数列较难

1 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+1}+2a_{n-1}=3a_n\ (n\geqslant 2)$．

(1) 求证：数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列．

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(3) 设$b_n=a_n-1$，$S_n=\dfrac{a_1}{b_1b_2}+\dfrac{a_2}{b_2b_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_nb_{n+1}}$，$\exists n\in\mathbf{N}^*$，使$S_n\geqslant 4m^2-3m$成立，求实数$m$的取值范围．

答案 (1) 证明见解析．

(2) $a_n=2^n$．

(3) $-\dfrac{1}{4}<m<1$．

解析 (1) $\because a_{n+1}+2a_{n-1}=3a_n$，

$\therefore\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\dfrac{3a_n-2a_{n-1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=2$，

$\therefore$数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列．

(2) $\because a_1=2$，$a_2=4$，$\therefore a_2-a_1=2$，

$\therefore\{a_{n+1}-a_n\}$是以$a_2-a_1=2$为首项，公比为2的等比数列，

$\therefore a_{n+1}-a_n=2^n$，

当$n\geqslant 2$时，

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=2+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n$，

$\because n=1$适合上式，$\therefore a_n=2^n$．

(3) $\because b_1=a_n-1=2^n-1$，

$\therefore\dfrac{a_n}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)\left(2^{n+1}-1\right)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

$\therefore S_n=\left(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

$\because S_{n+1}-S_n=1-\dfrac{1}{2^{n+2}-1}-1+\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

$=\dfrac{1}{2^{n+1}-1}-\dfrac{1}{2^{n+2}-1}=\dfrac{2^{n+1}}{\left(2^{n+2}-1\right)\left(2^{n+1}-1\right)}>0$，

又$\because S_n<1$在$n\in\mathbf{N}^*$上恒成立，

所以$1>4m^2-3m$，解得$-\dfrac{1}{4}<m<1$．

2 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$\sqrt{a_n}$是$\sqrt{a_{n+1}}$和-1的等差中项．

(1) 证明：数列$\{\sqrt{a_n}+1\}$是等比数列．

(2) 证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\leqslant\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$．

答案 (1) 证明见解析．

(2) 证明见解析．

解析 (1) 由已知可得$\sqrt{a_{n+1}}-1=2\sqrt{a_n}$，

$\therefore\sqrt{a_{n+1}}+1=2\left(\sqrt{a_n}+1\right)$，

又$\sqrt{a_1}+1\neq0$，

$\therefore$数列$\{\sqrt{a_n}+1\}$是等比数列．

(2) 由（1）可得$a_n=(2^n-1)^2$，

则$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{(2^n-1)^2}\leqslant\dfrac{1}{4^{n-1}}$，

$\therefore\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\leqslant\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$．

3 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$(2n+1)^2a_n=(2n-1)^2a_{n+1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，正项数列$\{c_n\}$满足：对每个$n\in\mathbf{N}^*$，$c_{2n-1}=a_n$，且$c_{2n-1}$，$c_{2n}$，$c_{2n+1}$成等比数列．

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{c_n\}$的通项公式；

(2) 当$n\geqslant2$时，证明：

$\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}+\dfrac{1}{c_3}+\cdots+\dfrac{1}{c_n}<\dfrac{7}{4}$．

答案 (1) $a_n=(2n-1)^2$，$c_n=\begin{cases}n^2 & n\text{是奇数}\\ n^2-1 & n\text{是偶数}\end{cases}$．

(2) 证明见解析．

解析 (1) 方法一：由已知可得$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(2n+1)^2}{(2n-1)^2}$

$\therefore n \geqslant 2$时，

$\therefore a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$

$= \frac{(2n-1)^2}{(2n-3)^2} \cdot \frac{(2n-3)^2}{(2n-5)^2} \cdots \cdots \frac{3^2}{1^2} \cdot 1^2 = (2n-1)^2$ ，

又$\because a_1 = (2 \times 1 - 1)^2$ ，

$\therefore a_n = (2n-1)^2$.

方法二：$\frac{a_{n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{a_n}{(2n-1)^2}$，即$\frac{a_{n+1}}{[2(n+1)-1]^2} = \frac{a_n}{(2n-1)^2}$ ，

$\therefore \frac{a_n}{(2n-1)^2}$为常数列，

$\therefore \frac{a_n}{(2n-1)^2} = \frac{a_1}{(2 \times 1 - 1)^2}$ ，

又$\because a_1 = (2 \times 1 - 1)^2$ ，

$\therefore a_n = (2n-1)^2$ ，

又$\because c_{2n-1} = a_n = (2n-1)^2$ ，

$\therefore c_n = n^2$ （n为奇数），

又$\because c_{2n-1}$ ，c_{2n} ，c_{2n+1}，是等比数列，

$\therefore c^2{}_{2n} = c_{2n-1} \cdot c_{2n+1} = (2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2$ ，

$\therefore c_{2n} = (2n-1) \cdot (2n+1)$ ，

$\therefore c_n = (n-1) \cdot (n+1) = n^2 - 1$（$n$是偶数）

综上可得$a_n = (2n-1)^2$ ，$c_n = \begin{cases} n^2 & n\text{是奇数} \\ n^2 - 1 & n\text{是偶数} \end{cases}$.

(2) 先证$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{c_n} < \frac{7}{4}$

证法一：直接放缩、裂项相消求和

$n = 2$时，$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} < \frac{7}{4}$，显然成立，

$\because n \geqslant 3$时，$c_n \geqslant n^2 - 1$ ，

$\therefore n \geqslant 3$时，$\frac{1}{c_n} \leqslant \frac{1}{n^2 - 1}$ ，

$\therefore \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{c_n}$

$\leqslant 1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)^2 - 1} + \frac{1}{n^2 - 1}$

$= 1 + \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right)\right.$

$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{7}{4}$;

证法二：分奇偶讨论

$n=2$时，$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}<\frac{7}{4}$，显然成立，

$\because n\geqslant 3$时，

①n为偶数时，

$$T_n=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots+\frac{1}{c_n}$$
$$=\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}\right]$$
$$+\left[\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2-1}\right]$$
$$\leqslant\left[1+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2-1}\right]$$
$$+\left[\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2k)^2-1}\right]$$
$$=\left[1+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{(2k-2)\times2k}\right]$$
$$+\left[\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right]$$
$$=1+\frac{1}{2}\left[\frac{4-2}{2\times4}+\frac{6-4}{4\times6}+\cdots+\frac{2k-(2k-2)}{(2k-2)\times2k}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{3-1}{1\times3}+\frac{5-3}{3\times5}+\frac{7-5}{5\times7}+\cdots+\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}\right]$$
$$=1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{(2k-2)}-\frac{1}{2k}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k+1)}\right]$$
$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}\ ,$$

②n奇数时，$T_n<T_{n+1}<\frac{7}{4}$；

再证$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{c_n}\geqslant\frac{5}{3}-\frac{1}{n+1}$

证法一（数学归纳法）

①$n=2$时，左边$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，右$=\frac{4}{3}$，成立；

②假当$n=k$时，命题成立，即$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{c_k}\geqslant\frac{5}{3}-\frac{1}{k+1}$，

