂线交 AD 于点 M ,



$\because \text{面} PAD \perp \text{面} ABCD$, 面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$,

$PM \perp AD$, $PM \subset \text{面} PAD$,

$\therefore PM \perp \text{面} ABCD$,

$\because PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD = \sqrt{2}$,

$\therefore AD = 2$,

又 $\frac{1}{2} PA \cdot PD = \frac{1}{2} AD \cdot PM$,

$\therefore PM = 1$,

$$\text{又 } S_{\triangle FBC} = \frac{1}{4} S_{\text{正}ABCD} = \frac{1}{4} \times 2 \times 2 = 1 ,$$

$$\therefore V_{F-PBC} = V_{P-FBC}$$

$$= \frac{1}{3} S_{\text{底}FBC} \cdot PM$$

$$= \frac{1}{3} \times 1 \times 1$$

$$= \frac{1}{3} .$$