则当$n=k+1$时，$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{c_k}+\frac{1}{c_{k+1}}\geqslant\frac{5}{3}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{c_{k+1}}$，

因为不论k为奇数、偶数，都满足$\frac{1}{c_{k+1}}\geqslant\frac{1}{(k+1)^2}$，

所以当$n=k+1$时，$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{c_k}+\frac{1}{c_{k+1}}\geqslant\frac{5}{3}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}$，

只需$\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k+1}>-\frac{1}{k+2}$即可，

只需$\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$，

只需$\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{1}{(k+1)(k+2)}$；

只需$(k+1)(k+2)>(k+1)^2$；

只需$k+2>k+1$；

显然成立，故当$n=k+1$时也成立，

综上所述，不等式在$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant 2$时均成立．

证法二（分析法证明）

令$S_n=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{c_n}$，$T_n=\frac{5}{3}-\frac{1}{n+1}$为数列$\{d_n\}$的前$n$项和，

只需要证$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\geqslant d_1+d_2$，且$\frac{1}{c_n}\geqslant d_n$（$n\geqslant 3$时），

①$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=\frac{4}{3}$，$d_1+d_2=T_2=\frac{4}{3}$，显然成立，

②$n\geqslant 3$时，不论n为奇数偶数都有$\frac{1}{c_n}\geqslant\frac{1}{n^2}$，

$d_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$，则$\frac{1}{c_n}>d_n$也成立，

综上所述，不等式在$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant 2$时均成立．

证法三（放缩法证明）

①$n=2$时，左边$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，右边$=\frac{4}{3}$，成立；

②$n\geqslant 3$时，

$$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{c_k}\geqslant 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$
$$\geqslant 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{5}{3}-\frac{1}{n+1}<\frac{5}{3}.$$

证法四（分奇偶讨论证明）

$n=2$，3，4，5，6时均成立．（证明略）

当$n\geqslant 7$时，

①n为偶数时，

$$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots+\frac{1}{c_n}$$
$$\geqslant\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}\right)$$
$$>1+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left[\frac{3-1}{1\times 3}+\frac{5-3}{3\times 5}+\frac{7-5}{5\times 7}+\cdots+\frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)(n+1)}\right]$$
$$>1+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{5}{3}-\frac{1}{2(n+1)}>\frac{5}{3}-\frac{1}{(n+1)};$$

② n为奇数时，同理

$$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots+\frac{1}{c_n}\geqslant\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\right]$$
$$+\left[\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2-1}\right]$$
$$>1+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{5}{3}-\frac{1}{2n}\geqslant\frac{5}{3}-\frac{1}{(n+1)}\ .$$

4 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+(-1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$．

(1) 若$b_n=a_{2n-1}-\frac{1}{3}$，求证：数列$\{b_n\}$是等比数列并求其通项公式．

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(3) 求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<3$．

答案 (1) $b_n=\frac{2}{3}\times4^{n-1}$．

(2) $a_n=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^n-1),(n=2k)\\ \frac{1}{3}(2^n+1),(n=2k-1)\end{cases}$．

(3) 证明见解析．

解析 (1) $a_{2n+1}=2a_{2n}+(-1)^{2n}=2[2a_{2n-1}+(-1)^{2n-1}]+1=4a_{2n-1}-1$，

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}-\frac{1}{3}}{a_{2n-1}-\frac{1}{3}}=\frac{4a_{2n-1}-\frac{4}{3}}{a_{2n-1}-\frac{1}{3}}=4$，

又$b_1=a_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

所以$\{b_n\}$是首项为$\frac{2}{3}$，公比为4的等比数列，且$b_n=\frac{2}{3}\times4^{n-1}$．

(2) 由（1）可知$a_{2n-1}=b_n+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times4^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(2^{2n-1}+1)$，

$a_{2n}=2a_{2n-1}+(-1)^{2n-1}=\frac{2}{3}(2^{2n-1}+1)-1=\frac{1}{3}(2^{2n}-1)$．

所以$a_n=\frac{1}{3}(2^n+(-1)^{n+1})$，

或$a_n=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^n-1),(n=2k)\\ \frac{1}{3}(2^n+1),(n=2k-1)\end{cases}$．

(3) $\therefore a_{2n}=\frac{1}{3}\cdot2^{2n}-\frac{1}{3}$，$a_{2n-1}=\frac{2}{3}\cdot2^{2n-1}+\frac{1}{3}$．

$$\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n}}=\frac{3}{2^{2n-1}+1}+\frac{3}{2^{2n}-1}$$
$$=\frac{3\times(2^{2n}+2^{2n-1})}{2^{2n-1}\cdot2^{2n}+2^{2n}-2^{2n-1}-1}$$
$$=\frac{3\times(2^{2n}+2^{2n-1})}{2^{2n-1}\cdot2^{2n}+2^{2n-1}-1}\leqslant\frac{3\times(2^{2n}+2^{2n-1})}{2^{2n-1}\cdot2^{2n}}$$
$$=3\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{2^{2n}}\right)\ .$$

当$n=2k$时，$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2k-1}}+\frac{1}{a_{2k}}\right)$

$\leqslant 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2k}}\right)=3\times\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$=3-\frac{3}{2^{2k}}<3$．

当$n=2k-1$时，$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2k-3}}+\frac{1}{a_{2k-2}}\right)+\frac{1}{a_{2k}-1}$

$<\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2k-1}}+\frac{1}{a_{2k}}\right)<3$．

$\therefore\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<3$．

5 已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足$b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1, b_n=\frac{3+(-1)^{n-1}}{2}, n\in\mathbf{N}^*$，且$a_1=2$．

(1) 求a_2, a_3的值；

(2) 设$c_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}, n\in\mathbf{N}^*$，证明$\{c_n\}$是等比数列；

(3) 设S_n为$\{a_n\}$的前n项和，证明$\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_2}{a_2}+\cdots+\frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}+\frac{S_{2n}}{a_{2n}}\leqslant n-\frac{1}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$．

答案

(1) $a_2=-\frac{3}{2}$；$a_3=8$．

(2) 证明见解析．

(3) 证明见解析．

解析

(1) 由$b_n=\frac{3+(-1)^{n-1}}{2}, n\in\mathbf{N}^*$,

可得$b_n=\begin{cases}2, n=2k-1, k\in\mathbf{N}^*\\1, n=2k, k\in\mathbf{N}^*\end{cases}$

又$b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1$，

当$n=1$时，$a_1+2a_2=-1$，由$a_1=2$，可得$a_2=-\frac{3}{2}$；

当$n=2$时，$2a_2+a_3=5$，可得$a_3=8$．

(2) 对任意$n\in\mathbf{N}^*$

$a_{2n-1}+2a_{2n}=-2^{2n-1}+1$①

$2a_{2n}+a_{2n+1}=2^{2n}+1$ ②

②−①，得$a_{2n+1}-a_{2n-1}=3\times2^{2n-1}$，

即$c_n=3\times2^{2n-1}$，于是$\frac{c_{n+1}}{c_n}=4$．

所以$\{c_n\}$是等比数列．

(3) $a_1=2$，由(2)知，当$k\in\mathbf{N}^*$且$k\geqslant2$时，

$a_{2k-1}=a_1+(a_3-a_1)+(a_5-a_3)+(a_7-a_5)+\cdots+(a_{2k-1}-a_{2k-3})$

$= 2 + 3(2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2k-3}) = 2 + 3 \times \dfrac{2(1-4^{k-1})}{1-4} = 2^{2k-1}$

故对任意$k \in \mathbf{N}^*, a_{2k-1} = 2^{2k-1}$.

由①得$2^{\,2k-1} + 2a_{2k} = -2^{2k-1} + 1$，所以$a_{2k} = \dfrac{1}{2} - 2^{2k-1}, k \in \mathbf{N}^*$

因此，$S_{2k} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2k-1} + a_{2k}) = \dfrac{k}{2}$.

于是，$S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k} = \dfrac{k-1}{2} + 2^{2k-1}$.

故$\dfrac{S_{2k-1}}{a_{2k-1}} + \dfrac{S_{2k}}{a_{2k}} = \dfrac{\frac{k-1}{2} + 2^{2k-1}}{2^{2k-1}} + \dfrac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2} - 2^{2k-1}} = \dfrac{k-1+2^{2k}}{2^{2k}} - \dfrac{k}{2^{2k}-1}$

$= 1 - \dfrac{1}{4^k} - \dfrac{k}{4^k(4^k-1)}$.

对于$n = 1$，不等式显然成立．

所以，对任意$n \in \mathbf{N}^*$，

$\dfrac{S_1}{a_1} + \dfrac{S_2}{a_2} + \cdots + \dfrac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \dfrac{S_{2n}}{a_{2n}}$

$= (\dfrac{S_1}{a_1} + \dfrac{S_2}{a_2}) + (\dfrac{S_3}{a_3} + \dfrac{S_4}{a_4}) + \cdots + (\dfrac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \dfrac{S_{2n}}{a_{2n}})$

$= (1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12}) + (1 - \dfrac{1}{4^2} - \dfrac{2}{4^2-(4^2-1)}) + \cdots + (1 - \dfrac{1}{4^n} - \dfrac{n}{(4^n-1)})$

$= n - (\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}) - (\dfrac{1}{4^2} + \dfrac{2}{4^2(4^2-1)}) - \cdots - (\dfrac{1}{4^n} + \dfrac{n}{4^n(4^n-1)})$

$\leqslant n - (\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}) = n - \dfrac{1}{3}$.

6 已知各项都是正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_n = a_n^2 + \dfrac{1}{2}a_n$，$n \in \mathbf{N}^*$ ．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设数列$\{b_n\}$满足：$b_1 = 1$，$b_n - b_{n-1} = 2a_n (n \geqslant 2)$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$ ．

(3) 若$T_n \leqslant \lambda(n+4)$对任意$n \in \mathbf{N}^*$恒成立，求$\lambda$的取值范围．

答案 (1) $a_n = \dfrac{n}{2}$.

(2) $T_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

(3) $\lambda \geqslant \dfrac{2}{9}$.

解析 (1) $\because S_n = a_n^2 + \dfrac{1}{2}a_n$，

$\therefore S_{n+1} = a_{n+1}^2 + \dfrac{1}{2}a_{n+1}$，

两式相减得：$a_{n+1} = a_{n+1}^2 - a_n^2 + \dfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$，

$\therefore (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - \dfrac{1}{2}) = 0$，

$\because$数列$\{a_n\}$的各项都是正数，

$\therefore a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}$，

又$\because a_1=a_1^2+\frac{1}{2}a_1$，

$\therefore a_1=\frac{1}{2}$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项、$\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

$\therefore a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$．

(2) $\because a_n=\frac{n}{2}$，

$\therefore b_n-b_{n-1}=2a_n=2\cdot\frac{n}{2}=n$，

$\therefore b_2-b_1=2$，

$b_3-b_2=3$，

$\cdots$

$b_n-b_{n-1}=n$，

累加得：$b_n-b_1=\frac{(n+2)(n-1)}{2}$，

又$\because b_1=1$，

$\therefore b_n=b_1+\frac{(n+2)(n-1)}{2}=1+\frac{(n+2)(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore \frac{1}{b_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore T_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$．

(3) $\because T_n=\frac{2n}{n+1}$，

$\therefore T_n\leqslant\lambda(n+4)$，

$\therefore \lambda\geqslant\frac{T_n}{n+4}=\frac{\frac{2n}{n+1}}{n+4}=\frac{2}{n+\frac{4}{n}+5}$，

$\because n+\frac{4}{n}\geqslant2\sqrt{n\cdot\frac{4}{n}}=4$当且仅当$n=2$时取等号，

$\therefore$当$n=2$时$\frac{2}{n+\frac{4}{n}+5}$有最大值$\frac{2}{9}$，

$\therefore \lambda\geqslant\frac{2}{9}$．

7 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，数列$\{b_n\}$为等差数列，$b_1=-1$，$b_n>0(n\geqslant2)$，$b_2S_n+a_n=2$且$3a_2=2a_3+a_1$．

(1) 求$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\frac{1}{a_n}$，$T_n=\frac{b_1}{c_1+1}+\frac{b_2}{c_2+1}+\cdots+\frac{b_n}{c_n+1}$，证明：$T_n<\frac{5}{2}$．

答案 (1) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}n\in\mathbf{N}*$，$b_n=2n-3$．

(2) 证明见解析．

解析 (1) 设b_n的公差为d，$d>1$，$b_2=-1+d$，$b_n=-1+d(n-1)$，

当$n=1$时，$a_1=\frac{2}{b_2+1}=\frac{2}{d}$，

当$n\geqslant 2$时，$b_2S_n+a_n=2$，①

$b_2S_{n-1}+a_{n-1}=2$，②

由①−②得到$a_n=\frac{1}{d}a_{n-1}$，$a_1=\frac{2}{d}$，$a_2=\frac{2}{d^2}$，$a_3=\frac{2}{d^3}$，

由已知$\frac{6}{d^2}=\frac{4}{d^3}+\frac{2}{d}$，解为$d=2$，$d=1$（舍）．

$\{b_n\}$，$\{a_n\}$的通项公式分别为$b_n=2n-3$，$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}n\in\mathbf{N}*$．

(2) $c_n=2^{n-1}$，$T_n=\frac{-1}{1+1}+\frac{1}{2+1}+\frac{3}{2^2+1}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}+1}$，

当$n\geqslant 2$时，$\frac{2n-3}{2^{n-1}+1}<\frac{2n-3}{2^{n-1}}$，$T_n<-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}$，

设$S_{n-2}=\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}$，①

$\frac{1}{2}S_{n-2}=\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}$，②

由①−②得到$\frac{1}{2}S_{n-2}=\frac{3}{4}+2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-3}{2^n}$，

$\therefore\frac{1}{2}S_{n-2}=\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{8}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-3}{2^n}$，

整理为$S_{n-2}=\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}$，

$\therefore T_n<S_{n-2}=\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}<\frac{5}{2}$．

8 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+2, n\text{为奇数}\\ 2a_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，且$n\in\mathbf{N}^*$，$a_1=1$，$a_2=2$．

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设$b_n=a_na_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和S_{2n}．

(3) 设$c_n=a_{2n-1}a_{2n}+(-1)^n$，证明：$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots+\frac{1}{c_n}<\frac{5}{4}$．

答案 (1) $a_n=\begin{cases}n, n\text{为奇数}\\ 2^{\frac{n}{2}}, n\text{为偶数}\end{cases}$．

(2) $S_{2n}=(n-1)\cdot 2^{n+3}+8$．

(3) 证明见解析．

解析　(1) 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+2,n为奇数\\2a_n,n为偶数\end{cases}$，$a_1=1$，$a_2=2$．

$\therefore$当n为奇数时，$a_{n+2}-a_n=2$，此时数列$\{a_{2k-1}\}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$成等差数列，公差为2，首项为1，$a_n=a_{2k-1}=1+2(k-1)=2k-1=n$．

当n为偶数时，$a_{n+2}=2a_n$，此时数列$\{a_{2k}\}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$成等比数列，公比为2，首项为2，

$a_n=a_{2k}=2^k=2^{\frac{n}{2}}$．

$\therefore a_n=\begin{cases}n,n为奇数\\2^{\frac{n}{2}},n为偶数\end{cases}$．

(2) $\because b_n=a_na_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore b_{2n-1}+b_{2n}=a_{2n-1}a_{2n}+a_{2n}a_{2n+1}=(2n+1+2n-1)2^n=4n\cdot2^n$．

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前$2n$项和

$S_{2n}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2n-1}+b_{2n})=4(2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n)$，

令$A_n=2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$，

$2A_n=2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$，

$\therefore -A_n=2+2^2+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}$

$=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot2^{n+1}$

$=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$，

$\therefore A_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$．

$\therefore S_{2n}=(n-1)\cdot2^{n+3}+8$．

(3) $c_n=a_{2n-1}a_{2n}+(-1)^n=(2n-1)\cdot2^n+(-1)^n$．

$\therefore\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{c_{2k-1}}=\dfrac{1}{(2n-1)\cdot2^n-1}<\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$，$(n\geqslant5)$．

$\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{c_{2k}}=\dfrac{1}{(2n-1)\cdot2^n+1}<\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}(n\geqslant4)$．

$\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}+\dfrac{1}{c_3}+\cdots+\dfrac{1}{c_n}<1+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{39}+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)+\cdots<1+\dfrac{1}{13}$

$+\dfrac{1}{39}+\dfrac{1}{7}<\dfrac{5}{4}$

．

9 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_4-a_2=12$，$S_4+2S_2=3S_3$，数列$\{b_n\}$满足

$nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$b_1=1$．

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

(2)

设$c_n=\begin{cases}\dfrac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, n为奇数\\ \dfrac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, n为偶数\end{cases}$，$T_n$为$\{c_n\}$的前$n$项和，求$T_{2n}$.

答案 (1) $a_n=2^n$，$b_n=n^2$．

(2) $T_{2n}=\dfrac{16}{9}-\dfrac{6n+8}{9\times 2^{2n-1}}+\dfrac{n}{2n+1}$．

解析 (1) $\{a_n\}$为等比数列，设公比为q，首项为a_1．

$\therefore\begin{cases}a_1q^3-a_1q=12\\ a_1\left(1+q+q^2+q^3\right)+2a_1(1+q)=3a_1\left(1+q+q^2\right)\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}a_1=2\\ q=2\end{cases}$，

$\therefore a_n=2^n$．

又$\because nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$，

$\therefore\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$为首项为$\dfrac{b_1}{1}=1$，公差为1得等差数列．

$\therefore\dfrac{b_n}{n}=n$，$\therefore b_n=n^2$．

(2)

由（1）知$c_n=\begin{cases}\dfrac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, n为奇数\\ \dfrac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, n为偶数\end{cases}$，

$\therefore c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n(n+2)}, n为奇数\\ \dfrac{n}{2^{n-1}}, n为偶数\end{cases}$，

$\therefore T_{2n}=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{2n}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)+\left(\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{4}{2^3}+\dfrac{6}{2^5}+\cdots+\dfrac{2n}{2^{2n-1}}\right)$

$=\dfrac{n}{2n+1}+\left(\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{4}{2^3}+\dfrac{6}{2^5}+\cdots+\dfrac{2n}{2^{2n-1}}\right)$

设$A=\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{4}{2^3}+\dfrac{6}{2^5}+\cdots+\dfrac{2n}{2^{2n-1}}$，

则$\dfrac{1}{4}A=\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{4}{2^5}+\dfrac{6}{2^7}+\cdots+\dfrac{2n}{2^{2n+1}}$，

两式相减得$\dfrac{3}{4}A=1+2\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{1}{2^7}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2n-1}}\right)-\dfrac{2n}{2^{2n+1}}$，

整理得$A=\dfrac{16}{9}-\dfrac{6n+8}{9\times 2^{2n-1}}$，

$\therefore T_{2n}=\dfrac{16}{9}-\dfrac{6n+8}{9\times 2^{2n-1}}+\dfrac{n}{2n+1}$．

10 已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足：$b_na_n+a_{n+1}+b_{n+1}a_{n+2}=0, b_n=\dfrac{3+(-1)^n}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$a_1=2, a_2=4$．

(1) 求a_3, a_4, a_5的值；

(2) 设$c_n = a_{2n-1} + a_{2n+1}, n \in \mathbf{N}^*$，证明：$\{c_n\}$是等比数列；

(3) 设$S_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, k \in \mathbf{N}^*$，证明：$\sum\limits_{k=1}^{4n} \frac{S_k}{a_k} < \frac{7}{6}(n \in \mathbf{N}^*)$．

答案 (1) $a_3 = -3$；$a_4 = -5$；$a_5 = 4$；

(2) 证明见解析．

(3) 证明见解析．

解析 (1) 由$b_n = \frac{3 + (-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N}^*,$

可得$b_n = \begin{cases} 1, n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^* \\ 2, n = 2k, k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$

又$b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0,$

当$n = 1$时，$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$，

由$a_1 = 2, a_2 = 4$，可得$a_3 = -3$；

当$n = 2$时，$2a_2 + a_3 + a_4 = 0$，可得$a_4 = -5$；

当$n = 3$时，$a_3 + a_4 + 2a_5 = 0$，可得$a_5 = 4$；

(2) 对任意$n \in \mathbf{N}^*$，

$a_{2n-1} + a_{2n} + 2a_{2n+1} = 0,$ ①

$2a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = 0,$ ②

$a_{2n+1} + a_{2n+2} + 2a_{2n+3} = 0,$ ③

②—③，得$a_{2n} = a_{2n+3}$． ④

将④代入①，可得$a_{2n+1} + a_{2n+3} = -(a_{2n-1} + a_{2n+1})$

即$c_{n+1} = -c_n (n \in \mathbf{N}^*)$

又$c_1 = a_1 + a_3 = -1$，故$c_n \neq 0,$

因此$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -1$，所以$\{c_n\}$是等比数列．

(3) 由（II）可得$a_{2k-1} + a_{2k+1} = (-1)^k$，

于是，对任意$k \in \mathbf{N}^*$且$k \geqslant 2$，有

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= -1, \\ -(a_3 + a_5) &= -1, \\ a_5 + a_7 &= -1, \\ &\vdots \\ (-1)^k (a_{2k-3} + a_{2k-1}) &= -1. \end{aligned}$$

将以上各式相加，得$a_1+(-1)^k a_{2k-1}=-(k-1)$,

即$a_{2k-1}=(-1)^{k+1}(k+1)$，

此式当$k=1$时也成立．由④式得$a_{2k}=(-1)^{k+1}(k+3)$.

从而$S_{2k}=(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\cdots+(a_{4k-2}+a_{4k})=-k$,

$S_{2k-1}=S_{2k}-a_{4k}=k+3$.

所以，对任意$n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2$，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{4n}\frac{S_k}{a_k}=\sum_{m=1}^{n}(\frac{S_{4m-3}}{a_{4m-3}}+\frac{S_{4m-2}}{a_{4m-2}}+\frac{S_{4m-1}}{a_{4m-1}}+\frac{S_{4m}}{a_{4m}})\\&=\sum_{m=1}^{n}(\frac{2m+2}{2m}-\frac{2m-1}{2m+2}-\frac{2m+3}{2m+1}+\frac{2m}{2m+3})\\&=\sum_{m=1}^{n}(\frac{2}{2m(2m+1)}+\frac{3}{(2m+2)(2m+3)})\\&=\frac{2}{2\times 3}+\sum_{m=2}^{n}\frac{5}{2m(2m+1)}+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}\\&<\frac{1}{3}+\sum_{m=2}^{n}\frac{5}{(2m-1)(2m+1)}+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}\\&=\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\cdot[(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}\\&=\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}+\frac{3}{(2n+2)(2n+3)}<\frac{7}{6}\ .\end{aligned}$$

11 已知直线$l_n:y=x-\sqrt{2n}$与圆$C_n:x^2+y^2=2a_n+n$交于不同的两点A_n，B_n，$n\in\mathbf{N}^*$．数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{4}|A_nB_n|^2$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n．

(2) 若$b_n=\frac{n}{4a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

(3) 记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，在（2）的条件下，求证：对任意正整数n，$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{S_k(T_k+k+1)}<2$．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}$．

(2) $T_n=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$．

(3) 证明见解析．

解析 (1) 圆C_n的圆心到直线l_n的距离 $d_n=\frac{|\sqrt{2n}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{n}$，半径$r_n=\sqrt{2a_n+n}$，

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{4}|A_nB_n|^2=r_n^2-d_n^2=2a_n$，

即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，

又$a_1=1$，所以数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列，

$\therefore a_n=2^{n-1}$．

(2) 由（Ⅰ）知，$b_n=\dfrac{n}{4a_n}=\dfrac{n}{2^{n+1}}$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n+1}}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n+1}}\right)=\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{2}{2^4}+\dfrac{3}{2^5}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n+2}}$，

两式相减，得$\dfrac{1}{2}\cdot T_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{n}{2^{n+2}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{n+2}{2^{n+2}}$，

$\therefore T_n=1-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$．

(3) 因为$a_n=2^{n-1}$，

所以 $S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

$\therefore \dfrac{k+2}{S_k(T_k+k+1)}$

$=\dfrac{k+2}{(2^k-1)\cdot\left(1-\dfrac{k+2}{2^{k+1}}+k+1\right)}$

$=\dfrac{2^{k+1}}{(2^k-1)\cdot(2^{k+1}-1)}$

$=2\left(\dfrac{1}{2^k-1}-\dfrac{1}{2^{k+1}-1}\right)$，

所以，$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+2}{S_k(T_k+k+1)}$

$=2\left[\left(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)\right]$，

$=2\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)<2$．

12 已知单调递增的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_3+a_4=28$，且a_3+2是a_2，a_4的等差中项．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 若数列$\{b_n\}$满足$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{b_1}{2+1}-\dfrac{b_2}{2^2+1}+\dfrac{b_3}{2^3+1}-\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{b_n}{2^n+1}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式．

(3) 在（2）条件下．设$c_n=2^n+\lambda b_n$．问是否存在实数λ使得数列$\{c_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$是单调递增数列？若存在，求出λ的取值范围；若不存在，请说明理由．

答案 (1) $a_n=2^n$．

(2) $\begin{cases}\frac{3}{2}, n=1\\(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right), n\geqslant 2\end{cases}$.

(3) $\left\{\lambda \middle| -\frac{128}{35}<\lambda<\frac{32}{19}\right\}$.

解析 (1) 设等比数列为：a_1，a_1q，a_1q^2…其中$a_1\neq 0$，$q\neq 0$.

由题意知：$a_1q+a_1q^2+a_1q^3=28$，①

$a_1q+a_1q^3=2\left(a_1q^2+2\right)$，②

联立①②解得$q=2$或$q=\frac{1}{2}$，

∵等比数列$\{a_n\}$单调递增，

∴$a_1=2$，$q=2$，则$a_n=2^n$.

(2) 由（1）可知，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^n}$，

由$\frac{1}{a_n}=\frac{b_1}{2+1}-\frac{b_2}{2^2+1}+\frac{b_3}{2^3+1}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{b_n}{2^n+1}$，

得$\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{b_1}{2+1}-\frac{b_2}{2^2+1}+\frac{b_3}{2^3+1}-\ldots+(-1)^n\frac{b_{n-1}}{2^{n-1}+1}$，

两式作差得：$\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}=(-1)^{n+1}\frac{b_n}{2^n+1}$，

即$b_n=(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)(n\geqslant 2)$.

当$n=1$时，$a_1=\frac{b_1}{2+1}$，得$b_1=\frac{3}{2}$.

∴$\begin{cases}\frac{3}{2}, n=1\\(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right), n\geqslant 2\end{cases}$.

(3) ∵$c_n=2^n+\lambda b_n$.

∴当$n\geqslant 3$时，$c_n=2^n+(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}\right)\lambda$，$c_{n-1}=2^{n-1}+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+1\right)\lambda$，

依据题意，有$c_n-c_{n-1}=2^{n-1}+(-1)^n\lambda\left(2+\frac{3}{2^n}\right)>0$.

即$(-1)^n\lambda>-\dfrac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n}+2}$.

① 当n为大于或等于4的偶数时，有$\lambda>-\dfrac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n}+2}$恒成立，

又$\dfrac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n}+2}=-\dfrac{1}{\frac{3}{2^{2n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}}$随$n$增大而增大，

则当$n=4$时，$\left(\dfrac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n}+2}\right)_{\min}=\frac{128}{35}$，故λ的取值范围为$\lambda>-\frac{128}{35}$；

② 当n为大于或等于3的奇数时，有$\lambda<\dfrac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n}+2}$恒成立，且仅当$n=3$时，

$\left(\dfrac{2^{n-1}}{\frac{3}{2^n}+2}\right)_{\min}=\frac{32}{19}$，故λ的取值范围为$\lambda<\frac{32}{19}$.

又$n=2$时，由$c_n-c_{n-1}=c_2-c_1=\left(2^2+\frac{5}{4}\lambda\right)-\left(2+\frac{3}{2}\lambda\right)>0$，解得$\lambda<8$.

综上可得，所求λ的取值范围是$\left\{\lambda \middle| -\dfrac{128}{35} < \lambda < \dfrac{32}{19}\right\}$．

13 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，并且$a_2 = 2$，$S_5 = 15$，数列$\{b_n\}$满足：$b_1 = \dfrac{1}{2}$，$b_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} b_n (n \in \mathbf{N}^+)$，记数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n及前n项和公式S_n．

(2) 求数列$\{b_n\}$的通项公式b_n及前n项和公式T_n．

(3) 记集合$M = \left\{n \middle| \dfrac{2S_n(2-T_n)}{n+2} \geqslant \lambda, n \in \mathbf{N}^+\right\}$，若$M$的子集个数为16，求实数λ的取值范围．

答案

(1) $a_n = n$，

$S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$．

(2) $b_n = \dfrac{n}{2^n}$．

$T_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$．

(3) $\dfrac{15}{16} < \lambda \leqslant 1$．

解析

(1) 设数列$\{a_n\}$的公差为d，

由题意得$\begin{cases} a_1 + d = 2 \\ 5a_1 + 10d = 15 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases}$，

$\therefore a_n = n$，

$\therefore S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$．

(2) 由题意得$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n+1}{n}$，

累乘得$b_n = \dfrac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \dfrac{b_2}{b_1} \cdot b_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(\dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{n-1}{n-2} \times \cdots \times \dfrac{2}{1}\right)$

$= \dfrac{n}{2^n}$．

由题意得$T_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n}$①，

$\dfrac{1}{2}T_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{2^3} + \dfrac{3}{2^4} + \cdots + \dfrac{n-1}{2^n} + \dfrac{n}{2^{n+1}}$②，

①−②得：$\dfrac{1}{2}T_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{n}{2^{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \dfrac{n}{2^{n+1}}$

$= 1 - \dfrac{n+2}{2^{n+1}}$，

$\therefore T_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$．

(3) 由上面可得$\dfrac{2S_n(2-T_n)}{n+2} = \dfrac{n^2+n}{2^n}$，令$f(n) = \dfrac{n^2+n}{2^n}$，

则$f(1) = 1$，$f(2) = \dfrac{3}{2}$，$f(3) = \dfrac{3}{2}$，$f(4) = \dfrac{5}{4}$，$f(5) = \dfrac{15}{16}$．

下面研究数列$f(n)=\dfrac{n^2+n}{2^n}$的单调性，

$\because f(n+1)-f(n)=\dfrac{(n+1)^2+n+1}{2^{n+1}}-\dfrac{n^2+n}{2^n}$

$=\dfrac{(n+1)(2-n)}{2^{n+1}}$，

$\therefore n\geqslant 3$时，$f(n+1)-f(n)<0$，$f(n+1)<f(n)$，即$f(n)$单调递减．

$\because$集合M的子集个数为16，

$\therefore M$中的元素个数为4，

$\therefore$不等式$\dfrac{n^2+n}{2^n}\geqslant\lambda$，$n\in\mathbf{N}^+$解的个数为4，

$\therefore\dfrac{15}{16}<\lambda\leqslant 1$．

14 已知数列$\{a_n\}$是公比为正整数的等比数列，若$a_2=2$且a_1，$a_3+\dfrac{1}{2}$，a_4成等差数列．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项a_n．

(2) 定义：$\dfrac{n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}$为$n$个正数$P_1$，$P_2$，$P_3$，$\cdots$，$P_n(n\in\mathbf{N}*)$的“均倒数”．

① 若数列$\{b_n\}$前n项的“均倒数”为$\dfrac{1}{2a_n-1}(n\in\mathbf{N}*)$，求数列$\{b_n\}$的通项$b_n$．

② 试比较$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{2}{b_2}+\cdots+\dfrac{n}{b_n}$与2的大小，并说明理由．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}$．

(2) ① $b_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}-1(n\in\mathbf{N}*)$．

② $\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{2}{b_2}+\cdots+\dfrac{n}{b_n}<2$．

解析 (1) 设数列$\{a_n\}$是公比为q，由题意a_1，$a_3+\dfrac{1}{2}$，a_4成等差数列，

即为$2\left(a_3+\dfrac{1}{2}\right)=a_1+a_4$，

即$2\left(2q+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{q}+2q^2$，

即：$(2q^2-1)(q-2)=0$，

$\because q$为正整数，

$\therefore q=2$，

故$a_n=2^{n-1}$．

(2) ① 由题意有：$\dfrac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\dfrac{1}{2^n-1}$，

$\therefore b_1+b_2+\cdots b_n=n\cdot(2^n-1)$①,

$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=(n-1)\cdot(2^{n-1}-1),n\geqslant 2$②,

由①−②得：$b_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}-1(n\geqslant 2)$，

又$b_1=1$，

$\therefore b_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}-1(n\in\mathbf{N}*)$．

② 判断：$\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_2}+\cdots+\frac{n}{b_n}<2$，

证明如下：由题意：$n\geqslant 2$，

而$\frac{n}{b_n}=\frac{n}{(n+1)\cdot 2^{n-1}-1}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)\cdot 2^{n-1}-1}<\frac{n+1}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}$，

$\therefore\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_2}+\cdots+\frac{n}{b_n}$

$=\frac{1}{2\cdot 2^0-1}+\frac{2}{3\cdot 2^1-1}+\cdots+\frac{n}{(n+1)\cdot 2^{n-1}-1}$

$<\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$

$=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2$．

15 已知数列$\{a_n\}$，$a_n>0$，其前n项和S_n满足$S_n=2a_n-2^{n+1}$，其中$n\in\mathbf{N}^*$．

(1) 设$b_n=\frac{a_n}{2^n}$，证明：数列$\{b_n\}$是等差数列．

(2) 设$c_n=b_n\cdot 2^{-n}$，T_n为数列$\{c_n\}$的前n项和，求证：$T_n<3$．

(3) 设$d_n=4^n+(-1)^{n-1}\lambda\cdot 2^{b_n}$（$\lambda$为非零整数，$n\in\mathbf{N}^*$）试确定$\lambda$的值，使得对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$d_{n+1}>d_n$成立．

答案 (1) 证明见解析．

(2) 证明见解析．

(3) $\lambda=-1$

解析 (1) 当$n=1$时，$S_1=2a_1-4$，$\therefore a_1=4$；

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2^{n+1}-2a_{n-1}+2^n$，

$\therefore a_n-2a_{n-1}=2^n$，

即$\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=1$，

$\therefore b_n-b_{n-1}=1$（常数）．

又$b_1=\frac{a_1}{2}=2$，

$\therefore\{b_n\}$是首项为2，公差为1的等差数列，

$\therefore b_n=n+1$.

(2) $\because c_n=b_n\cdot 2^{-n}=(n+1)\cdot\frac{1}{2^n}$ ，

$\therefore T_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}$ ，

$\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$ ，

两式相减得

$\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=1+\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$

，

$\therefore T_n=3-\frac{2}{2^n}-\frac{n+1}{2^n}=3-\frac{n+3}{2^n}<3$.

(3) 由$d_{n=1}>d_n$，得$d_{n+1}-d_n>0$，$4^{n+1}-4^n+(-1)^n\lambda\cdot 2^{n+2}-(-1)^{n-1}\lambda\cdot 2^{n+1}>0$，

$\therefore 3\times 4^n-3(-1)^{n-1}\lambda\cdot 2^{n+1}>0$ ，

$\therefore (-1)^{n-1}\lambda<2^{n-1}$.

当n为奇数时，即$\lambda<2^{n-1}$恒成立，当且仅当$n=1$时，2^{n-1}有最小值为1，

$\therefore \lambda<1$；

当n为偶数时，即$\lambda>-2^{n-1}$恒成立，当且仅当$n=2$时，-2^{n-1}有最小值为-2，

$\therefore \lambda>-2$.

$\therefore -2<\lambda<1$.

又λ非零整数，

$\therefore \lambda=-1$.

综上所述，存在$\lambda=-1$，使得对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$d_{n+1}>d_n$成立．

16 已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_1=b_1=1$，$b_2+b_3=2a_3$，$a_5-3b_2=7$.

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式

(2) 设数列$\{c_n\}$满足$c_n=\begin{cases}1, n\text{为奇数}\\ b_{\frac{n}{2}}, n\text{为偶数}\end{cases}$，求$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(3) 对任意正整数n，不等式$a\sqrt{2n+3}\leqslant\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_{n+1}}\right)$成立，求正数$a$的取值范围．

答案 (1) 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$；

数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) $\frac{7}{9}+\frac{(12n-7)}{9}\cdot 4^n$．

(3) $0<a\leqslant\frac{4\sqrt{5}}{15}$．

解析 (1) 设数列$\{a_n\}$的公比为q，数列$\{b_n\}$的公差为d，由题意，$q>0$，

由已知有$\begin{cases}2q^2-3d=0\\q^4-3d=10\end{cases}$，消去$d$整理得：$q^4-2q^2-8=0$．

$\because q>0$，解得$q=2$，

$\therefore d=2$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$；

数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) $\because c_n=\begin{cases}1,n为奇数\\b_{\frac{n}{2}},n为偶数\end{cases}$，

$\therefore a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2b_1+a_4b_2+\cdots+a_{2n}b_n)$，

令$A_n=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=2^0+2^2+\cdots+2^{2n-2}=\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{4^{n-1}}{3}$，

令$B_n=a_2b_1+a_4b_2+\cdots+a_{2n}b_n=\frac{1}{2}\left(1\cdot4+3\cdot4^2+\cdots+(2n-1)\cdot4^n\right)$，

令$T_n=1\cdot4+3\cdot4^2+\cdots+(2n-1)\cdot4^n$

$4T_n=1\cdot4^3+\cdots+(2n-3)\cdot4^n+(2n-1)\cdot4^{n+1}$，

$\therefore -3T_n=4+2\left(4^2+4^3+\cdots+4^n\right)-(2n-1)\cdot4^{n+1}$

$=4+2\frac{4^2-4^n\cdot4}{1-4}-(2n-1)\cdot4^{n+1}$

$=-\frac{20}{3}-\frac{(6n-5)}{3}\cdot4^{n+1}$

$\therefore T_n=\frac{20}{9}+\frac{(6n-5)}{9}\cdot4^{n+1}$，

$\therefore a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$

$=A_n+B_n=A_n+\frac{1}{2}T_n=\frac{7}{9}+\frac{(12n-7)}{9}\cdot4^n$．

(3) 对任意正整数n，不等式$a\sqrt{2n+3}\leqslant\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$成立，

即$a\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$对任意正整数$n$成立．

记$f(n)=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$，

则$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}\left(1+\frac{1}{b_{n+1}}\right)$

$=\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}\frac{2n+4}{2n+3}$

$=\dfrac{\sqrt{4n^2+16n+16}}{\sqrt{4n^2+16n+15}}>1$，

$\therefore f(n+1)>f(n)$，即$f(n)$递增，

故$[f(n)]_{\min}=f(1)=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$，

$\therefore 0<a\leqslant\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$．

17 数列$\{a_n\}$满足$a_1=\dfrac{1}{3}$，且$n\geqslant 2$时，$a_n=\dfrac{a_n-1}{2-a_n-1}$．

(1) 证明数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$为等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，不等式$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\leqslant\lambda\cdot 2^n$恒成立，求$\lambda$的取值范围．

(3) 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求证：对任意的正整数n都有$S_n\geqslant\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$．

答案 (1) 证明见解析，$a_n=\dfrac{1}{1+2^n}$．

(2) λ的取值范围是$\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$．

(3) 证明见解析．

解析 (1) 由题意，$\dfrac{1}{a^n}=\dfrac{2}{a_{n-1}}-1$，

所以$\dfrac{1}{a_n}-1=2\left(\dfrac{1}{a_{n-1}}-1\right)$，$n\geqslant 2$，

所以$\dfrac{\frac{1}{a_n}-1}{\frac{1}{a_{n-1}}-1}=2$，

而$a_1=\dfrac{1}{3}$，则$\dfrac{1}{a_1}-1=2$，

因此数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$是首项为2，公比为2的等比数列，$\dfrac{1}{a_n}-1=2^n$，

即$a_n=\dfrac{1}{1+2^n}$．

(2) 由$n\in\mathbf{N}^*$时， 不等式$(1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_n)\leqslant\lambda\cdot 2^n$恒成立，

得$\dfrac{1}{2^n}\cdot(1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_n)\leqslant\lambda$，

令$b_n=\dfrac{1}{2^n}\cdot(1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_n)$，

则$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{1+2^{n+1}}\right)$，

又$1+\dfrac{1}{1+2^{n+1}}$随着n的增大逐渐减小，得$1+\dfrac{1}{1+2^{n+1}}\leqslant 1+\dfrac{1}{1+2^2}=\dfrac{6}{5}$，

所以$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{1+2^{n+1}}\right)\leqslant\dfrac{3}{5}<1$，即$b_n>b_{n+1}$，

所以数列$\{b_n\}$单调递减，

有$(b_n)_{\max}=b_1=\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1}{1+2^1}\right)=\dfrac{2}{3}$，则$\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda$，、

因此λ的取值范围是$\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

(3) 由（1）知$a_n=\frac{1}{1+2^n}>\frac{1}{2+2^n}=\frac{1}{2(1+2^{n-1})}$,

$a_n>\frac{1}{2}a_{n-1}>\frac{1}{2^2}a_{n-2}>\ldots>\frac{1}{2^{n-1}}a_1$,

所以$a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$,

所以$S_n\geqslant\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

18 设$\{a_n\}$是等比数列的公比大于0，其前n项和为S_n，$\{b_n\}$是等差数列，已知$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$.

(1) 求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式 .

(2) 设$c_n=\frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$.

(3) 设$d_n=\begin{cases}b_n,n\neq 2^k\\ b_n(\log_2 b_n+1),n=2^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$，求$\sum\limits_{i=1}^{2^n}d_i$.

答案

(1) $a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$.

(2) $T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}$.

(3) $\sum\limits_{i=1}^{2^n}d_i=2^{2n-1}+(4n-3)\cdot 2^{n-1}+2$.

解析

(1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$q>0$，设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

$\because a_1=1$，由$a_3=a_2+2$，得$q^2=q+2$，

$\because q>0$，解得$q=2$，则$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

由$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$得$\begin{cases}2b_1+6d=8\\ 3b_1+13d=16\end{cases}$,

解得$b_1=d=1$，则$b_n=b_1+(n-1)d=n$.

(2) $c_n=\frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}$

$=\frac{(2^n+1)-(2^{n-1}+1)}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}=\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}$,

$\therefore T_n=\left(\frac{1}{2^0+1}-\frac{1}{2^1+1}\right)+\left(\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}$.

(3) 由$d_n=\begin{cases}b_n,n\neq 2^k\\b_n(\log_2 b_n+1),n=2^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$，

可得$d_n=\begin{cases}n\text{ , }n\neq 2^k\\n(\log_2 n+1)\text{ , }n=2^k\end{cases}$，$k\in\mathbf{N}^*$，

$\sum\limits_{i=1}^{2^n}d_i=\sum\limits_{i=1}^{2^n}i-\sum\limits_{i=1}^{n}2^i+\sum\limits_{i=1}^{n}(i+1)\cdot 2^i$，

$\sum\limits_{i=1}^{2^n}i=\frac{2^n(1+2^n)}{2}=2^{n-1}+2^{2n-1}$，

$\sum\limits_{i=1}^{n}2^i=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，

设$M_n=2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n-1}+(n+1)\cdot 2^n$，

$2M_n=2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^n+(n+1)\cdot 2^{n+1}$，

两式相减可得$-M_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot 2^{n+1}$

$=2+\frac{2(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\cdot 2^{n+1}$，

化为$M_n=n\cdot 2^{n+1}$，

所以$\sum\limits_{i=1}^{n}(i+1)\cdot 2^i=n\cdot 2^{n+1}$，

则$\sum\limits_{i=1}^{2^n}d_i=2^{2n-1}+(4n-3)\cdot 2^{n-1}+2$.

19 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，数列$\{b_n\}$满足$nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，且$b_1=1$.

(1) 证明数列$\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$为等差数列，并求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式 .

(2) 若$C_n=(-1)^{n+1}\frac{4(n+1)}{(3+2\log_2 a_n)(3+2\log_2 a_{n+1})}$求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}$.

(3) 若$d_n=a_n\cdot\sqrt{b_n}$数列$\{d_n\}$的前n项和为D_n，对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$D_n\leqslant nS_n-a$，求实数a的取值范围 .

答案 (1) 证明见解析；$a_n=2^{n-1}$，$b_n=n^2$.

(2) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}$.

(3) $(-\infty,0]$.

解析 (1) $S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，$n\geqslant 2$时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-1-(2a_{n-1}-1)$，

化为：$a_n=2a_{n-1}$，

当$n=1$时，$a_1=2a_1-1$，

解得$a_1=1$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是等比数列，公比为2．

$\therefore a_n=2^{n-1}$，

数列$\{b_n\}$满足$nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，

化为：$\dfrac{b_{n+1}}{n+1}-\dfrac{b_n}{n}=1$，且$b_1=1$，

$\therefore$数列$\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$为等差数列，

公差为1，首项为$\dfrac{b_1}{1}=1$，

$\therefore\dfrac{b_n}{n}=1+n-1=n$，

$b_n=n^2$．

(2) $c_n=(-1)^{n+1}\dfrac{4(n+1)}{(3+2\log_2 a_n)(3+2\log_2 a_{n+1})}$

$=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$

$=(-1)^{n+1}\cdot\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}\right)$，

$\therefore$数列$\{c_n\}$的前n项和

$T_{2n}=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)+\cdots\cdots-\left(\dfrac{1}{4n+1}+\dfrac{1}{4n+3}\right)$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4n+3}$

(3) $d_n=a_n\cdot\sqrt{b_n}=n\cdot 2^{n-1}$，

数列$\{d_n\}$的前n项和为

$D_n=1+2\times2+3\times2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$，

$2D_n=2+2\times2^2+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$，

$\therefore -D_n=1+2+2^2+\cdots2^{n-1}-n\cdot2^n$

$=\dfrac{2^n-1}{2-1}-n\cdot2^n$，

解得$D_n=(n-1)\cdot2^n+1$，

$S_n=2a_n-1=2^n-1$，

对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$D_n\leqslant nS_n-a$，

$\therefore a\leqslant n(2^n-1)-(n-1)\cdot2^n-1=2^n-n-1$，

令$d_n=2^n-n-1$，

则$d_{n+1}-d_n=2^{n+1}-(n+1)-1-(2^n-n-1)=2^n-1>0$，

$\therefore$数列$\{d_n\}$单调递增，

$\therefore a \leqslant (d_n)_{\min} = d_1 = 0$，

$\therefore$实数a的取值范围是$(-\infty, 0]$．

20 已知q和n均为给定的大于1的自然数，设集合$M = \{0, 1, 2 \cdots, q-1\}$，集合
$A = \{x \,|x = x_1 + x_2 q + \cdots + x_n q^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \cdots n\}$，

(1) 当$q = 2, n = 3$时，用列举法表示集合A．

(2) 设$s, t \in A, s = a_1 + a_2 q + \cdots + a_n q^{n-1}, t = b_1 + b_2 q + \cdots b_n q^{n-1}$,其中

$a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \cdots n,$

证明：若$a_n < b_n$，则$s < t$．

答案 (1) $A = \{0, 7, 1, 2, 4, 6, 3, 5\}$．

(2) 证明见解析．

解析 (1) $q = 2$，$n = 3$，$M = \{0, 1\}$，$A = \{x |\, x = x_1 + 2x_2 + 4x_3, x_{\text{i}} \in M, i = 1, 2, 3\}$

$\therefore A = \{0, 7, 1, 2, 4, 6, 3, 5\}$．

(2) 证明：由s，$t \in A$，$s = a_1 + a_2 q + \cdots + a_n q^{n-1}$，$t = b_1 + b_2 q + \cdots + b_n q^{n-1}$，$a_i$，$b_i \in M$，$i = 1, 2, \cdots, n$及$a_n < b_n$，可得

$s - t = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)q + \cdots + (a_{n-1} - b_{n-1})q^{n-2} + (a_n - b_n)q^{n-1}$

$\leqslant (q-1) + (q-1)q + \cdots + (q-1)q^{n-2} - q^{n-1}$

$= \dfrac{(q-1)(1-q^{n-1})}{1-q} - q^{n-1}$

$= -1 < 0$．

所以，$s < t$．